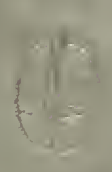
ГИРОСКОП

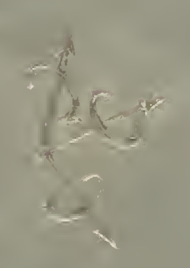
К. МАГНУС



К. Магнус

ГИРОСКОП

теория и применение




ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

KREISEL

Theorie und Anwendungen

Kurt Magnus

o. Professor und Direktor des Instituts B für Mechanik
der Technischen Universität München

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1971

К. Магнус

ГИРОСКОП

теория и применение

Перевод с немецкого

Г. Д. Блюмина, В. А. Филиппова, Б. Л. Хейна

Под редакцией

Г. Д. Блюмина

Издательство «Мир» • Москва 1974

УДК 531.383

В монографии известного немецкого специалиста в области механики и теории гироскопических приборов К. Магнуса освещены основные аспекты и приложения теории гироскопических систем. Рассмотрены наиболее типичные устройства — гирогоризонт, гирокомпас, гиростабилизатор и др. Значительное место уделено актуальным проблемам космических полетов — движению искусственного спутника, гироскопу с полостью, заполненной жидкостью, и т. п. Большой интерес представляет предложенная автором классификация гироскопических приборов.

Полнота и многогранность изложения, его высокий научный уровень, удачно сочетающийся с ясностью и систематичностью, делают книгу интересной для широкого круга специалистов, тем более что в нее включены новые результаты, в том числе и полученные самим автором. Она может быть использована как учебное пособие для студентов и аспирантов университетов и технических вузов.

Редакция литературы по математическим наукам

$М\frac{20302-045}{041(01)-74}$ 45—74

Предисловие редактора перевода

Представляя читателю русский перевод книги известного немецкого ученого профессора К. Магнуса, мы хотим отметить некоторые ее особенности. Это капитальная монография, в которой с исчерпывающей полнотой и на высоком научном уровне освещены главные аспекты и приложения современной гироскопической теории, ее методы и наиболее значительные результаты, в частности и те, которые принадлежат самому автору. Вместе с тем книга может служить и учебником (или хорошей основой большого курса) по теории гироскопических систем. Чем достигается такое не часто встречающееся сочетание?

Прежде всего тем, что материал книги при всей его полноте и многогранности подчинен четкой и глубоко продуманной системе. Читателю предлагаются не отдельные вопросы теории гироскопов (что вполне естественно для обычной монографии), а *цельная система знаний* — наука о гироскопе и его приложениях. При этом наибольшее внимание (и место) уделено основе этой науки — *механике гироскопических систем*; именно она образует стройный логический каркас всей книги.

Для монографии К. Магнуса характерно ясное и систематическое изложение *основ* науки, что, к сожалению, далеко не всегда можно сказать о книгах по теории гироскопических систем, специально изданных в качестве учебников: вместо этого некоторые из них настолько перегружены частными задачами или изложением собственных результатов авторов, что читатель может не увидеть леса из-за деревьев. К. Магнус также рассматривает много частных задач и разнообразных гироскопических явлений, но использует их для разъяснения или для иллюстрации принципиальных положений и методов теории. У него такие задачи — лишь детали, которые как бы размещены на каркасе здания, отнюдь не затемняя его.

Математический аппарат книги сравнительно прост. Здесь действительно соблюдается «желаемое равновесие между употребляемыми средствами и получаемым результатом», о котором автор упоминает в предисловии. Возможно, что несколько непривычные для широкого круга читателей индексные обозначения векторов и тензоров вызовут известные затруднения, однако эти затруднения легко преодолеть, воспользовавшись объяснениями в первой главе книги. В то же время нельзя не согласиться с автором в том,

что такие обозначения приводят к большей компактности записи формул и выкладок.

Наряду с классической теорией гироскопа (в общем представляющей собой теорию вращательного движения твердого тела) и с традиционными вопросами теории гироскопических систем в книге освещены новые проблемы, ставшие особенно актуальными в последние годы в связи с развитием ракетной техники и космонавтики. Сюда относятся, например, задачи о движении спутника в центральном поле тяготения, о гиростатах и твердых телах с полостями, заполненными жидкостью, о гироскопах с самовозбуждением и ряд других.

Нова и интересна, на наш взгляд, вполне удавшаяся попытка построить классификацию гироскопических приборов; она охватывает, пожалуй, все известные их виды. Автор делит приборы по функциональному назначению, но не придерживается этого принципа слишком жестко, так что фактически объединенными в одну группу оказываются приборы, сходные по внутренней структуре. Такая классификация вносит в теорию многочисленного и очень разнообразного по составу семейства гироприборов определенную систему, позволяет выявлять общие свойства и закономерности.

В книге развивается теория основных типов гироскопических приборов: гировертикалей, гирокомпасов (в частности, пространственного компаса), гиростабилизаторов, инерциальных платформ. При этом автор, верный своему методу изложения, не вдается в частности, а сосредоточивает внимание главным образом на методах исследования и лишь наиболее важных вопросах теории, таких, как влияние ускорений объекта (в частности, проблема невозмущаемости), эффекты детектирования возмущений, кинематические погрешности, методы рационального построения контура стабилизации и т. п.

Терминология автора во многом отлична от той, которая сложилась в советской литературе. При переводе мы стремились к возможно более точной передаче смысла и оттенков немецкой терминологии, а не к замене ее на принятую у нас, полагая, что такая замена привела бы к утрате известной части информации.

Пользуюсь случаем выразить свою благодарность автору, любезно представившему исправления и уточнения текста оригинала, а также предисловие к русскому изданию.

Книга будет интересна и полезна научным работникам, преподавателям и инженерам, специализирующимся в области теории и техники гироскопических систем. Преподаватели механики также найдут в ней много интересного для себя и своих учеников. Нет сомнения в том, что книга К. Магнуса займет свое место в большой литературе по теории гироскопов как одно из наиболее значительных и читаемых произведений.

Г. Блюмин

Предисловие

Прошло почти полтора века с тех пор, как астроном Джон Гершель назвал гироскоп инструментом философа, но и до сих пор гироскоп не утратил своих чар. И сегодня справедливо утверждение Феликса Клейна и Арнольда Зоммерфельда (1910), что ни один прибор не способствует в такой мере, как гироскоп, выявлению и пониманию взаимосвязей между физическими понятиями в механике.

Рассматривая литературу о гироскопах, можно отметить в ней две почти независимые тенденции. С одной стороны, теория вращательного движения твердых тел стала очень подробной, углубляясь в изучение едва ли представляющих интерес деталей. Эта математическая дисциплина обязана своим развитием прежде всего тому обстоятельству, что многие математики увидели в гироскопе объект, на котором можно наиболее эффективно демонстрировать математические методы. С другой стороны, физики и инженеры уже издавна исследовали своеобразные свойства гироскопа отчасти из-за научной любознательности, а отчасти и для того, чтобы непосредственно использовать эти свойства при решении интересовавших их проблем. Вспомним, например, Леона Фуко, который в январе 1852 г. пытался дать новое экспериментальное доказательство вращения Земли.

С тех пор вышло много книг по теории гироскопов, которые не понятны техникам, и много трудов по широко развившейся тем временем гироскопической технике, которые вряд ли смогут вдохновить математика. Несомненно, однако, что особая прелесть гироскопии — это именно связь между теорией и приложениями. Сознание этого обстоятельства и руководило Рихардом Граммелем, предпринявшим в своей книге «Гироскоп» (первое издание 1920 г., второе — 1950 г.) попытку перекинуть мост между этими дотоле разобщенными областями. Граммель излагает интереснейшие результаты классической теории гироскопов, но всегда выясняет их физическую основу; он описывает наиболее важные приложения и анализирует их средствами теории. Поэтому изложение Граммеля получило равно высокую оценку и у теоретиков, и у практиков.

Со времени выхода книги Граммеля гироскопическая техника развилась удивительным образом. Но и гироскопическая теория, которую можно было считать едва ли не завершенной, получила

новые импульсы, прежде всего в связи с развитием космической техники. Экстремальные условия, в которых находятся спутники и ракеты в космосе, выдвинули новые проблемы, и таким образом обнаружилась новая область взаимодействия классической теории гироскопов и гироскопической техники. Так, например, необходимость в определенном корректировании спутника при движении его по орбите вызвала особый интерес к проблемам самовозбуждающихся гироскопов и гиростатов; возникла необходимость исследовать влияние заполненных жидкостью резервуаров на гироскопические движения космических кораблей и ракет. И наконец, появились новые задачи о телах, масса или моменты инерции которых не являются постоянными.

Общая теория гироскопических систем, основанная на классических результатах Томсона и Тэта и очень далеко продвинувшаяся за последние годы, должна была занять в этой книге подобающее ей место. Однако в данном случае (как, впрочем, и в других) от стремления к исчерпывающему освещению темы, присущего, пожалуй, любому автору, пришлось отказаться в пользу более сжатого, учебного изложения материала. При этом мы стремились к обобщению методов и наиболее важных результатов, а не к систематическому исследованию отдельных явлений.

То же относится и к изложению прикладных вопросов. Оставлены за пределами книги вопросы конструкции и технологии, сколь бы решающими и важными они ни были в отдельных случаях. Вместе с тем сделана попытка осветить существенные идеи и результаты прикладной теории гироскопов таким образом, чтобы создавалась общая картина многогранной области гироскопической техники и лежащих в ее основе физических явлений. При этом предпочтительно обсуждаются явления общего характера (влияние качки, эффект детектирования или вопросы настройки), частные же задачи привлекаются лишь как типичные примеры.

Читатель может ознакомиться с тематикой книги по ее оглавлению. Он увидит, что книга по отбору материала значительно отличается от трудов по гироскопическим проблемам, имеющихся на книжном рынке. При цитировании, как и в изложении материала, мы отказались от исчерпывающей полноты. Интересующийся читатель легко сможет сам пополнить эти сведения. Следует особо подчеркнуть, что приведенные цитаты касаются лишь самого существа проблем, но не претендуют на установление чьего-либо приоритета: споры о приоритете при современном состоянии науки и техники большей частью беспредметны.

Теория гироскопов требует соответствующего математического аппарата. Наиболее удобным инструментом являются здесь векторы и тензоры. Я решил представить их в аналитическом написании с применением индексных обозначений, так как оно точно и вместе с тем компактно. Наряду с этим используются и матрицы, когда это естественно вытекает из обсуждаемых проблем и

притом достигается форма, удобная для вычислений. Я избегал применения специальных методов в тех случаях, когда оно могло бы привести к нарушению желаемого равновесия между употребляемыми средствами и получаемым результатом.

Предлагаемая книга возникла из научных сообщений, докладов и различного рода лекций. В течение нескольких лет я получал много различных советов от своих сотрудников, коллег, слушателей и собеседников и полагаю, что некоторые из них обнаружат в этой книге свой вклад. При подготовке рукописи мне оказали разностороннюю помощь мои ближайшие сотрудники. Я хотел бы выразить им здесь мою сердечную благодарность и особенно упомянуть д-ра Вернера Шилена и д-ра Герхарда Швейцера. Они тщательно и критически просмотрели всю рукопись и сделали так много ценных замечаний, что, как я полагаю, доступность и точность изложения выиграли во многом.

Курт Магнус

Мюнхен
Май 1971

К русскому изданию

На русском языке имеется обширная литература по теории гироскопов и гироскопической технике, но я все же надеюсь, что перевод моей книги представляет определенный интерес. Отбор материала книги обусловлен главным образом тематикой исследовательских работ, проводимых в Институте механики Технического университета в Мюнхене и университетскими учебными программами. Сюда относятся прежде всего курсы лекций «Теория гироскопов» и «Теория гироскопических приборов». По обоим этим курсам ведутся упражнения и лабораторные занятия, а особо интересующиеся студенты могут углубить свои знания, участвуя в специальном практикуме. Материал книги используется также в специальных курсах, например, «Спутники» и «Роторы».

В настоящем издании устранены ошибки и недостаточно четкие формулировки, обнаруженные после выхода немецкого издания. Разумеется, замечания читателей о других найденных им недостатках будут приняты с благодарностью и учтены при следующем издании книги.

Надеюсь, что советские читатели отнесутся с пониманием к тому обстоятельству, что невозможно достигнуть исчерпывающей полноты ни в излагаемом материале, ни в ссылках на литературу. Хотелось бы, чтобы читатели — в согласии со взглядом автора — рассматривали эту книгу как небольшую часть обширнейшей области теории гироскопов и ее приложений.

Курт Магнус

Мюнхен
Январь 1974

Глава 1

Введение и основные положения

1.1. Гироскоп и гироскопические явления

Употребляя в обыденной речи слово «гироскоп», в большинстве случаев имеют в виду тело вращения, вращающееся с большой скоростью вокруг своей оси симметрии. Такое представление, по-видимому, соответствует и техническим гироскопам, однако в механике утвердилось иное определение гироскопа. Здесь в общем случае под гироскопом понимают твердое тело любой формы, которое совершает вращательное движение.

Следовательно, ни внешняя форма, ни скорость вращения не характерны для гироскопа. Конечно, в общем исследования ограничиваются вращательным движением *твердого* тела. Это означает, что деформации, в действительности всегда существующие, предполагаются столь малыми, что они практически не оказывают влияния на движение тела. Твердое тело точно так же, как и материальная точка в механике и идеальная несжимаемая жидкость в гидродинамике, является упрощенной моделью реального тела. Ограничение идеальным случаем твердого тела позволяет изучать поведение гироскопа с помощью простых математических средств. Вместо уравнений в частных производных, необходимых в случае деформируемых тел, в гироскопической теории обходятся обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этим объясняется и то обстоятельство, что в теории гироскопа имеется большее число задач, поддающихся точному решению, чем, например, в теории упругости или в гидродинамике. Многие математики именно поэтому обращались в своих исследованиях к гироскопу и избирали его в качестве удобной модели отчасти для того, чтобы на нем продемонстрировать математические методы.

Хотя гироскопическая теория и ограничивалась в своих исследованиях твердыми телами, уже давно были изучены подобные гироскопическим явления, наблюдаемые в деформируемых телах. Так, Землю в геофизике можно рассматривать как большой гироскоп, хотя она деформируется и обладает гидросферой. Гироскопические явления, которые отчасти даже используются в технике, можно обнаружить также во вращающихся жидкостях, в водоворотах, в быстро вращающихся гибких кольцах из каната или из цепочки. Некоторые замечания относительно них будут сделаны в гл. 6.

Для механики величина угловой скорости тела не является существенным признаком гироскопа. Земной шар, делающий один оборот за сутки, подчиняется гироскопическим законам точно так же, как технические гироскопы, вращающиеся с большой угловой скоростью (примерно до 60 000 об/мин). Правда, оказывается, что расчет быстро вращающегося гироскопа допускает упрощения, исключительно важные при исследованиях зачастую сложных гироскопических систем.

Хотя, говоря о гироскопе, имеют в виду тело, совершающее вращательное движение, это не исключает того, что на последнее может накладываться поступательное (переносное) движение. В таком случае всегда исследуют вращение вокруг некоторого полюса, надлежащим образом выбранного в теле. Для свободно брошенного тела, например для летящего диска, вращающегося снаряда или обращающегося вокруг Земли спутника, этой точкой всегда является центр масс. Если какая-либо другая точка гироскопа закреплена или ей сообщается принудительное движение, то обычно ее и выбирают в качестве полюса.

Чтобы объяснить поведение вращающегося тела, часто проводят аналогию между вращательным движением тела и движением материальной точки. Однако эта аналогия в теории гироскопа скорее вредна, чем полезна, так как область, в которой она справедлива, кончается как раз там, где начинаются типичные гироскопические явления. Для области гироскопических явлений характерна, по выражению Граммеля, «анизотропия твердого тела, порождаемая его вращением», не имеющая аналога в механике материальной точки. Если нанести удар по покоящейся материальной частице, она начнет двигаться в направлении ударного импульса. И, напротив, совсем не обязательно, чтобы приложение к покоящемуся телу ударного момента вызвало вращение тела именно вокруг той оси, относительно которой действовал момент.

Чтобы понять гироскопические явления и рациональным образом использовать их в решении технических задач, нужно исследовать свойства различных гироскопов и гироскопических систем. Эти свойства следуют из основных законов механики и зависят от

распределения массы тела,
характера действующих на него сил,
начального состояния движения,
движения начала координат или системы отсчета,
связей между гироскопом и окружающими его телами,
связей между гироскопами, если их несколько.

Эти критерии будут положены в основу некоторой систематизации всего множества гироскопических явлений. Однако сначала нужно представить вспомогательные средства теоретической механики в том виде, который понадобится для предстоящих исследований.

1.2. Обозначения для векторов и тензоров

Положение и перемещения твердого тела в евклидовом пространстве мы будем задавать с помощью системы декартовых координат, оси которой условимся обозначать цифрами 1, 2, 3. Для векторов и тензоров будем пользоваться индексными обозначениями, проставляя для векторов один нижний индекс (например, x_i, r_j, F_k), для тензоров второго ранга — два индекса (например, a_{ij}, b_{ik}, Θ_{kl}), для тензоров третьего ранга — три индекса. При этом индексы принимают значения 1, 2, 3 соответственно обозначениям осей координат. В качестве индексов будем применять малые буквы латинского алфавита. В отличие от этого для обозначения матриц общего вида используются в качестве индексов греческие буквы. Эти индексы могут принимать и бóльшие числовые значения.

В дальнейшем нам потребуются следующие специальные величины (см., например, Душек и Хохрайнер [16]):

e_i — единичный вектор ($|e_i| = 1$);

δ_{ij} — единичный тензор второго ранга (символ Кронекера):

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

ε_{ijk} — единичный тензор третьего ранга (символ Леви-Чивиты):

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{когда } ijk \text{ образуют четную перестановку} \\ & \text{(т. е. 123, или 231, или 312)}, \\ -1, & \text{когда } ijk \text{ образуют нечетную перестановку} \\ & \text{(т. е. 321, или 213, или 132)}, \\ 0, & \text{когда два или все три индекса совпадают.} \end{cases}$$

Оперируя с этими величинами, пользуются *соглашением о суммировании*, согласно которому суммирование должно производиться по всем дважды повторяющимся индексам. При этом справедливы следующие равенства:

скалярное произведение

$$z = \delta_{ij} x_i y_j = x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3; \tag{1.1}$$

векторное произведение

$$z_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}; \tag{1.2}$$

диадное произведение

$$z_{ij} = x_i y_j = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{bmatrix}; \tag{1.3}$$

линейная вектор-функция

$$y_i = b_{ij}x_j = \begin{bmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Из (1.4), в частности, следует равенство

$$x_i = \delta_{ij}x_j.$$

Повороты системы координат, при которых оси 1, 2, 3 приводятся в положение 1′, 2′, 3′, могут быть описаны с помощью направляющих косинусов $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$; при этом, например, α_{12} — угол между осями 1 и 2′. Вообще говоря, $a_{ij} \neq a_{ji}$. Известные соотношения между направляющими косинусами принимают тогда следующий вид:

$$a_{ij}a_{ik} = a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk} = \delta_{kj}. \quad (1.5)$$

При поворотах системы координат справедливы следующие формулы преобразования:

для векторов $x'_i = a_{ji}x_j$; $x_i = a_{ij}x'_j$; (1.6)

для тензоров второго ранга
$$T'_{ij} = a_{ki}a_{lj}T_{kl}, \quad T_{ij} = a_{ik}a_{jl}T'_{kl}, \quad (1.7)$$

а также *формула разложения*

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm} = \begin{bmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

1.3. Основы геометрии масс

1.3.1. Осевые и центробежные моменты инерции. Инерционные свойства твердого тела определяются совокупностью его шести моментов масс второго порядка.

Если взять какую-либо точку твердого тела в качестве начала декартовой системы координат (рис. 1.1), то для моментов масс второго порядка имеем выражения

$$\begin{aligned} A &= \int (x_2^2 + x_3^2)\,dm, & D &= \int x_2x_3\,dm, \\ B &= \int (x_3^2 + x_1^2)\,dm, & E &= \int x_3x_1\,dm, \\ C &= \int (x_1^2 + x_2^2)\,dm, & F &= \int x_1x_2\,dm. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При этом интеграл следует брать по всему объему тела. Величины A, B, C называются *моментами инерции относительно*

осей (а также осевыми моментами инерции и вращательными массами). В соответствии с определением они всегда положительны.

Величины D, E, F называются *центробежными моментами инерции* (или произведениями инерции и девиационными моментами инерции[1])). В отличие от осевых моментов инерции они могут принимать и отрицательные значения.

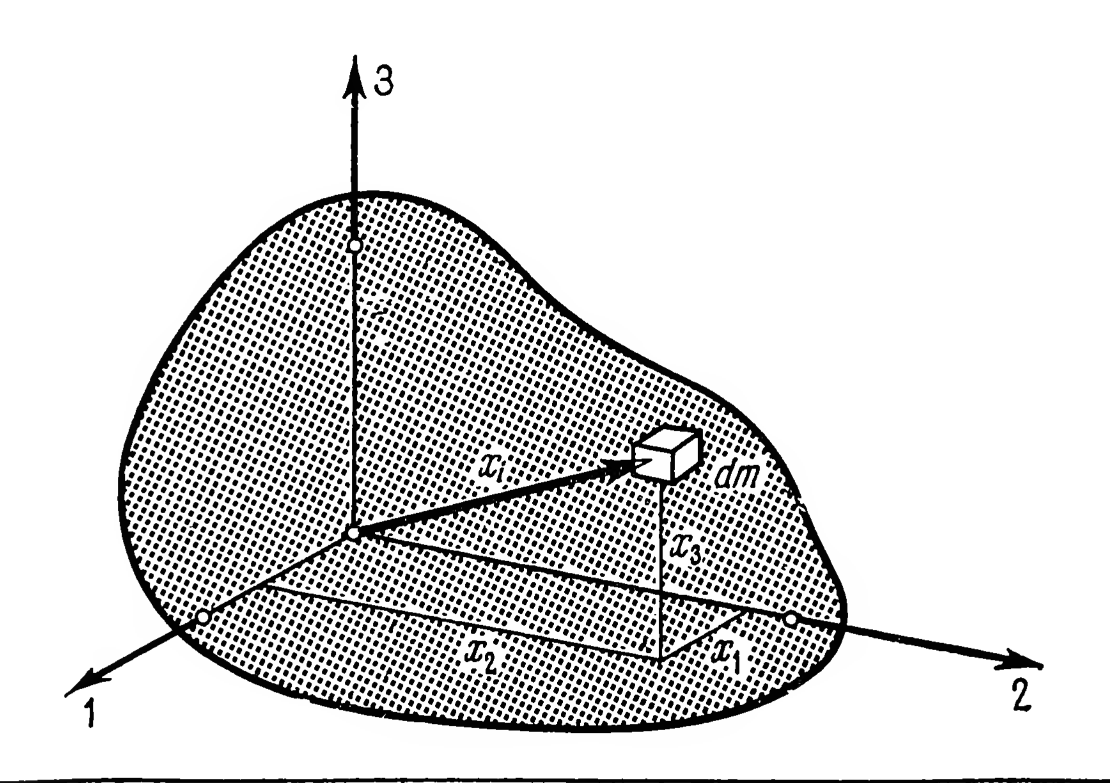


Рис. 1.1. К определению моментов масс.

Осевые моменты инерции представляют собой меру инерции твердого тела при вращательном движении (в названии «вращательная масса» это выражено более метко), тогда как центробежные моменты инерции можно рассматривать как меру неуравновешенности тела. Они характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей и для однородного тела обращаются в нуль, если все сечения тела, перпендикулярные этим плоскостям, будут симметричными фигурами.

Из (1.9) следуют неравенства

$$A+B\geqslant C,\quad B+C\geqslant A,\quad C+A\geqslant B. \tag{1.10}$$

Знаки равенства имеют место лишь в случае тела, выродившегося в плоскую, обладающую массой пластину, которая лежит в одной из координатных плоскостей.

Так как $(x_2-x_3)^2\geqslant 0$, т. е. $x_2^2+x_3^2\geqslant 2x_2x_3$ и т. п., из (1.9) следует, что

$$A\geqslant 2D,\quad B\geqslant 2E,\quad C\geqslant 2F. \tag{1.11}$$

[1]) Термины «вращательная масса» и «девиационный момент инерции» в русской литературе не употребляются. — *Прим ред.*

В данном случае знак равенства в каком-либо из этих выражений соответствует случаю, когда тело вырождается в пластину, образующую с координатными плоскостями угол 45°.

Неравенства (1.10) называются неравенствами треугольника, так как моментами инерции какого-либо тела могут быть только такие величины, которые, будучи изображены в виде отрезков, могут образовать плоский треугольник.

Моменты инерции A, B, C и (взятые со знаком минус) центробежные моменты инерции D, E, F являются элементами *тензора инерции*

$$\Theta_{ij}=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}, \qquad (1.12)$$

который относится к определенному центру O. Так как центробежные моменты расположены симметрично относительно главной диагонали, этот тензор является симметричным (здесь $\Theta_{11}=A$, $\Theta_{12}=-F$ и т. д.).

С помощью принятых в § 1.2 обозначений векторов и тензоров можно определения, данные равенствами (1.9) и (1.12), объединить следующим образом:

$$\Theta_{ij}=\int (x_k x_k \delta_{ij}-x_i x_j)dm. \qquad (1.13)$$

То, что при таком определении величины Θ_{ij} речь идет действительно о тензоре, требуется еще доказать, т. е. нужно убедиться, что при преобразованиях координат величины Θ_{ij} подчиняются формулам (1.7) преобразования тензоров. Это будет свидетельствовать о том, что совокупность величин Θ_{ij} характеризует физическое свойство тела, не зависящее от произвольного выбора системы отсчета. Но, конечно, элементы тензора инерции Θ_{ij} зависят от направления осей координат.

При повороте системы координат, учитывая, что $x'_i=a_{ji}x_j$, имеем следующее выражение для тензора инерции:

$$\Theta'_{ij}=\int (x'_k x'_k \delta'_{ij}-x'_i x'_j)\,dm=$$
$$=\int (a_{lk}a_{mk}x_l x_m \delta'_{ij}-a_{ki}a_{lj}x_k x_l)\,dm. \qquad (1.14)$$

Далее, с помощью соотношений

$$a_{lk}a_{mk}=\delta_{lm}, \quad \delta_{lm}x_l=x_m, \quad a_{ki}a_{lj}\delta_{kl}=\delta'_{ij}$$

можно (1.14) преобразовать к виду

$$\Theta'_{ij}=a_{ki}a_{lj}\int (x_m x_m \delta_{kl}-x_k x_l)\,dm,$$
$$\Theta'_{ij}=a_{ki}a_{lj}\Theta_{kl}. \qquad (1.15)$$

Это соответствует требуемому закону преобразования (1.7); следовательно, Θ_{ij} действительно является тензором.

1.3.2. Замена центра. Возьмем теперь за центр вместо точки O новую точку — P, положение которой задано вектором r_i (рис. 1.2).

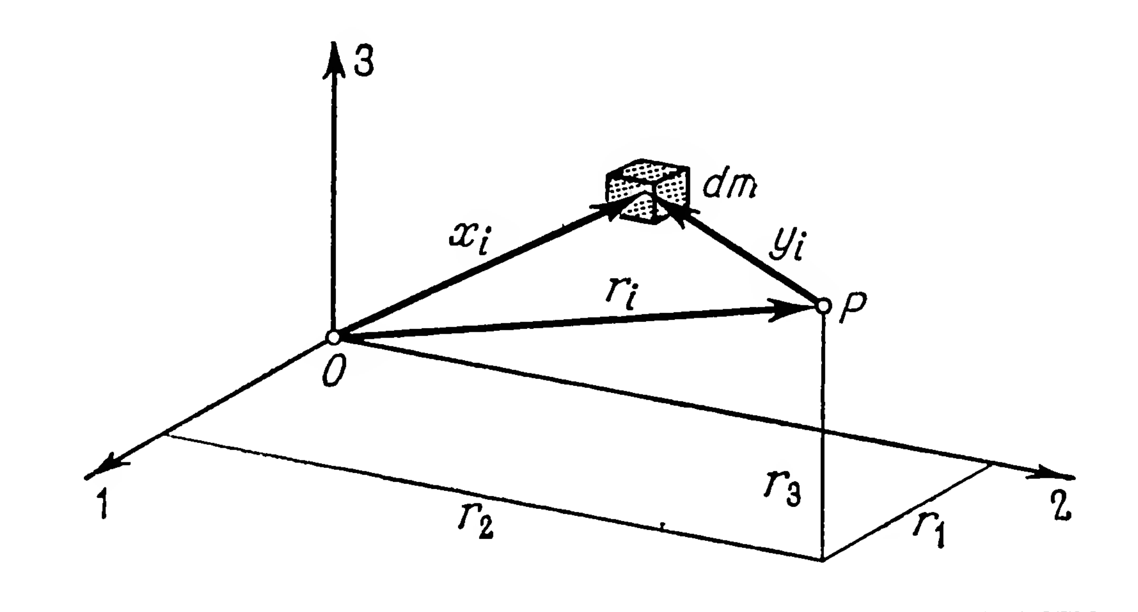


Рис. 1.2. Переход от центра O к центру P.

Учитывая, что $x_i = r_i + y_i$, из (1.13) получаем

$$\Theta_{ij} = \int [(r_k + y_k)(r_k + y_k)\delta_{ij} - (r_i + y_i)(r_j + y_j)]\, dm,$$

или

$$\Theta_{ij} = \int (y_k y_k \delta_{ij} - y_i y_j)\, dm + m(r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j) + \\ + 2\delta_{ij} r_k \int y_k\, dm - r_i \int y_j\, dm - r_j \int y_i\, dm. \qquad (1.16)$$

Первое слагаемое в правой части равно тензору инерции Θ_{ij}^P для центра P. Три последних слагаемых содержат моменты масс первого порядка относительно точки P. Эти моменты могут быть выражены через радиус-вектор y_i^S центра масс:

$$\int y_i\, dm = m y_i^S.$$

Они обращаются в нуль, если за начало радиусов-векторов точек тела выбран центр масс. Поэтому в случае $P \equiv S$ получается особенно простое выражение для тензора инерции:

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ij}^S + m(r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j). \qquad (1.17)$$

Это соотношение принято называть *теоремой Гюйгенса — Штейнера*. Теорема гласит следующее: осевые и центробежные моменты инерции для данной произвольным образом выбранной системы координат складываются из двух частей, а именно из моментов инерции для системы координат, параллельно смещенной

так, что ее начало находится в центре масс, и из тех слагаемых, которые получатся, если всю массу m тела мысленно сосредоточить в центре масс.

Ввиду большого практического значения тензора инерции (1.17) приведем также выражения для его элементов. Если обозначить через a, b, c расстояния центра масс от осей координат 1, 2, 3:

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2, \quad b^2 = r_3^2 + r_1^2, \quad c^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

то получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A &= A^S + ma^2, & D &= D^S + mr_2r_3, \\ B &= B^S + mb^2, & E &= E^S + mr_3r_1, \\ C &= C^S + mc^2, & F &= F^S + mr_1r_2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы.

1. Момент инерции твердого тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

2. Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, имеет минимальное значение по сравнению с моментами инерции относительно параллельных осей, не проходящих через центр масс.

3. Центробежные моменты инерции тела не изменятся, если начало координат перенести из центра масс в другую точку, лежащую на оси координат, проходящей через точку S. Если новое начало координат лежит в координатной плоскости, проходящей через центр масс, то изменяется лишь один из центробежных моментов инерции.

1.3.3. Поворот осей. Прежде всего вычислим момент инерции относительно какой-либо оси, которая проходит через начало координат O и образует с осями 1, 2, 3 углы, косинусы которых обозначены через a_1, a_2, a_3 соответственно. Направляющие косинусы одновременно являются координатами единичного вектора, направленного по указанной оси: $e_i^P = a_i = (a_1, a_2, a_3)$.

Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из материальной точки dm на эту ось, а длина перпендикуляра равна p (рис. 1.3). Тогда для момента инерции относительно оси OP получаем

$$\Theta = \int p^2 \, dm. \tag{1.19}$$

Из рис. 1.3 следует, что

$$p^2 = x^2 - \overline{OP}^2 = x_i x_i - (x_i a_i)^2,$$

т. е. в координатах

$$p^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3)^2 =$$
$$= a_1^2 (x_2^2 + x_3^2) + a_2^2 (x_3^2 + x_1^2) + a_3^2 (x_1^2 + x_2^2) -$$
$$- 2a_1 a_2 x_1 x_2 - 2a_2 a_3 x_2 x_3 - 2a_3 a_1 x_3 x_1.$$

Подставляя это в (1.19) и учитывая (1.9), получаем

$$\Theta = Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2 - 2Da_2 a_3 - 2Ea_3 a_1 - 2Fa_1 a_2. \tag{1.20}$$

Если известны осевые моменты инерции A, B, C и центробежные моменты инерции D, E, F для исходных осей координат, то

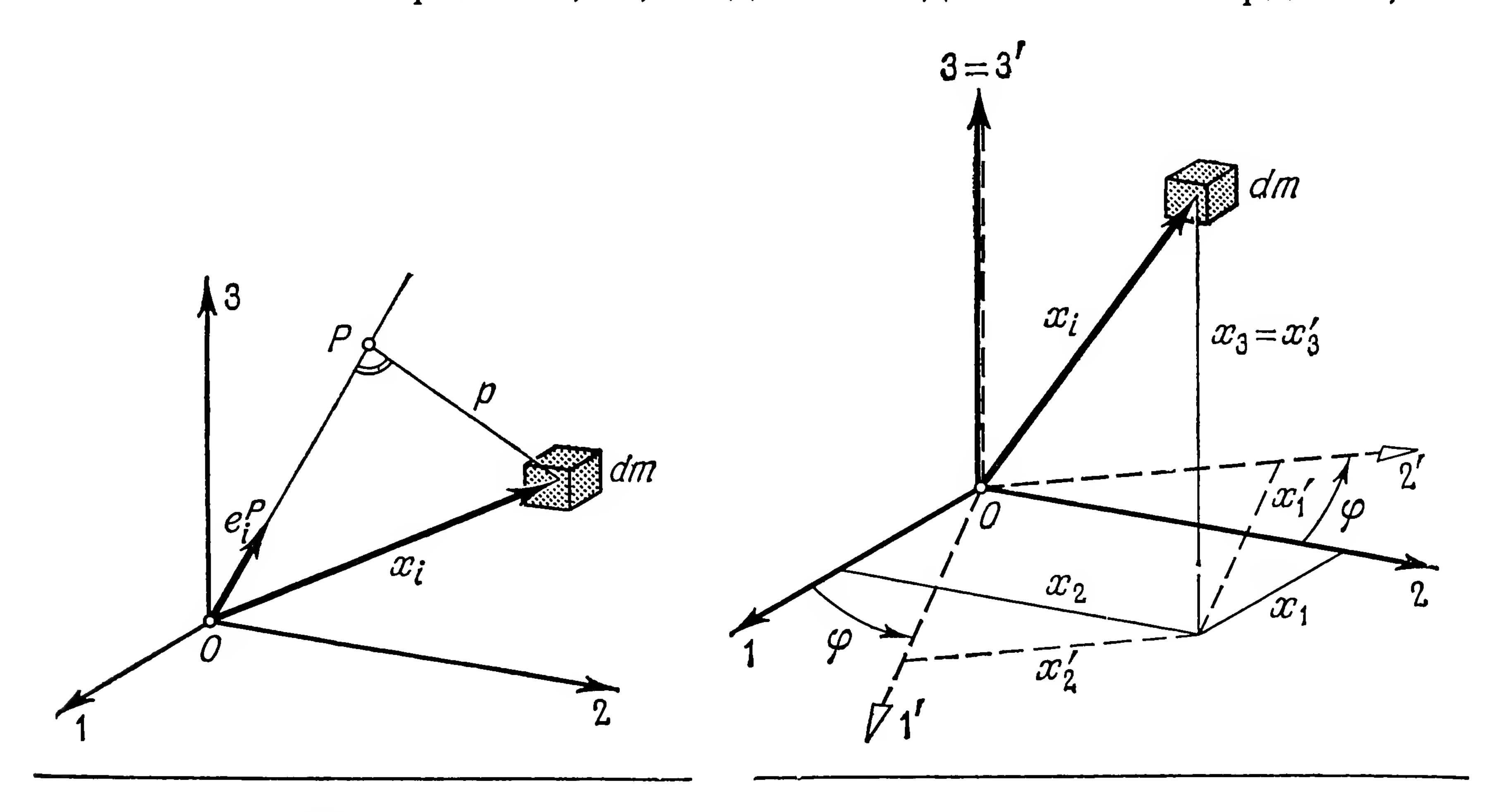


Рис. 1.3. К вычислению момента инерции относительно оси OP.

Рис. 1.4. Поворот системы координат на угол φ.

с помощью формулы (1.20) можно вычислить момент инерции относительно любой оси, направление которой задано единичным вектором $e_i^P = a_i$. Учитывая (1.12), можно выражение (1.20) записать в виде

$$\Theta = \Theta_{ij} e_j^P e_i^P = \Theta_{ij} a_j a_i. \tag{1.21}$$

Правая часть выражения (1.20) или (1.21) представляет собой квадратичную форму от направляющих косинусов. Она определенно-положительна, так как, согласно определению, (1.19) может принимать только положительные значения. В п. 1.3.4 будет предпринято исследование, которое дополнительно выяснит некоторые свойства моментов инерции твердого тела. Рассмотрим сначала более простой частный случай, который позволит судить, каким образом меняются центробежные моменты инерции при повороте координатного трехгранника вокруг одной из его осей.

Положим, что система координат 1, 2, 3 в результате поворота на угол φ вокруг оси 3 приведена в положение 1', 2', 3' (рис. 1.4). Этот поворот может быть описан уравнением

$$x'_i = a_{ji} x_j, \quad \text{где} \quad a_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда для тензора инерции получим

$$\Theta'_{ij} = \int (x'_k x'_k \delta'_{ij} - x'_i x'_j)\, dm = a_{ki} a_{lj} \Theta_{kl};$$

элементами этого тензора будут

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi - 2F\sin\varphi\cos\varphi, \\ B' &= A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi + 2F\sin\varphi\cos\varphi, \\ C' &= C, \\ D' &= D\cos\varphi - E\sin\varphi, \\ E' &= D\sin\varphi + E\cos\varphi, \\ F' &= (A-B)\sin\varphi\cos\varphi + F(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Первые три выражения (1.22) могут быть выведены как частные случаи из более общей формулы (1 20). Зависимость новых, отмеченных штрихом осевых и центробежных моментов инерции от угла φ может быть наглядно представлена с помощью круговой диаграммы. Введем с этой целью обозначения

$$F_{\max} = \sqrt{F^2 + {}^1/_4 (A-B)^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_F = (A-B)/(2F)$$

и преобразуем (1.22) к виду

$$\begin{aligned} A' &= {}^1/_2 (A+B) - F_{\max}\sin(2\varphi - \varphi_F), \\ B' &= {}^1/_2 (A+B) + F_{\max}\sin(2\varphi - \varphi_F), \\ F' &= F_{\max}\cos(2\varphi - \varphi_F). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Отсюда может быть получено построение, изображенное на рис. 1.5: следует отложить на оси абсцисс декартовой системы координат отрезок $OM = {}^1/_2(A+B)$, из центра M описать окружность радиусом $F_{\max}$ и от радиуса, проведенного под углом φ_F, отложить в положительном направлении угол 2φ. С помощью построенного таким образом диаметра PQ находятся искомые величины: абсциссы точек P и Q соответствуют величинам A' и B', ордината точки P является мерой величины F'. Такое изображение аналогично представлению плоского напряженного состояния с помощью так называемого *круга Мора*. Здесь нормальным напряжениям соответствуют осевые моменты инерции, а тангенциальным — центробежные моменты инерции.

Из рис. 1.5 следует, что в интервале $0 < \varphi < \pi$ каждая из величин A' и B' достигает один раз максимального и один раз минимального значения. При минимуме одной из этих величин другая имеет максимум. Когда моменты инерции A' и B' имеют экстремум, центробежный момент инерции F' обращается в нуль. При отклонении осей на 45° от положения, в котором достигаются экстремальные значения величин A' и B', величина F' принимает экстремальное значение $F' = \pm F_{max}$.

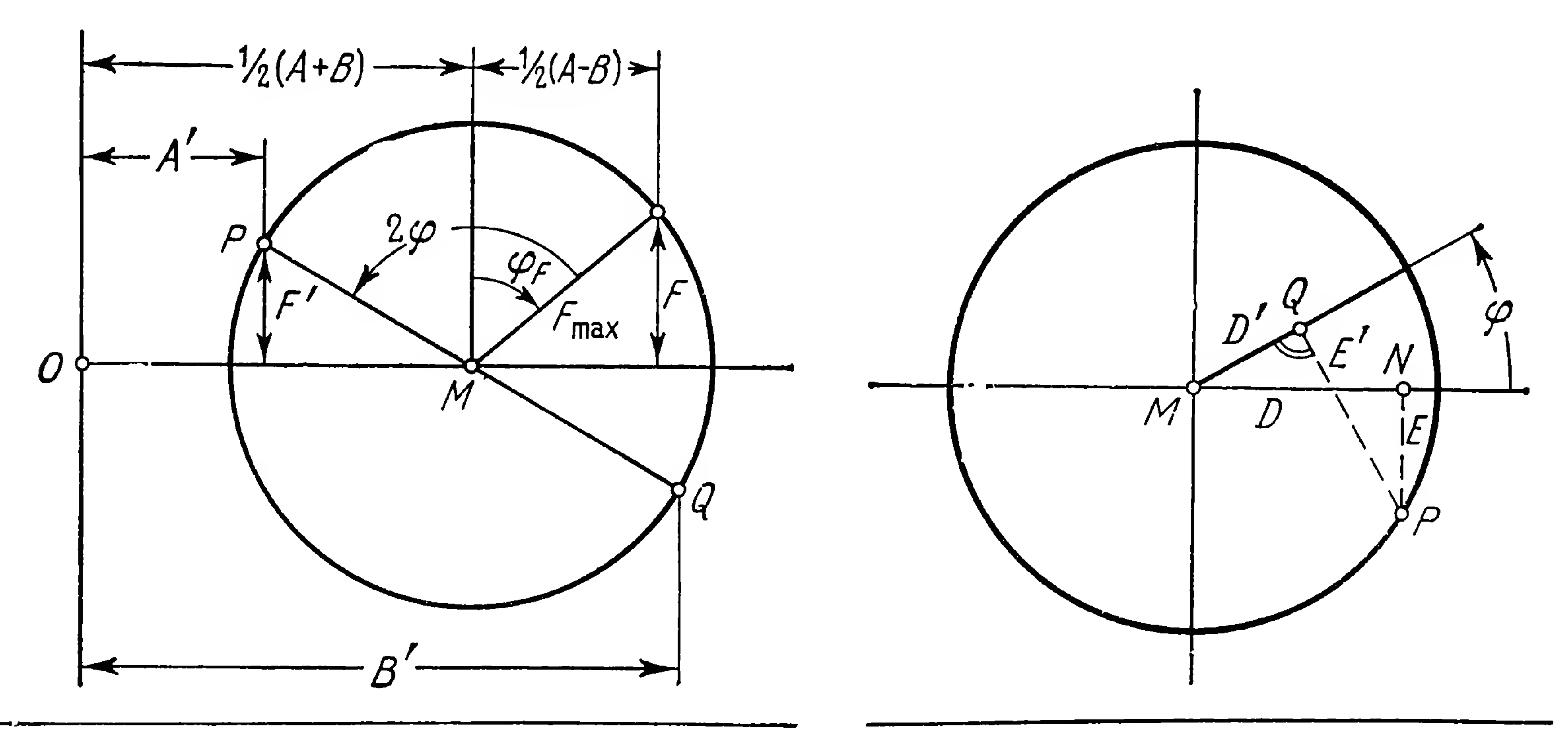


Рис. 1.5. Круговая диаграмма для определения моментов инерции при повороте системы координат на угол φ.

Рис. 1.6. Круговая диаграмма для определения центробежных моментов инерции D' и E'.

Для двух центробежных моментов инерции D' и E' также может быть построена круговая диаграмма (рис. 1.6). Для этого откладывают на осях координат отрезки $MN = D$ и $NP = E$. Опустив из точки P перпендикуляр на прямую, образующую с MN угол φ, получают точку Q. Оказывается, что $MQ = D'$ и $QP = E'$. Из диаграммы непосредственно видно, что выполняются соотношения (1.22) между D', E', с одной стороны, и D, E — с другой. При любом значении φ точка Q может лежать только внутри круга. Поэтому в интервале $0 < \varphi < 2\pi$ величины D' и E' принимают один раз максимальное значение $+\sqrt{D^2+E^2}$ и один раз минимальное $-\sqrt{D^2+E^2}$. Когда D' достигает экстремального значения, E' обращается в нуль, и обратно.

1.3.4. Эллипсоид инерции и главные оси инерции. Для дальнейшего исследования квадратичной формы (1.20) или (1.21) введем два новых понятия. Назовем *радиусом инерции* твердого тела относительно данной оси величину k, определяемую соотношением

$$\Theta = \int p^2\, dm = mk^2 = m/\rho^2. \tag{1.24}$$

Величину $\rho = 1/k$ будем называть *модулем инерции.*

Существует наглядное толкование понятия радиуса инерции: для однородного тела это среднеквадратичное расстояний элементарных частиц тела от рассматриваемой оси. Если распределить всю массу тела по поверхности кругового цилиндра радиуса k, то получится тело, имеющее относительно оси цилиндра тот же момент инерции, что и исходное тело.

Наряду с квадратичной формой (1.21), соответствующей тензору Θ_{ij}, введем в рассмотрение вектор

$$y_i = \rho e_i^P = \rho a_i.$$

Этот вектор направлен по оси OP (рис. 1.3); его длина равна модулю инерции ρ. Будем рассматривать величину ρ как некоторую длину, хотя, согласно определению (1.24), размерность ее обратна длине. Из (1.21) с учетом (1.24) получаем

$$\Theta = m/\rho^2 = \Theta_{ij} e_i^P e_j^P = (1/\rho^2)\, \Theta_{ij} y_i y_j; \quad \Theta_{ij} y_i y_j = m, \tag{1.25}$$

или — в развернутой записи —

$$A y_1^2 + B y_2^2 + C y_3^2 - 2D y_2 y_3 - 2E y_3 y_1 - 2F y_1 y_2 = m. \tag{1.26}$$

Это означает, что при изменении направления вектора y_i квадратичная форма, стоящая в левой части, сохраняет постоянную величину. Из аналитической геометрии известно, что в таком случае конец вектора y_i остается лежащим на некоторой поверхности второго порядка. Так как модуль вектора y_i равен ρ, а величина ρ для реальных тел никогда не обращается в бесконечность, ибо это соответствовало бы обращению в нуль момента инерции, эта поверхность не имеет бесконечно удаленных точек. Следовательно, она может быть только эллипсоидом (или сферой). Этот эллипсоид является характеристической поверхностью тензора Θ_{ij} и называется *эллипсоидом инерции* (а также *эллипсоидом Коши* или *эллипсоидом Пуансо*).

Если известен эллипсоид инерции для определенной точки тела, то можно найти величину ρ, а тем самым и момент инерции относительно любой оси, проходящей через эту точку. Нужно лишь иметь в виду, что длина радиуса-вектора, проведенного из центра эллипсоида к его поверхности, равняется ρ. Из свойств эллипсоида следует:

Эллипсоид инерции твердого тела всегда имеет три взаимно перпендикулярные главные оси; они называются главными осями инерции (коротко — главными осями) тела. Соответствующие главным осям моменты инерции называются главными моментами инерции.

Наименьшей главной полуоси эллипсоида инерции (ρ_{min}) соответствует наибольший главный момент инерции (Θ_{max}), и, наоборот, наименьший момент инерции соответствует наибольшей полуоси (ρ_{max}) эллипсоида.

Уравнение поверхности второго порядка принимает особенно простой вид в том случае, когда в качестве осей координат принимаются главные оси поверхности. С помощью приведения к главным осям можно квадратичную форму (1.26) привести к сумме квадратов:

$$A'y_1^2 + B'y_2^2 + C'y_3^2 = m. \qquad (1.27)$$

Введя обозначения

$$A' = m/\rho_1^2, \quad B' = m/\rho_2^2, \quad C' = m/\rho_3^2,$$

приведем выражение (1.27) к виду

$$(y_1/\rho_1)^2 + (y_2/\rho_2)^2 + (y_3/\rho_3)^2 = 1. \qquad (1.28)$$

Это каноническое уравнение эллипсоида инерции с полуосями ρ_1, ρ_2 и ρ_3. Величины A', B' и C' являются главными моментами инерции. Если $A' > B' > C'$, то $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Не каждый эллипсоид может служить эллипсоидом инерции: в силу неравенств (1.10) полуоси эллипсоида инерции должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} > \frac{1}{\rho_3^2}, \quad \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} > \frac{1}{\rho_1^2}, \quad \frac{1}{\rho_3^2} + \frac{1}{\rho_1^2} > \frac{1}{\rho_2^2}.$$

Из (1.27) следует, что при переходе к главным осям центробежные моменты инерции обращаются в нуль. Это следует также из результатов, полученных в п. 1.3.3. Если в качестве осей координат взять оси, полученные поворотом главных осей вокруг одной из них, то оказывается, что для всех положений, при которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений, центробежные моменты инерции обращаются в нуль. Но как раз эти направления осей и являются главными. Следовательно:

Центробежные моменты инерции равны нулю, если в качестве осей координат выбраны главные оси инерции.

И наоборот:

Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси координат совпадают с главными осями инерции.

Итак, главные оси могут быть определены как оси, для которых центробежные моменты инерции обращаются в нуль. Наряду с этим имеется и динамическое определение главных осей, которое будет приведено в п. 1.5.2.

Если два главных осевых момента инерции равны между собой, то эллипсоид инерции обращается в эллипсоид вращения. Тогда все оси, лежащие в экваториальной плоскости, являются главными и моменты инерции относительно них одинаковы.

Проще всего можно убедиться в этом, если (1.27) переписать в виде

$$\Theta = A'a_1^2 + B'a_2^2 + C'a_3^2. \qquad (1.29)$$

При $A' = B'$ имеем

$$\Theta = A'(a_1^2 + a_2^2) + C'a_3^2.$$

Для оси, которая лежит в экваториальной плоскости, $a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 = 1$, откуда $\Theta = A'$.

Если $A' = B' = C'$, то из (1.29) сразу получаем $\Theta = A'$, т. е. эллипсоид инерции превращается в сферу и любая его ось является главной.

Главные оси и главные моменты инерции могут быть определены путем отыскания экстремальных значений величины Θ при заданных элементах тензора Θ_{ij}. При этом направляющие косинусы должны рассматриваться как переменные величины. Они удовлетворяют условию

$$f(a_i) = 1 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0.$$

Чтобы получить экстремальные значения Θ при наличии этого дополнительного условия, следует найти экстремальные значения функции

$$G(a_i) = \Theta(a_i) + \lambda f(a_i) = \Theta_{ij} a_j a_i + \lambda(1 - \delta_{ij} a_j a_i).$$

Они получаются из характеристического уравнения

$$\partial G/\partial a_i = 2(\Theta_{ij} - \lambda\delta_{ij})\, a_j = 0. \tag{1.30}$$

Так как эта система уравнений, линейных и однородных относительно направляющих косинусов, должна иметь нетривиальное решение, ее детерминант равен нулю:

$$|\Theta_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{1.31}$$

или после вычислений

$$\lambda^3 - \lambda^2(A + B + C) + \lambda(AB + BC + CA - D^2 - E^2 - F^2) - $$
$$- (ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2) = 0.$$

Корни этого уравнения являются собственными значениями тензора Θ_{ij}. Так как симметричный тензор имеет только действительные собственные значения, эти корни являются действительными. Кроме того, они положительны, так как λ имеет значение момента инерции. В этом можно простейшим образом убедиться из (1.30), если это выражение умножить скалярно на a_i. Тогда сразу находим, что

$$2(\Theta - \lambda) = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \Theta.$$

В данном случае в качестве решения системы (1.31) непосредственно получаются главные моменты инерции

$$\lambda_1 = \lambda_A = A', \quad \lambda_2 = \lambda_B = B', \quad \lambda_3 = \lambda_C = C',$$

Направления главных осей инерции, соответствующих этим главным моментам инерции, определяются при подстановке собственных значений λ в (1.30). Получим три векторных равенства

$$\begin{aligned}(\Theta_{ij} - A'\delta_{ij})\, a_j^A &= 0,\\ (\Theta_{ij} - B'\delta_{ij})\, a_j^B &= 0,\\ (\Theta_{ij} - C'\delta_{ij})\, a_j^C &= 0,\end{aligned} \tag{1.32}$$

из которых могут быть определены три единичных вектора a_i^A, a_i^B, a_i^C, направленных по соответствующим главным осям инерции.

Главные оси взаимно перпендикулярны, если все главные моменты инерции A', B', C' различны. Это можно показать следующим образом. Умножим первое равенство (1.32) скалярно на a_i^B, второе на a_i^A. Вычитая равенства, получаем

$$\Theta_{ij} a_j^A a_i^B - \Theta_{ij} a_j^B a_i^A - A' a_i^A a_i^B + B' a_i^B a_i^A = 0.$$

В силу симметричности тензора инерции первые два члена взаимно уничтожаются; остается

$$(B' - A')\, a_i^A a_i^B = 0.$$

Ввиду предположения $B' \neq A'$ это соотношение может выполняться лишь в случае, когда $a_i^A a_i^B = 0$ и, следовательно, $a_i^A \perp a_i^B$. Так же обстоит дело и с другими парами осей.

Для того чтобы получить представление об эллипсоиде инерции, соответствующем данному телу, рассмотрим в качестве простого примера изображенный на рис. 1.7 прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, c. Произведя интегрирование согласно (1.9), получим

$$A = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{m}{12}(c^2 + a^2), \quad C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

Отсюда модули инерции и, следовательно, длины главных полуосей соответствующего эллипсоида инерции равны

$$\rho_1 = \sqrt{12/(b^2 + c^2)}, \quad \rho_2 = \sqrt{12/(c^2 + a^2)}, \quad \rho_3 = \sqrt{12/(a^2 + b^2)}.$$

Если, например, длины ребер относятся как 1 : 2 : 4 (кирпич), то модули инерции относятся как 1 : 1,08 : 2. Наиболее длинному ребру соответствует наибольшая полуось эллипсоида инерции и наименьший главный момент инерции. Если сжать параллелепипед, превратив его в одномерный стержень ($a \to 0$, $b \to 0$), то

$$\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{12/c^2}; \quad \rho_3 \to \infty.$$

В этом особом случае эллипсоид инерции вырождается в круговой цилиндр, простирающийся в бесконечность вдоль оси 3 и имеющий

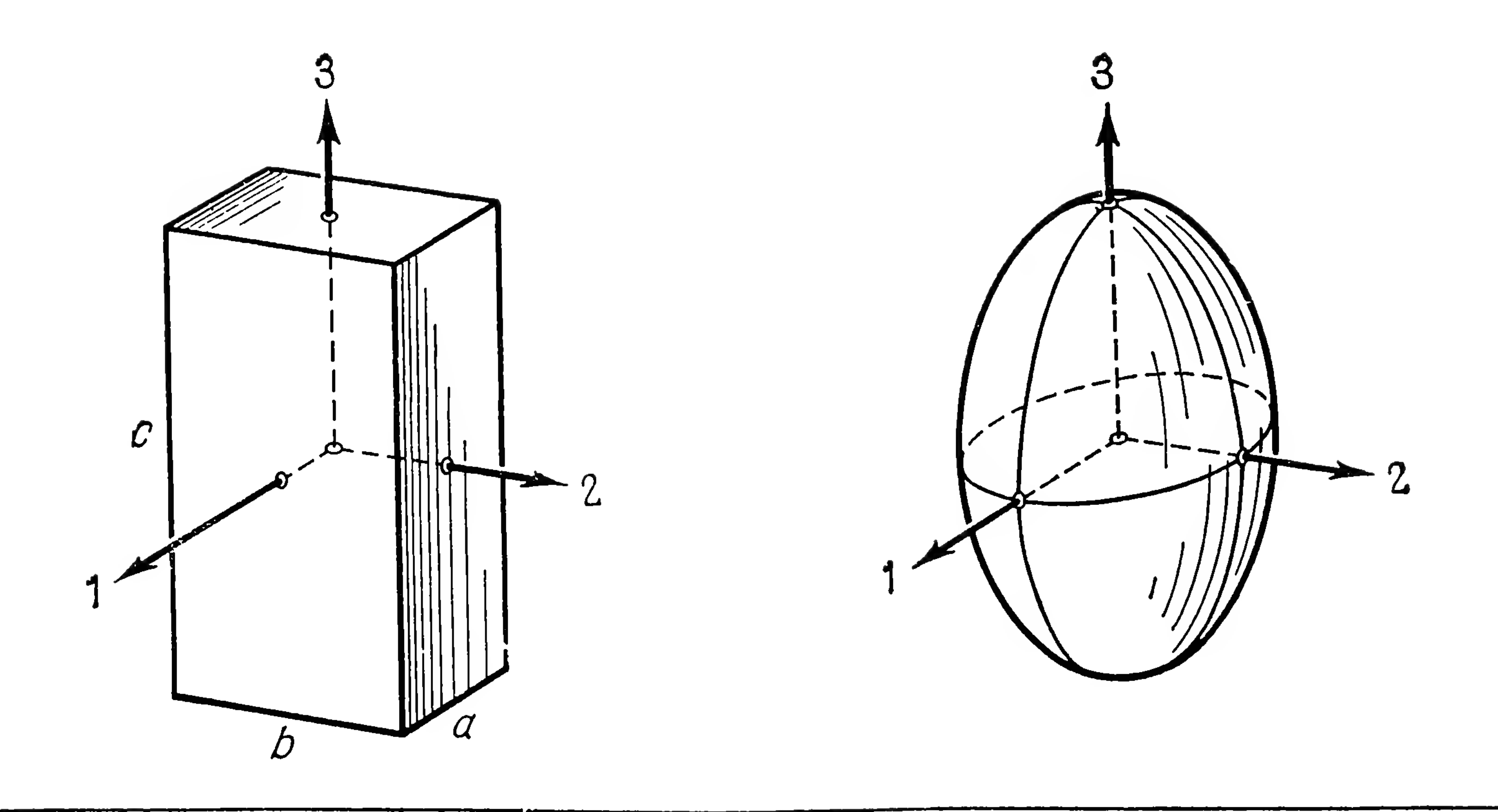


Рис. 1.7. Прямоугольный параллелепипед и его эллипсоид инерции.

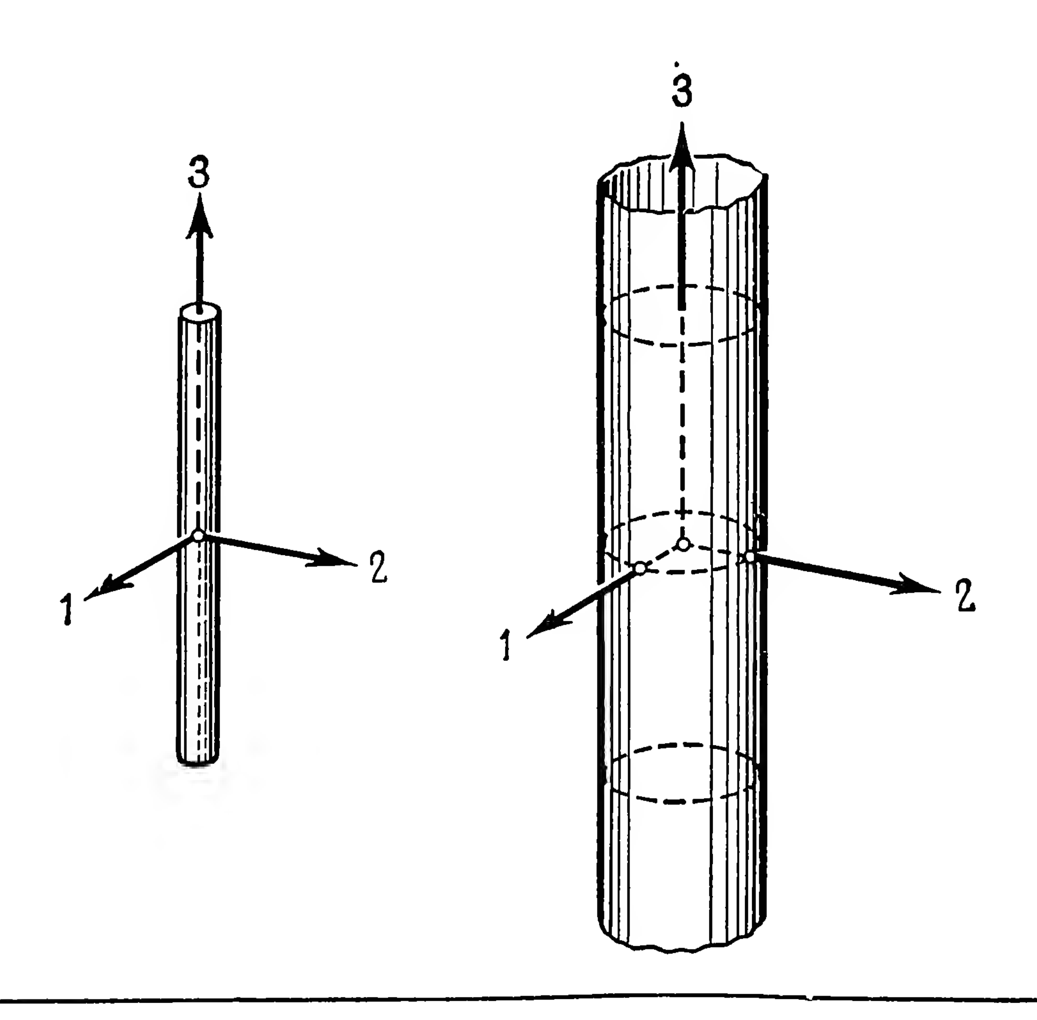


Рис. 1.8. Стержень и его (вырожденный) эллипсоид инерции.

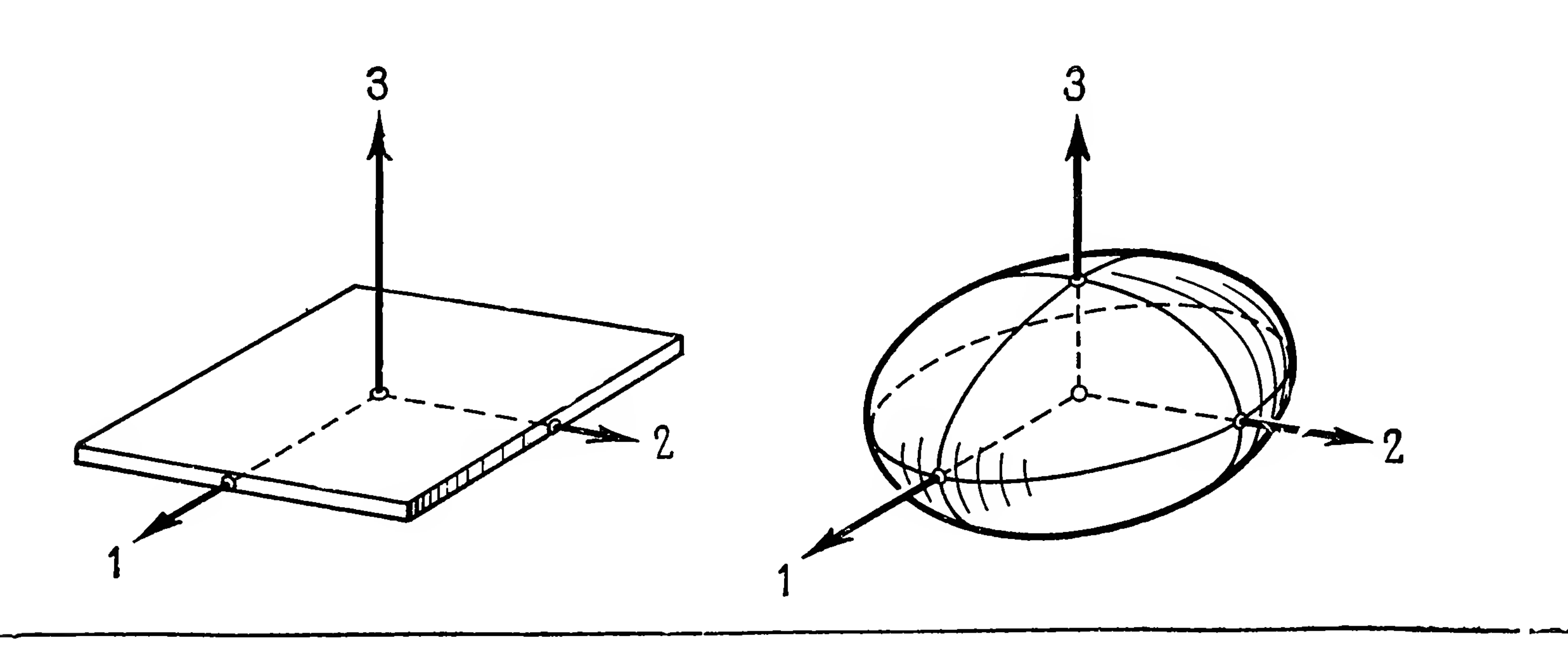


Рис 1.9. Квадратная пластина и ее эллипсоид инерции.

радиус ρ_1 (рис. 1.8). В случае квадратной плоской пластины, которая получается из параллелепипеда при $a = b$ и $c = 0$, модули инерции относятся как $1 : 1 : 1/\sqrt{2}$ (рис. 1.9). Легко показать, что эллипсоид инерции никогда не может стать совершенно плоским, т. е. превратиться в плоскую фигуру. Ведь в этом случае длина одной из его главных полуосей обратилась бы в нуль, что соответствовало бы бесконечно большому моменту инерции.

1.3.5. Эллипсоиды инерции, построенные для различных центров. Рассмотренные до сих пор закономерности относятся к эллипсоидам инерции, построенным для одного фиксированного в теле центра. Интересно выяснить, как будут отличаться между собой эллипсоиды, относящиеся к различным центрам. При таком сравнении лучше всего взять в качестве исходного эллипсоид для центра масс тела, так называемый *центральный эллипсоид инерции*, который играет особую роль.

Если в формулах (1.18), справедливых для параллельного переноса осей, под величинами A^s, B^s, C^s подразумевать моменты инерции относительно главных осей центрального эллипсоида инерции, то следует положить $D^s = E^s = F^s = 0$. Можно убедиться, что для системы координат, параллельно сдвинутой относительно осей этого эллипсоида, центробежные моменты инерции D, E, F не обязательно должны обратиться в нуль. Следовательно, для различных центров главные оси, вообще говоря, не параллельны между собой. Однако справедливо следующее утверждение:

Главные оси для всех точек, лежащих на главных центральных осях, параллельны.

В самом деле, для точек главных центральных осей всегда обращаются в нуль две из компонент r_1, r_2, r_3 вектора r_i, определяющего смещение центра. Поэтому $D = E = F = 0$.

Справедливо и обратное утверждение:

Если главные оси для двух центров O и P параллельны и линия OP, соединяющая эти точки, сама является главной осью, то линия OP проходит через центр масс и является главной центральной осью.

Для доказательства следует в (1.18) один раз положить $D = E = F = 0$, а другой $D' = E' = F' = 0$ и произвести вычитание соответствующих равенств. Тогда мы получим

$$r_2 r_3 - r_2' r_3' = 0, \quad r_3 r_1 - r_3' r_1' = 0, \quad r_1 r_2 - r_1' r_2' = 0. \qquad (1.33)$$

Если линию OP взять в качестве оси 3 (или 3′) (рис. 1.10), то

$$r_1' = r_1, \quad r_2' = r_2, \quad r_3' = r_3 + r_0.$$

Но в таком случае равенства (1.33) могут выполняться лишь при условии $r_1 = r_1' = r_2 = r_2' = 0$. Следовательно, центр масс должен лежать на оси 3, которая, таким образом, является главной центральной.

Далее:

Для центров, лежащих на одной из главных центральных плоскостей, одна из главных осей всегда остается перпендикулярной этой плоскости.

Пусть, например, $r_3 = 0$, т. е. новый центр O лежит в главной центральной плоскости 1-2 (рис. 1.11). Тогда из (1.18) сразу следует, что $D' = E' = 0$. Теперь можно показать, что при повороте осей $1'$, $2'$, $3'$ (получившихся в результате параллельного переноса осей 1, 2, 3) на определенный угол φ вокруг оси $3'$ можно добиться выполнения равенств $D'' = E'' = F'' = 0$. Тогда все оси

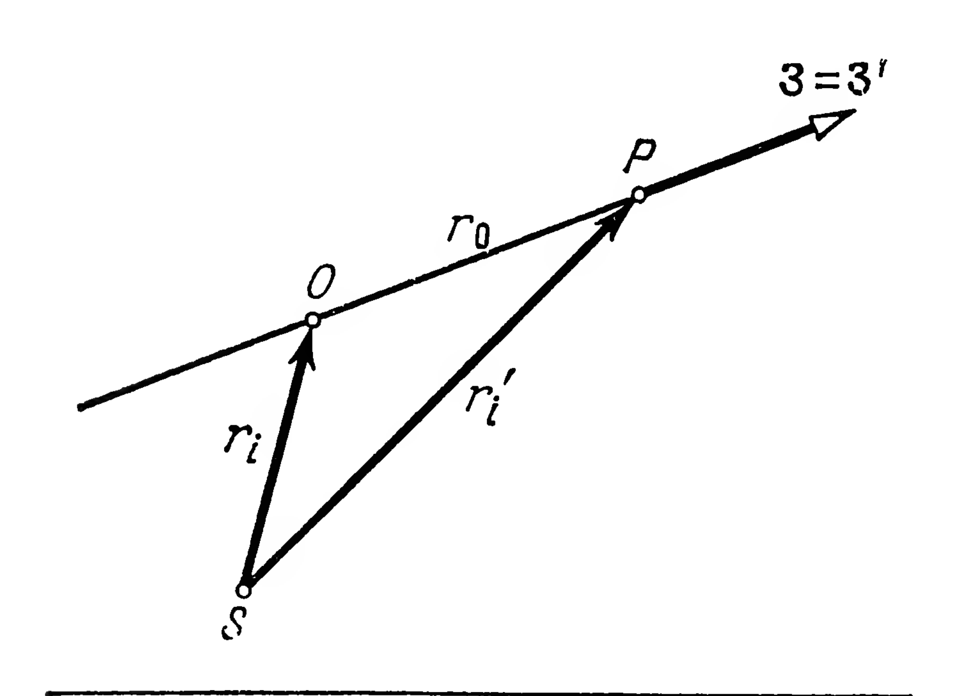


Рис. 1.10. К нахождению главных осей инерции при переносе начала координат в точку P.

Рис. 1.11. Главные оси инерции для точки O, лежащей в главной центральной плоскости.

$1''$, $2''$, $3''$ будут главными. Действительно, из (1.22) сразу следует, что если $D' = E' = 0$, то и $D'' = E'' = 0$. Кроме того, можно добиться выполнения равенства $F'' = 0$, если угол поворота φ удовлетворяет вытекающему из (1.22/6) равенству

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2F'/(B' - A'),$$

которое с учетом (1.18) может быть приведено к виду

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2mr_1r_2/[B^S - A^S + m(r_1^2 - r_2^2)].$$

Отсюда может быть определен угол поворота новых главных осей. Кроме того, из предыдущего при $r \to \infty$ и $r_1 \neq r_2$ вытекает приближенное равенство

$$\operatorname{tg} 2\varphi \approx 2r_1r_2/(r_1^2 - r_2^2) = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Следовательно, в этом случае $\varphi = \alpha$.

Приведем без доказательства еще одно утверждение:

Если точка P лежит на оси, являющейся главной для центра O, и последний не совпадает с центром масс, то всегда хотя бы одна главная ось для P параллельна одной из главных осей для O.

1.3.6. Классификация гироскопов и ее графическое представление. По соотношению между главными моментами инерции тела, т. е. по форме эллипсоида инерции, гироскопы классифицируются следующим образом (при этом главные моменты инерции обозначены A, B, C).

1) Тело, для которого $A = B = C$, называется *шаровым гироскопом.* Его эллипсоид инерции — сфера, но форма тела не обязательно должна быть сферической. Так, однородный куб или тетраэдр по отношению к своему центру масс — шаровой гироскоп.

2) Если две из величин A, B, C равны между собой, то эллипсоид инерции является телом вращения. В этом случае тело носит название *симметричного гироскопа.* Все однородные тела вращения по отношению к центру, лежащему на оси вращения, являются симметричными гироскопами. Ось симметрии называется также осью фигуры.

3) Если все три величины A, B, C различны, то говорят о *несимметричном гироскопе.* Соответствующий эллипсоид инерции имеет различные оси.

У шарового гироскопа все оси, проходящие через центр, являются равноправными главными осями. У симметричного гироскопа равноправны все оси, лежащие в экваториальной плоскости, т. е. перпендикулярные оси симметрии или оси фигуры. Далее, среди симметричных гироскопов различают следующие:

2a) *вытянутый гироскоп* — для него $A = B > C$ (стержень, направленный вдоль оси 3);

2b) *сплюснутый гироскоп*, для которого, например, $A = B < C$ (симметричный диск, лежащий в плоскости 1-2).

Для несимметричного гироскопа возможны аналогичные соотношения. Если $A > B > C$, то имеем гироскоп

3a) *с короткой осью* 1 (это соответствует сплюснутому по оси 1 гироскопу),

3b) *со средней осью 2,*

3c) *с длинной осью* 3.

Характеристику различных типов гироскопов можно представить графически описанными ниже способами.

1) Изображение главных моментов A, B, C в виде сторон плоского треугольника, как показано на рис. 1.12. При постоянном A возможные вершины треугольника, образованного сторонами A, B, C, покрывают затененную полуплоскость.

2) Изображение в плоскости переменных $(B/A,\ C/A)$. В силу неравенств (1.10) изображающие точки для различных возможных типов гироскопов покрывают в данном случае затененную полуполосу на рис. 1.13.

3) Представление в виде *треугольника формы*, который получается следующим образом: величины A, B, C откладываются в виде отрезков по осям декартовой системы координат (рис. 1.14). Тогда любой возможный эллипсоид инерции будет

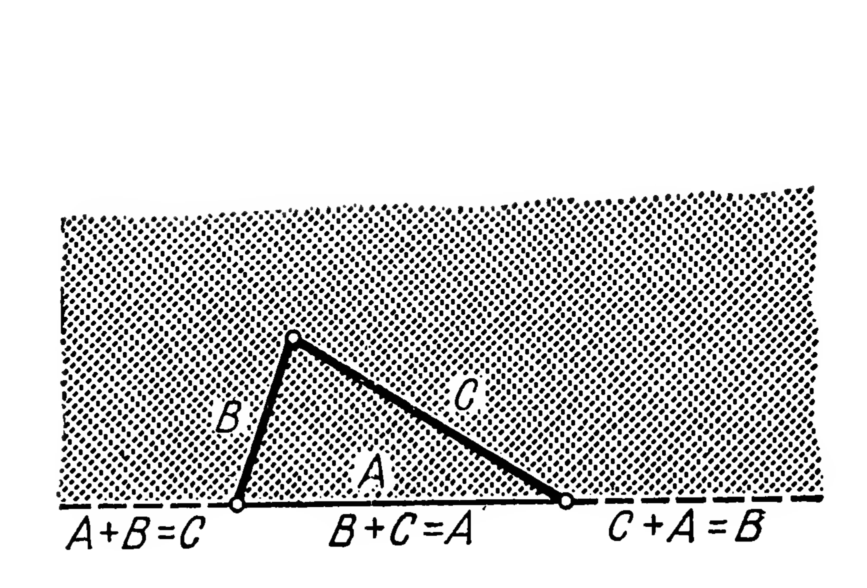


Рис. 1.12. Графическое представление классификации гироскопов; главные моменты инерции изображены в виде сторон плоского треугольника.

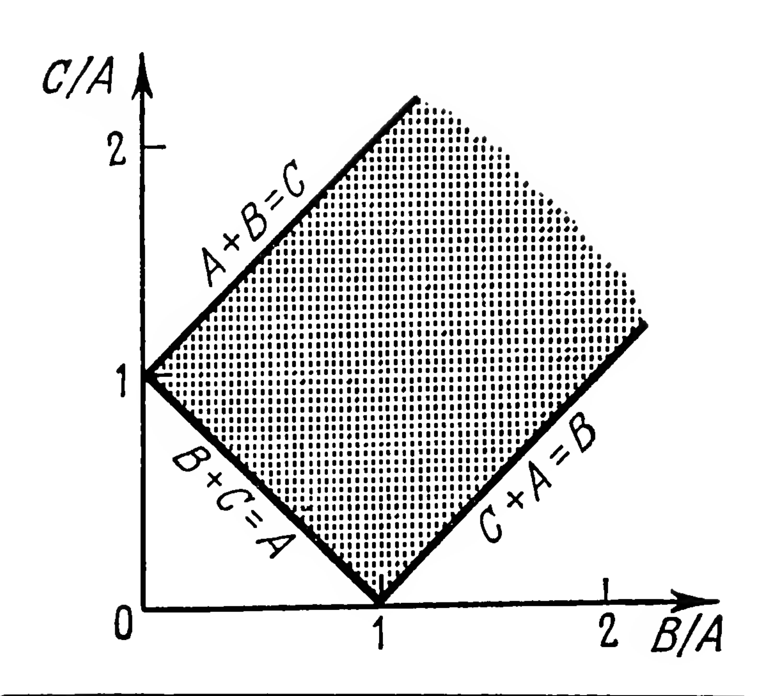


Рис. 1.13. Графическое представление классификации гироскопов; по осям координат отложены отношения главных моментов инерции.

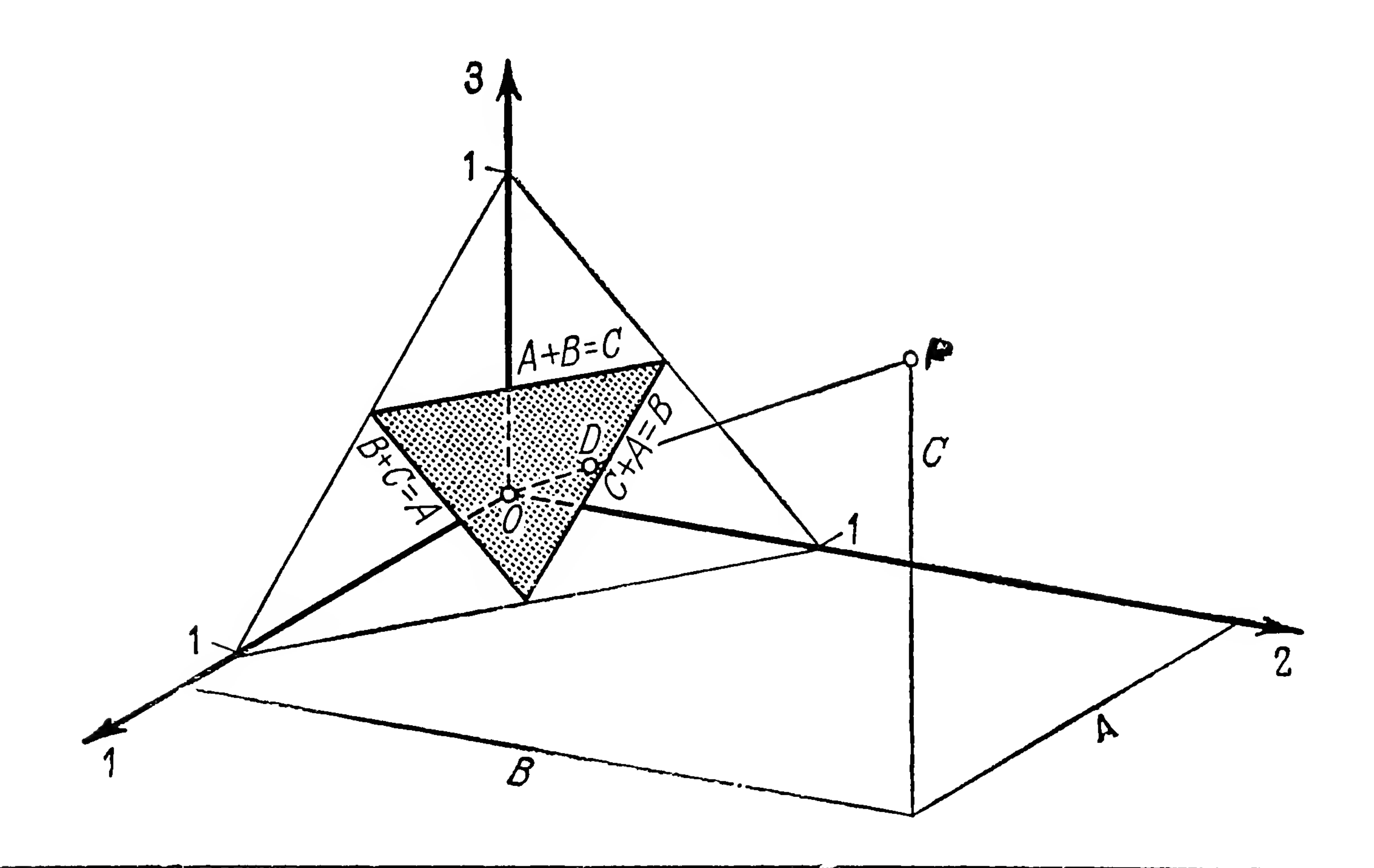


Рис. 1.14. Графическое представление классификации гироскопов с помощью треугольника формы.

характеризоваться точкой P, лежащей в первом октанте. Изображающие точки для тел с подобными эллипсоидами инерции лежат при этом на линии OP. Так как представляют интерес не абсолютные размеры эллипсоида инерции, а лишь его форма, достаточно рассматривать точки D пересечения линии OP с плоскостью $A + B + C = 1$. В силу неравенств (1.10) возможные изображающие точки для эллипсоидов инерции, имеющих различную форму, лежат внутри затененного треугольника, называемого *треугольником формы.*

На рис. 1.15 три вида графического представления различных типов гироскопов помещены рядом, причем соответствующие гра-

ничные линии изображены одинаково и соответствующие точки обозначены одинаковыми цифрами. Обозначения здесь таковы:

точка *1*: $A = 0$, стержень, расположенный вдоль оси 1,
точка *2*: $B = 0$, стержень, расположенный вдоль оси 2,
точка *3*: $C = 0$, стержень, расположенный вдоль оси 3,
точка *4*: $B = C = A/2$, симметричная пластина, лежащая в плоскости 2-3,
точка *5*: $C = A = B/2$, симметричная пластина, лежащая в плоскости 3-1,
точка *6*: $A = B = C/2$, симметричная пластина, лежащая в плоскости 1-2,
точка *7*: $A = B = C$, шаровой гироскоп.

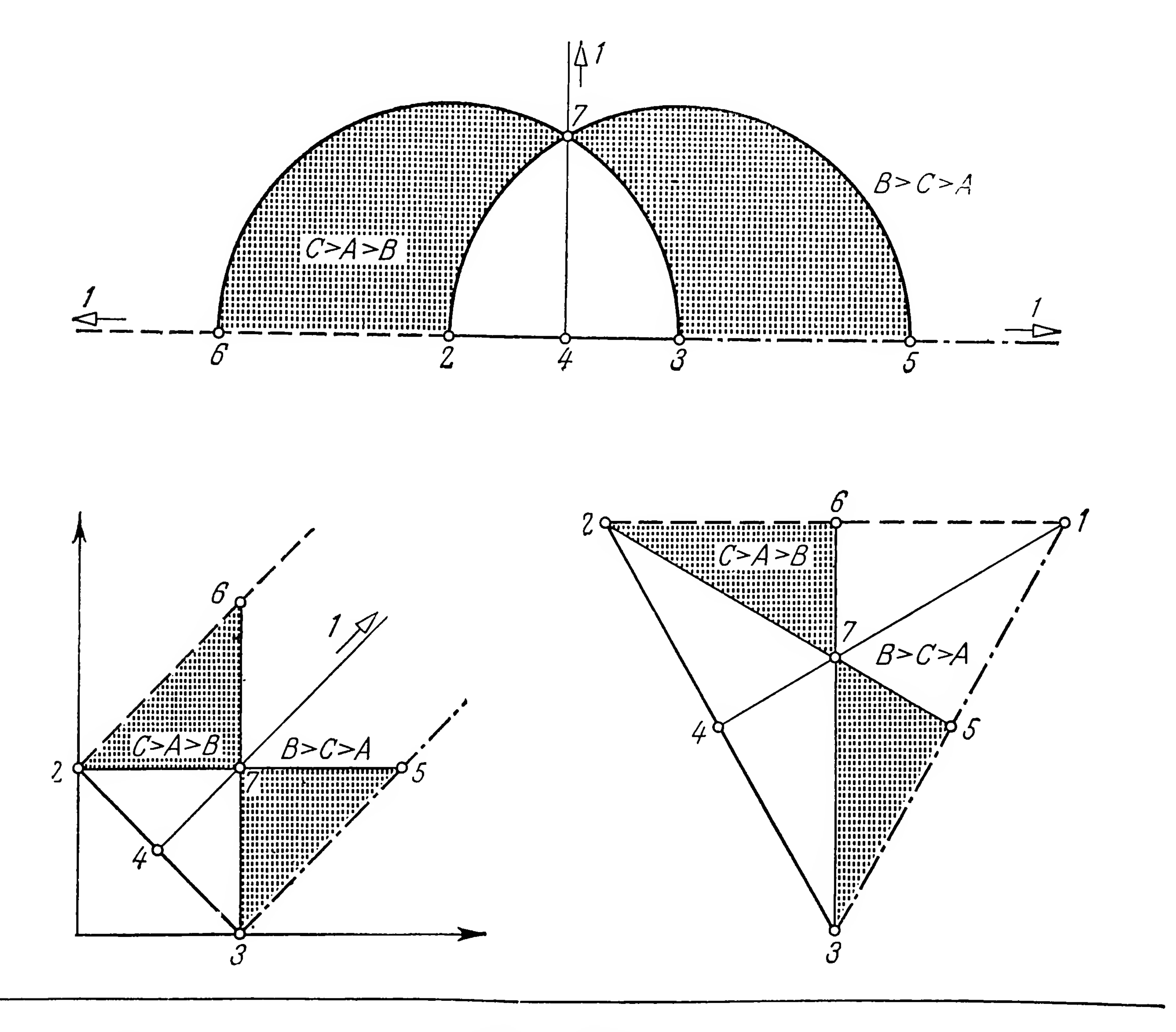


Рис. 1.15. Сравнение различных способов графического представления классификации гироскопов.

Точки на отрезках *1*—*7* (а также *2*—*7* и *3*—*7*) представляют вытянутые гироскопы, а на отрезках *7*—*4* (также *7*—*5* и *7*—*6*) — сплюснутые симметричные относительно оси 1 (соответственно относительно осей 2 и 3) гироскопы.

Точки на прямых *2—4—3* (и *3—5—1* или *2—6—1*) представляют пластины, лежащие в плоскости 2-3 (соответственно 3-1 или 1-2).

Граничные линии *2—7—5*, *3—7—6*, *1—7—4* делят возможную область изображающих точек на шесть подобластей, каждой из которых соответствует определенное распределение величин A, B, C. Для двух таких областей оно указано. Области, соответствующие гироскопам со средней осью 1, затенены.

Сопоставление этих трех изображений показывает, что они топологически эквивалентны. Все же при решении сложных задач предпочитают изображение в виде треугольника формы, так как при этом не отдается предпочтение какому-либо главному моменту инерции и, кроме того, ни одна из точек изображения не лежит в бесконечности.

При практическом применении треугольника формы задача состоит в том, чтобы найти изображающую точку D, соответствующую конкретным значениям A, B, C. При этом можно идти различными путями.

1. На двух сторонах треугольника формы откладываются отрезки $g_1 = A/B$, $g_2 = B/C$. При этом $0 \leqslant g \leqslant \infty$; шкалы будут нелинейными. Изображающую точку D находят как точку пересечения прямых $g_1 = \mathrm{const}$ и $g_2 = \mathrm{const}$.

2. Следуя Шилену, можно на двух сторонах треугольника формы отложить отрезки $h_1 = (A - B)/C$ и $h_2 = (B - C)/A$. При этом $-1 \leqslant h \leqslant +1$; шкалы линейны. Изображающую точку находят как точку пересечения прямых $h_1 = \mathrm{const}$ и $h_2 = \mathrm{const}$, каждая из которых проходит через соответствующую вершину треугольника.

3. Следуя П. Мюллеру, можно отложить отрезки $k_1 = A/(A + B + C)$ и $k_2 = B/(A + B + C)$ на двух сторонах треугольника. При этом $0 \leqslant k \leqslant 0{,}5$; шкалы линейны. Изображающую точку находят как точку пересечения прямых $k_1 = \mathrm{const}$ и $k_2 = \mathrm{const}$, каждая из которых параллельна одной из сторон треугольника.

1.4. Основы кинематики

1.4.1. Степени свободы и кинематические характеристики движения. Число степеней свободы системы это число координат, которые необходимы, чтобы однозначно задать положение системы. Следовательно, точка, движущаяся вдоль кривой, имеет одну степень свободы; точка, свободно движущаяся в пространстве, имеет три степени свободы. Система, состоящая из пяти несвязанных между собой точек, свободно движущихся в пространстве, обладает пятнадцатью степенями свободы.

У твердого тела движения отдельных точек не являются независимыми. Вследствие того что тело не деформируется, расстояние между любыми его точками должно быть постоянным. Поэтому

достаточно задать координаты трех точек тела, не лежащих на одной прямой, чтобы определить положение в пространстве всего тела. Если, например, при определении ориентации тела известны положения его точек O, P, Q (рис. 1.16), то вследствие постоянства расстояний PR и QR тем самым зафиксировано и положение любой точки R тела. Можно поэтому считать, что основной треугольник OPQ представляет все тело. Положение этого

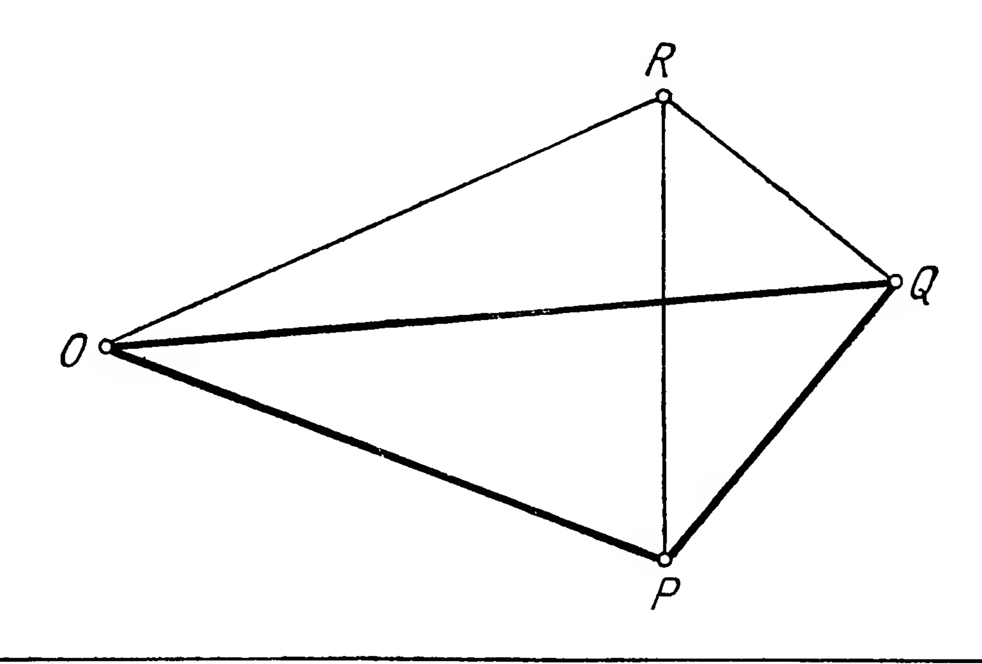


Рис. 1.16. Треугольник OPQ, определяющий положение твердого тела.

треугольника можно задать шестью координатами: например, три нужны для точки O; две следующие достаточны, чтобы установить место точки P, так как она при фиксированной точке O может двигаться только по поверхности сферы радиуса OP; для точки Q при фиксированных точках P и O достаточна еще одна координата, так как Q может двигаться лишь по дуге окружности с центром на фиксированной оси OP. Таким образом, общее число координат, необходимых, чтобы задать положение твердого тела, равно шести.

В теории гироскопа интересен прежде всего случай, когда одна из точек тела закреплена неподвижно. Такое твердое тело с неподвижной точкой может совершать лишь вращательное движение вокруг этой точки. Число степеней свободы его уменьшается тогда до трех.

Движение системы известно, если известны скорости всех ее точек. Если мгновенное положение точки задано ее радиусом-вектором x_i, проведенным из неподвижного начала к рассматриваемой точке, то вектор скорости получают дифференцированием радиуса-вектора по времени:

$$v_i = dx_i/dt = \dot{x}_i. \qquad (1.34)$$

В твердом теле на скорости отдельных точек наложены некоторые ограничения. Они вытекают из того обстоятельства, что расстояния между точками тела постоянны. Пусть P и Q — две точки

движущегося тела и O — неподвижная точка, из которой наблюдают движение (рис. 1.17). Тогда вследствие того, что тело является абсолютно твердым, имеет место равенство

$$z^2 = z_i z_i = (y_i - x_i)(y_i - x_i) = \text{const}. \tag{1.35}$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$2(y_i - x_i)(\dot{y}_i - \dot{x}_i) = 2z_i(\dot{y}_i - \dot{x}_i) = 0,$$

или

$$z_i \dot{x}_i = z_i \dot{y}_i. \tag{1.36}$$

Отсюда следует:

При движении твердого тела проекции скоростей двух его точек на линию, соединяющую эти точки, равны.

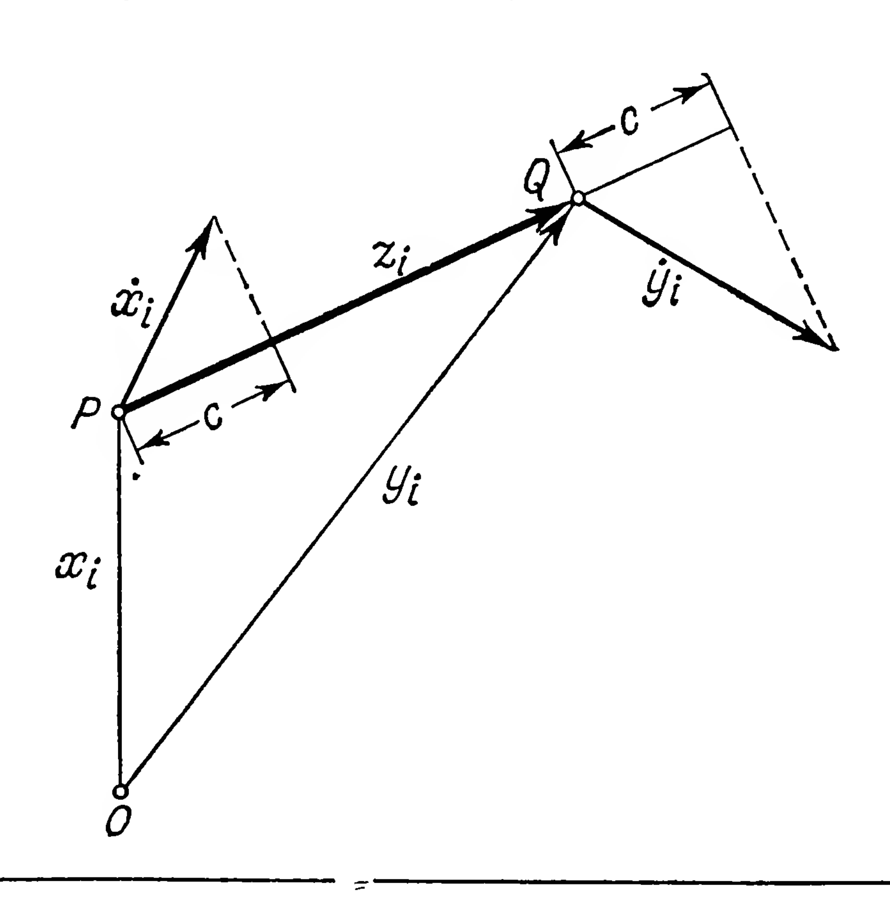


Рис. 1.17. Скорости точек P и Q твердого тела.

Это позволяет судить о характере движения тела в общем случае. Рассмотрим сначала простой случай, когда точка P тела неподвижна. Если ее выбрать в качестве начала, из которого откладываются радиусы-векторы, то $x_i = 0$ и $\dot{x}_i = 0$. Тогда из (1.36) сразу следует $z_i \dot{y}_i = 0$. Если исключить случай равенства нулю сомножителей этого скалярного произведения, то векторы z_i и $\dot{y}_i$ должны быть взаимно перпендикулярны ($z_i \perp \dot{y}_i$). Из рис. 1.18 видно тогда, что движение тела в рассматриваемый момент может представлять собой только вращение вокруг оси, проведенной через неподвижную точку P перпендикулярно плоскости чертежа. При этом вращении отрезок PQ движется вокруг точки P как спица колеса. Скорость точки Q тела можно выразить следующим образом:

$$\dot{y}_i = \dot{z}_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j z_k. \tag{1.37}$$

Вектор ω_j угловой скорости лежит на мгновенной оси вращения и направлен таким образом, что векторы ω_j, z_k, $\dot{y}_i$ в данной последовательности образуют правую тройку.

В общем случае точка P не является неподвижной и обладает некоторой скоростью $\dot{x}_i$. Если наблюдать за движением точки Q

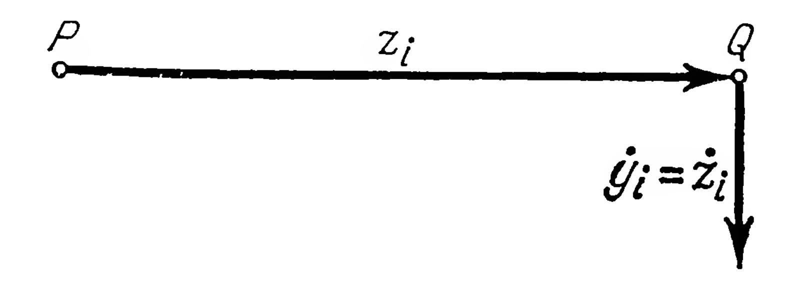


Рис. 1.18. Скорость точки Q при вращении твердого тела вокруг точки P.

твердого тела, находясь в системе отсчета, поступательно движущейся вместе с точкой P, то правая часть равенства (1.37) даст скорость точки Q относительно P. Для абсолютной скорости точки Q получаем сумму

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k. \tag{1.38}$$

Следовательно, в общем случае движение твердого тела складывается из двух движений: из параллельного переноса (или поступательного движения) со скоростью $\dot{x}_i$ и вращения, причем величина и направление скоростей точек тела определяются, кроме вектора z_k, и вектором ω_j. Векторы ω_j и $\dot{x}_i$ можно трактовать как компоненты *кинематического винта* $(\omega_j, \dot{x}_i)$.

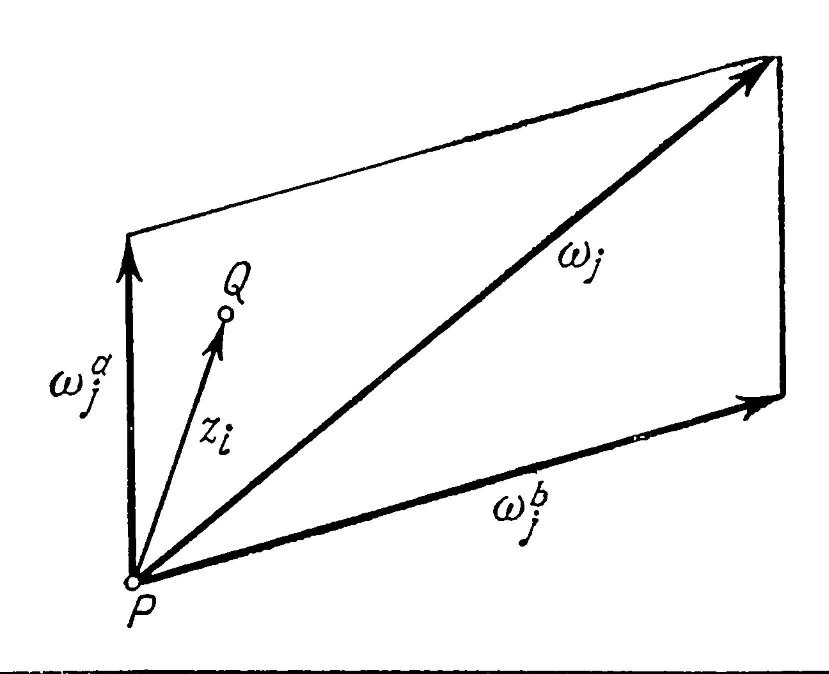


Рис. 1.19. Векторное сложение угловых скоростей.

Угловые скорости можно складывать по правилам сложения векторов. Если твердое тело участвует одновременно в двух вращениях с угловыми скоростями ω_i^a и ω_i^b (рис. 1.19) и если точка P неподвижна, то скорость точки Q тела равна

$$\dot{y}_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j^a z_k + \varepsilon_{ijk}\omega_j^b z_k.$$

Так как для векторного произведения справедлив распределительный закон, то

$$\dot{y}_i = \varepsilon_{ijk}(\omega_j^a + \omega_j^b) z_k = \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k.$$

Вектор $\dot{y}_i$ определяет скорость точки твердого тела, которое совершает единственное вращение с угловой скоростью $\omega_j = \omega_j^a + \omega_j^b$. Направление результирующего вектора ω_j определяет мгновенную ось вращения.

1.4.2. Геометрическое описание движения твердого тела с неподвижной точкой. Если твердое тело имеет неподвижную точку, то она может быть выбрана в качестве начала координат. Тогда нужно в общей формуле (1.38) положить $\dot{x}_i = 0$, так что останется лишь слагаемое от вращательного движения. Ось вращения представляет собой геометрическое место точек, покоящихся в данное мгновение, и поэтому должна проходить через неподвижную точку тела. Таким образом, имеем:

В общем случае движение твердого тела с неподвижной точкой есть вращение вокруг оси, проходящей через эту точку.

Ось вращения может с течением времени изменять свое направление. Она описывает в пространстве поверхность конуса, называемого *неподвижным аксоидом* (или *конусом герполодии*). Неподвижная точка F является вершиной этого конуса (рис. 1.20). Ось

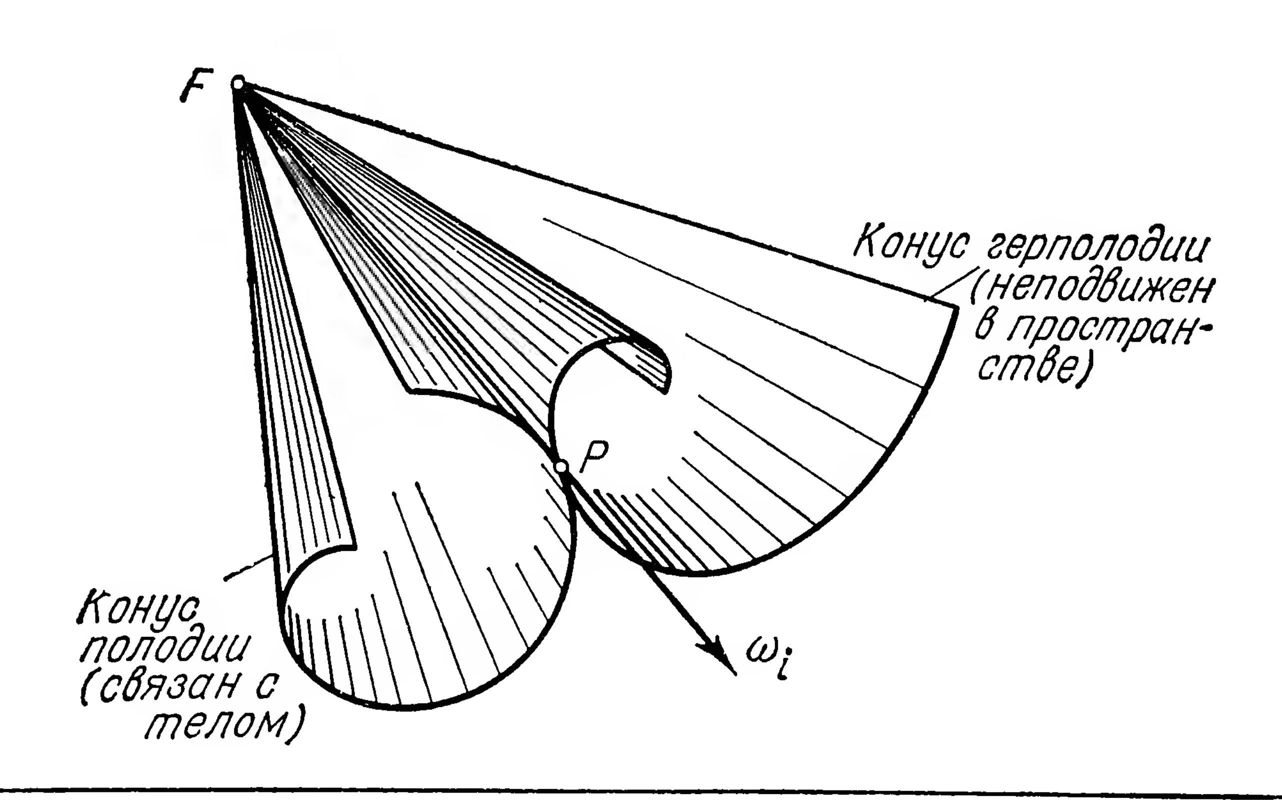


Рис. 1.20. Представление движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки F качением подвижного аксоида по неподвижному.

вращения может изменять свое положение и по отношению к рассматриваемому телу. При этом она описывает поверхность конуса, который называют *подвижным аксоидом* (или *конусом полодии*). Линия, по которой касаются оба конуса, является мгновенной осью вращения. Справедлива теорема:

Любое движение твердого тела с неподвижной точкой может быть представлено как качение подвижного аксоида, неизменно связанного с телом, по неподвижному.

То, что при этом движении действительно имеет место качение одного конуса по другому, можно установить следующим образом. Рассмотрим кривые, получающиеся в сечении поверхностей конусов плоскостью, перпендикулярной к мгновенной оси вращения (рис. 1.21). Пусть P_0 — мгновенный полюс вращения в момент

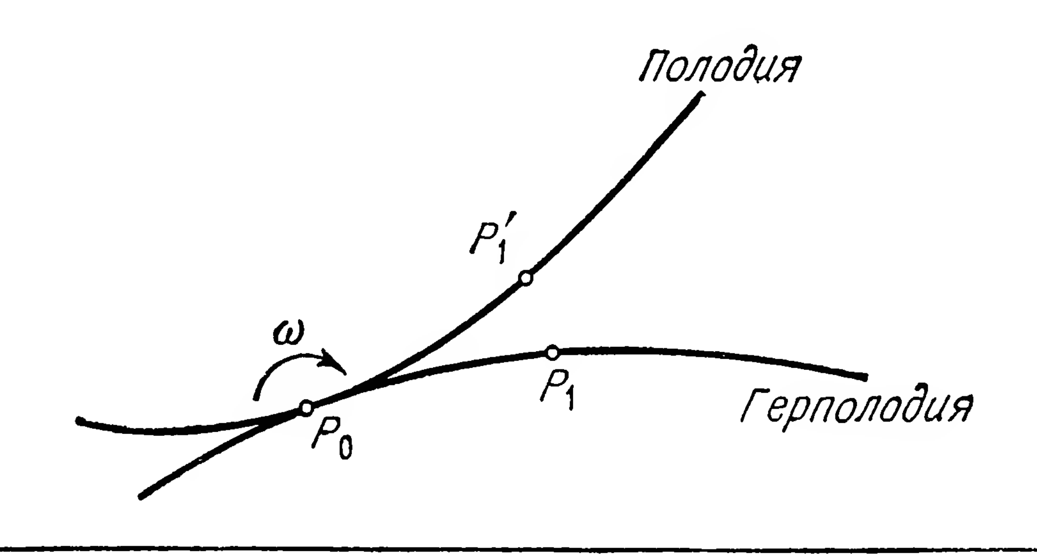


Рис. 1.21. Качение полодии по герполодии.

времени $t = t_0$. Положим, что к моменту $t_1 = t_0 + \Delta t$ полюс вращения на герполодии переместится в положение P_1, а на полодии — в P_1'. Представим себе теперь, что ось вращения, проходящая через P_0, в данное мгновение неподвижна. Тогда точка P_1' вследствие вращения тела с угловой скоростью ω переместится на величину $P_1'P_1 \approx P_0P_1'\omega\,\Delta t$, так что точки P_1' и P_1 совпадут.

Если теперь, для того чтобы приблизиться к истинному движению, перейти к пределу при $\Delta t \to 0$, то как угол $\omega\Delta t$, так и отрезок P_0P_1' будут стремиться к нулю одновременно с Δt. Это означает, что мгновенный центр вращения P_0 является точкой касания первого порядка герполодии и полодии, т. е. эти кривые в точке P_0 имеют общую касательную. О том, что подвижный аксоид при своем качении не скользит по неподвижному, можно утверждать потому, что в противном случае фиксированная в теле точка P_0' не могла бы обладать нулевой скоростью. Следовательно, она не могла бы лежать на мгновенной оси вращения.

Можно также вместо неподвижного и подвижного аксоидов рассматривать кривые, которые описывает конец вектора угловой скорости ω_i при качении аксоида. Эти герполодии и полодии лежат соответственно на неподвижном и подвижном аксоидах. При движении одна из кривых также катится по другой. Такое рассмотрение дает более детальное представление о движении тела, чем чисто геометрическое качение аксоидов, так как при этом играет роль и величина угловой скорости, т. е. скорость протекания процесса.

1.4.3. Аналитическое описание вращательного движения твердого тела. *а) Задание взаимного вращения двух систем отсчета.* Для расчетов, относящихся к вращательному движению твердого тела, целесообразно ввести в рассмотрение связанную с телом систему координат 1′, 2′, 3′, вращающуюся относительно неподвижной системы 1, 2, 3. Так как здесь мы будем исследовать лишь вращательные движения, то можно принять, что начала обеих систем совпадают (рис. 1.22).

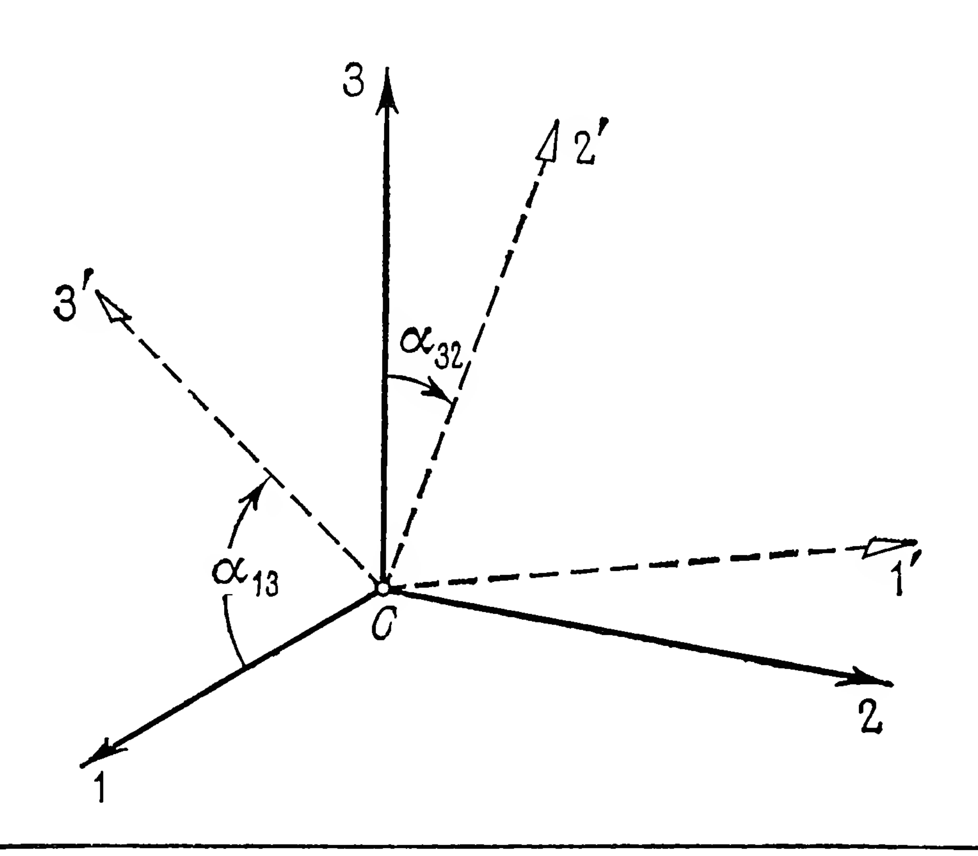


Рис. 1.22. Задание поворота декартовой системы координат углами между осями

Если твердое тело имеет неподвижную точку, то лучше всего ее и выбрать в качестве начала координат. Поворот системы координат, связанной с телом, относительно неподвижной системы задается матрицей преобразования a_{ij}. Элементами этой матрицы являются косинусы углов между осями подвижной и неподвижной систем. Так, например,

$$a_{13} = \cos\alpha_{13}, \quad a_{32} = \cos\alpha_{32}.$$

Отсюда ясно, что в общем случае $a_{ij} \neq a_{ji}$. Девять направляющих косинусов не являются независимыми; они должны удовлетворять условию

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}. \qquad (1.39)$$

Вытекающие отсюда девять скалярных равенств выражают, что направляющие косинусы являются координатами единичных векторов и что оси координат в каждой из систем (подвижной и неподвижной) перпендикулярны между собой.

Если a_{ij} — матрица преобразования, то для вектора x_i имеем формулы преобразования (1.6):

$$x'_i = a_{ji}x_j, \quad x_i = a_{ij}x'_j. \qquad (1.40)$$

Применение матрицы a_{ij} при аналитическом описании вращений твердого тела совершенно естественно, но пользоваться каждый раз условиями (1.39) неудобно. Действительно, ведь чтобы однозначно задать положение тела, достаточно уже трех координат, так как твердое тело с неподвижной точкой имеет три степени свободы. В принципе можно из девяти направляющих косинусов с помощью соотношений (1.39) исключить шесть и иметь три независимые между собой величины. Можно, однако, вместо того чтобы идти по трудному пути исключения координат, поступить наоборот: отправляться от трех соответствующим образом выбранных обобщенных координат и через них выразить матрицу a_{ij}. Здесь имеются различные возможности. Важнейшим примером являются так называемые *углы Эйлера*; аналогичными, но более подходящими для некоторых технических проблем гироскопии являются *кардановы углы*. И те и другие нужно здесь рассмотреть, так как далее мы будем ими пользоваться.

В этой связи следует еще упомянуть так называемые *параметры Клейна — Кэли* α, β, γ, δ (см., например, Голдстейн [17]). В число этих параметров, также пригодных для задания вращений твердого тела, заведомо включено на одну величину больше, чем

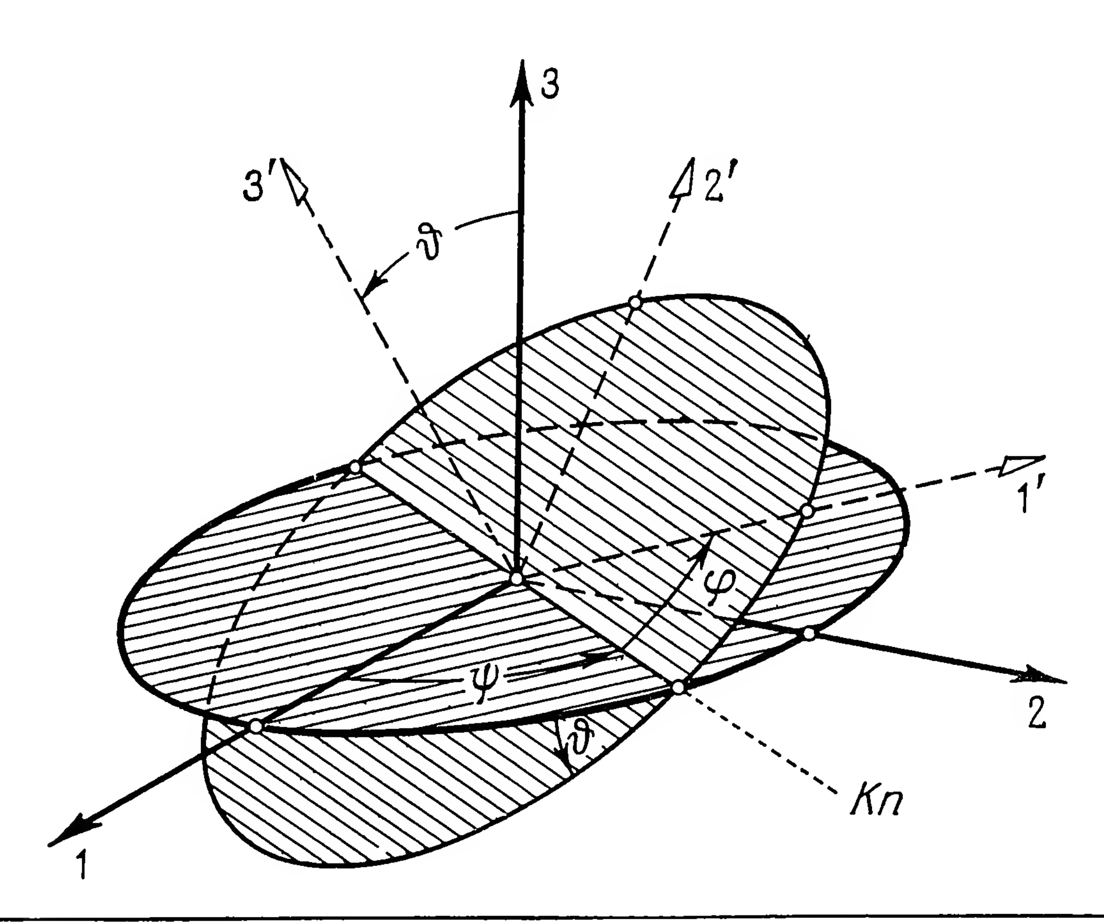


Рис. 1.23. Углы Эйлера ψ, ϑ, φ, определяющие взаимную ориентацию двух координатных трехгранников.

необходимо, благодаря чему формулы получаются симметричными. Однако мы не будем разбирать этот вопрос более подробно.

b) *Углы Эйлера.* По Эйлеру, положение связанной с телом системы 1′, 2′, 3′ относительно неподвижной системы отсчета 1, 2, 3 может быть задано тремя углами ψ, ϑ, φ, изображенными на рис. 1.23. Угол ϑ заключен между осями 3 и 3′. Два других угла измеряются в плоскостях 1-2 и 1′-2′, которые на рис. 1.23

изображены в виде кругов. Линия пересечения этих плоскостей называется *линией узлов* (*Кп*). Угол ψ образуется линией узлов и осью 1, угол φ — линией узлов и осью 1'. В ранней гироскопической литературе эти углы обычно назывались углом прецессии ψ, углом нутации ϑ и углом собственного вращения φ. Однако мы не будем пользоваться этими названиями, так как понятия прецессии и нутации ниже будут определены не геометрически, а динамически в соответствии с практическим употреблением этих понятий в литературе по гироскопической технике.

Аналитические зависимости проще всего выводятся так: нужно поворот связанной с телом системы координат относительно неподвижной представить себе как результат трех последовательных

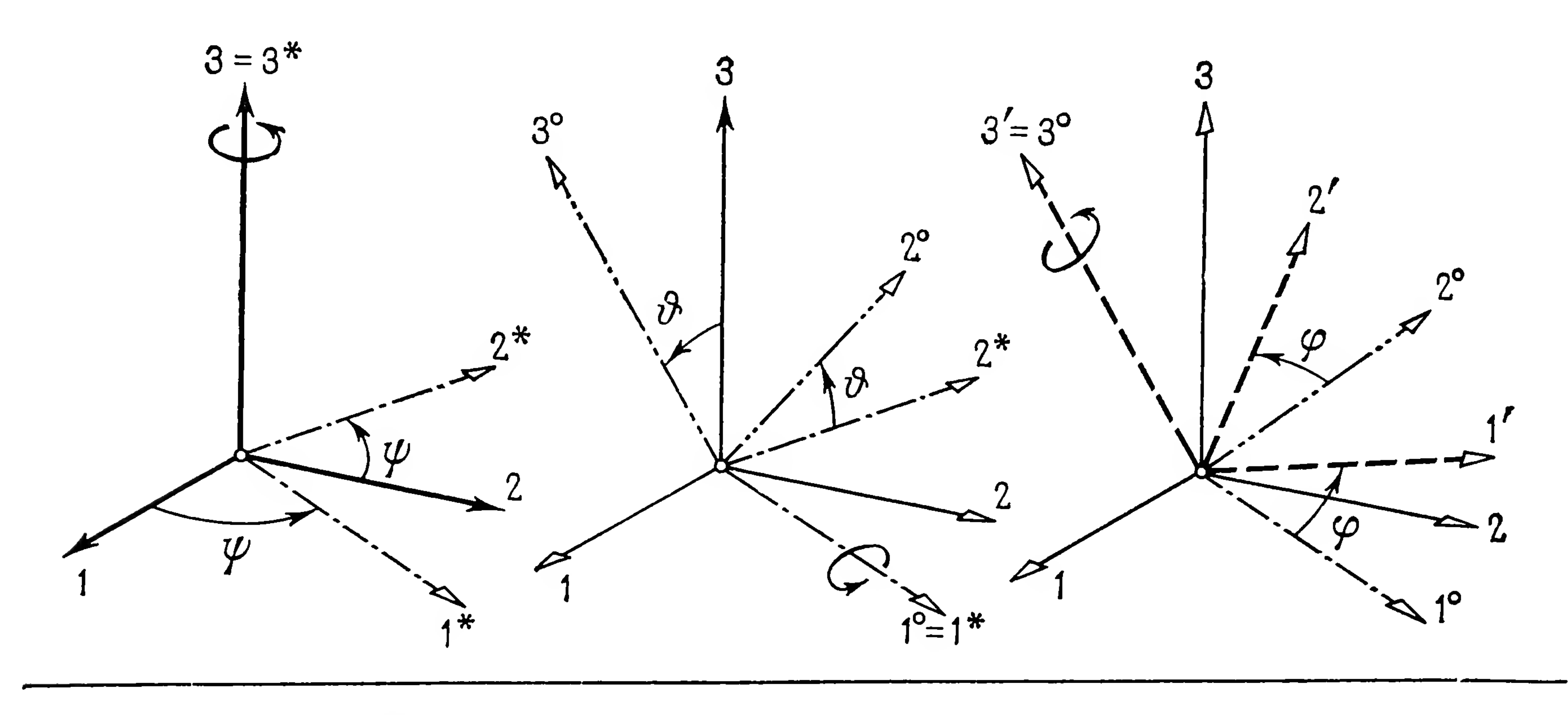


Рис. 1.24. Перевод связанного с телом координатного трехгранника 1', 2', 3' в конечное положение с помощью трех последовательных поворотов на углы ψ, ϑ и φ.

поворотов, каждый из которых происходит вокруг неподвижной оси. Это можно представить схемой

$$(1, 2, 3) = (\psi) \Rightarrow (1^*, 2^*, 3^*) = (\vartheta) \Rightarrow (1^\circ, 2^\circ, 3^\circ) = (\varphi) \Rightarrow (1', 2', 3')$$

(см. рис. 1.24). Первый поворот совершается на угол ψ вокруг оси 3, совпадающей с осью 3*. Это ортогональное преобразование может быть представлено в виде

$$x_k^* = a_{jk}^{\psi} x_j, \quad \text{где} \quad a_{jk}^{\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.41)$$

Второй поворот совершается на угол ϑ вокруг оси 1*. Соответствующее преобразование может быть записано в виде

$$x_l^\circ = a_{kl}^{\vartheta} x_k^*, \quad \text{где} \quad a_{kl}^{\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}. \qquad (1.42)$$

Наконец следует еще совершить поворот на угол φ вокруг оси 3°. Соответствующее преобразование таково:

$$x'_i = a^{\varphi}_{li} x^{\circ}_l, \quad \text{где} \quad a^{\varphi}_{li} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Последовательно переходя от одного преобразования к другому, получаем

$$x'_i = a^{\varphi}_{li} x^{\circ}_l = a^{\vartheta}_{kl} a^{\varphi}_{li} x^{*}_k = a^{\psi}_{jk} a^{\vartheta}_{kl} a^{\varphi}_{li} x_j = a_{ji} x_j, \tag{1.44}$$

где результирующая матрица преобразования $a_{ji} = a^{\psi}_{jk} a^{\vartheta}_{kl} a^{\varphi}_{li}$ получается перемножением отдельных матриц по известным правилам. В результате получим матрицу

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

Таким образом найдены элементы матрицы преобразования.

Впрочем, можно элементы матрицы (1.45) вычислить непосредственно из сферических треугольников, которые получатся, если соответствующим образом соединить точки пересечения различных осей (на рис. 1.23) со сферой единичного радиуса. Так, например, из треугольника, образованного точками осей 1, 1′ и *Kn*, сразу получаем, согласно теореме косинусов сферической тригонометрии,

$$a_{11} = \cos(1,1') = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos(\pi - \vartheta) =$$
$$= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi.$$

К сожалению, в используемых в литературе обозначениях углов Эйлера нет единства. Иногда углы ψ и φ случайно меняются местами, а иногда используются дополнительные углы. Так, от Резаля пошло применение вместо углов ϑ и φ дополнительных к ним. Они соответствуют географическим широте и долготе, определяющим положение точки на земной поверхности.

Углы Эйлера и их различные варианты имеют тот недостаток, что при $\vartheta = 0$ теряют свою однозначность. В этом случае ψ и φ становятся неопределенными, так как неизвестно направление линии узлов (рис. 1.23). Поэтому эти углы становятся неудобными в задачах, в которых угол ϑ может обращаться в нуль или же это значение угла очень важно. Такой случай как раз имеет место в некоторых интересных в техническом отношении гироскопических приборах. Тогда лучше применять другую тройку углов, так называемые кардановы углы.

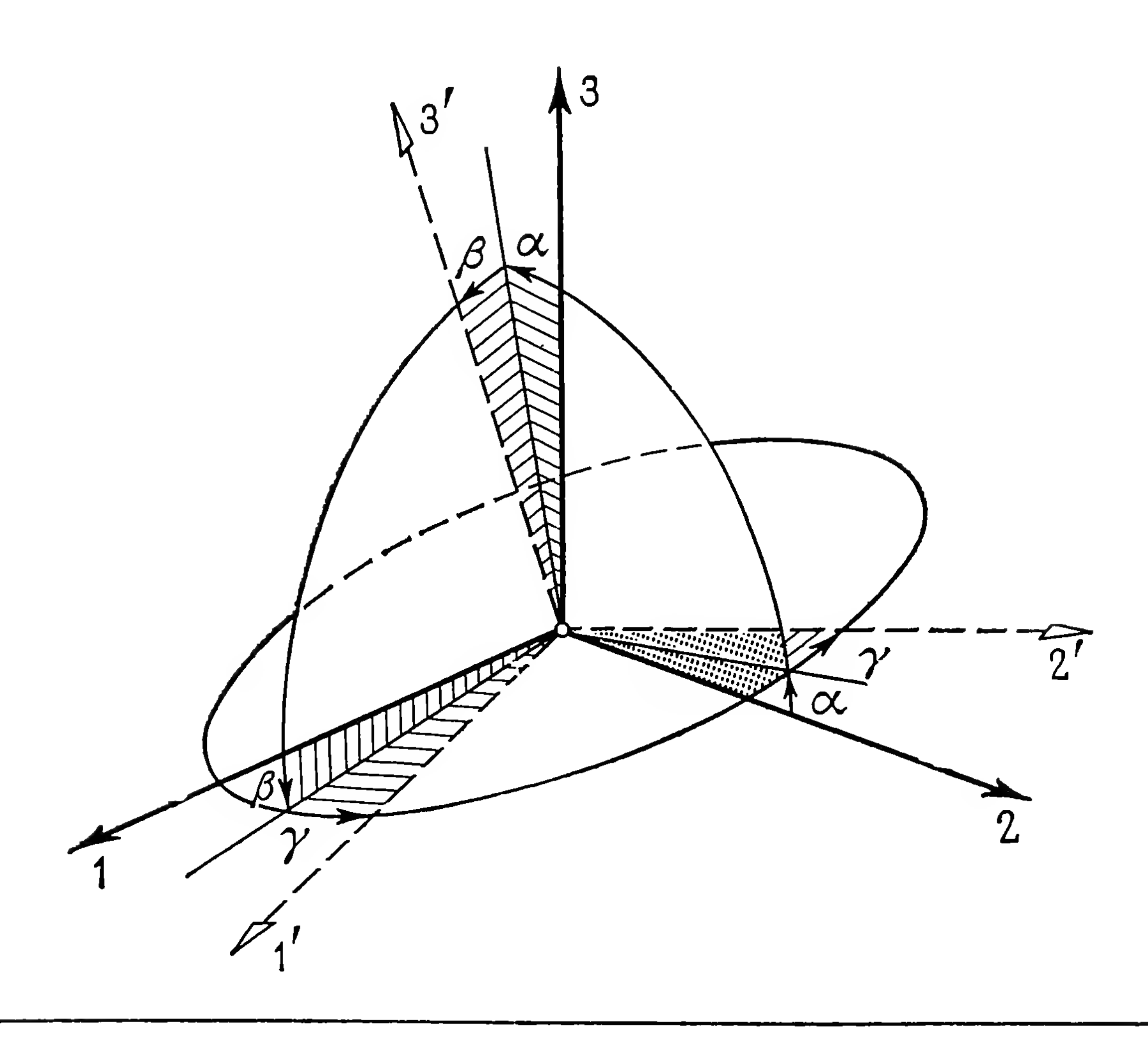


Рис 1.25. Кардановы углы α, β, γ, определяющие взаимную ориентацию двух координатных трехгранников.

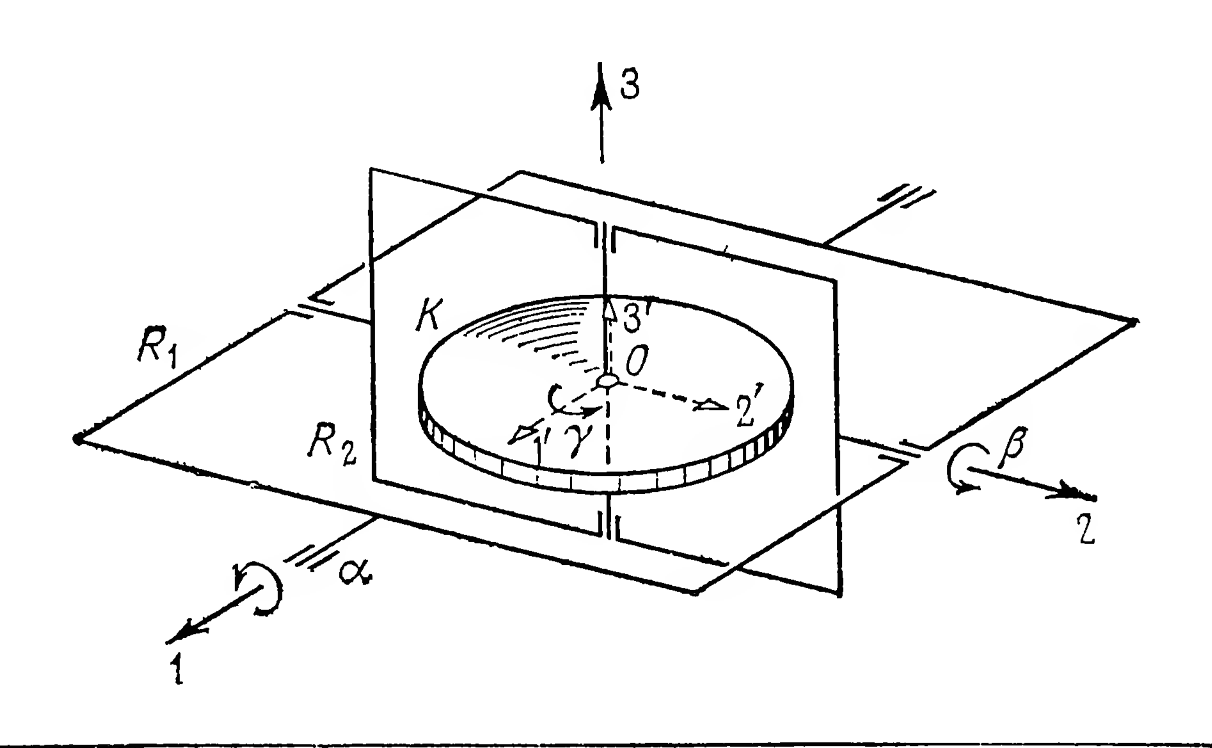


Рис. 1.26. Реализация кардановых углов в гироскопе, помещенном в карданов подвес.

c) *Кардановы углы.* Эти углы показаны на рис. 1.25. Их появление связано с широко распространенным кардановым подвесом гироскопа, где они могут быть определены как углы между отдельными частями подвеса. Карданов подвес, одна из возможных форм которого показана на рис. 1.26, состоит из внешней кардановой рамки R_1, которая может вращаться вокруг неподвижной оси 1, и внутренней рамки R_2, подвешенной во внешней рамке R_1 так, что она может поворачиваться вокруг внутренней оси; эта последняя перпендикулярна оси 1 и в исходном положении совпадает с неподвижной в пространстве осью 2 Тело гироскопа (ротор) *K* может вращаться вокруг оси, которая перпендикулярна оси внутренней

рамки и в исходном положении совпадает с осью 3. Как показано на рис. 1.26, в исходном положении система $1'$, $2'$, $3'$, связанная с гироскопом, совпадает с неподвижной системой 1, 2, 3. Но вращением вокруг упомянутых трех осей можно придать гироскопу любое положение, при котором начало координат O остается неподвижным. Угол поворота вокруг неподвижной оси 1 (ось внешней рамки) обозначим буквой α; угол поворота вокруг оси внутренней рамки назовем β; наконец, пусть γ будет угол поворота вокруг оси $3'$, связанной с гироскопом. Как и в случае углов Эйлера, можно повороты связанной с телом системы координат относительной неподвижной характеризовать схемой

$$(1, 2, 3) = (\alpha) \Rightarrow (1^*, 2^*, 3^*) = (\beta) \Rightarrow (1^\circ, 2^\circ, 3^\circ) = (\gamma) \Rightarrow (1', 2', 3').$$

Необходимые преобразования имеют вид

$$x_k^* = a_{jk}^\alpha x_j, \quad \text{где} \quad a_{jk}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix};$$

$$x_l^\circ = a_{kl}^\beta x_k^*, \quad \text{где} \quad a_{kl}^\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \tag{1.46}$$

$$x_i' = a_{li}^\gamma x_l^\circ, \quad \text{где} \quad a_{li}^\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эти соотношения совместно дают

$$x_i' = a_{li}^\gamma x_l^\circ = a_{kl}^\beta a_{li}^\gamma x_k^* = a_{jk}^\alpha a_{kl}^\beta a_{li}^\gamma x_j = a_{ji} x_j, \tag{1.47}$$

где

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

Для кардановых углов, как и для углов Эйлера, возможны различные варианты. Поэтому, применяя эти углы, следует всегда внимательно относиться к их точному определению.

Нетрудно получить аналитическую связь между углами Эйлера и кардановыми углами. Она может быть выведена из рассмотрения сферических треугольников, которые получаются соединением точек пересечения выбранных соответствующим образом осей со сферой единичного радиуса. Из треугольников, изображенных на рис. 1.27, согласно теоремам сферической тригонометрии [или из сравнения формул (1.45) и (1.47)], следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\psi \operatorname{tg}\vartheta, \quad \sin\beta = \sin\psi\sin\vartheta, \quad \operatorname{tg}(\gamma - \varphi) = \operatorname{tg}\psi\cos\vartheta. \tag{1.48}$$

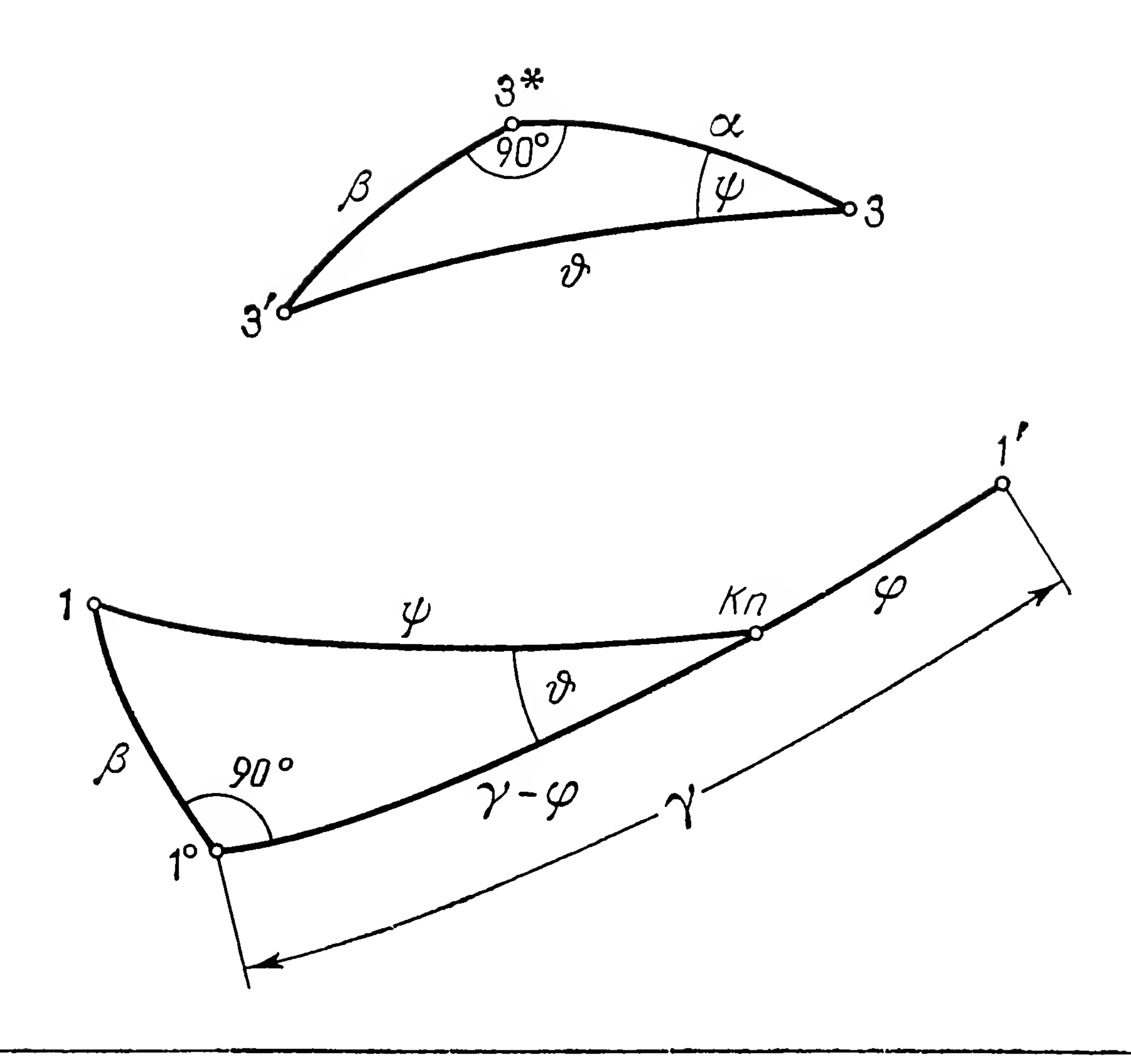


Рис. 1.27. К выводу соотношений между эйлеровыми и кардановыми углами.

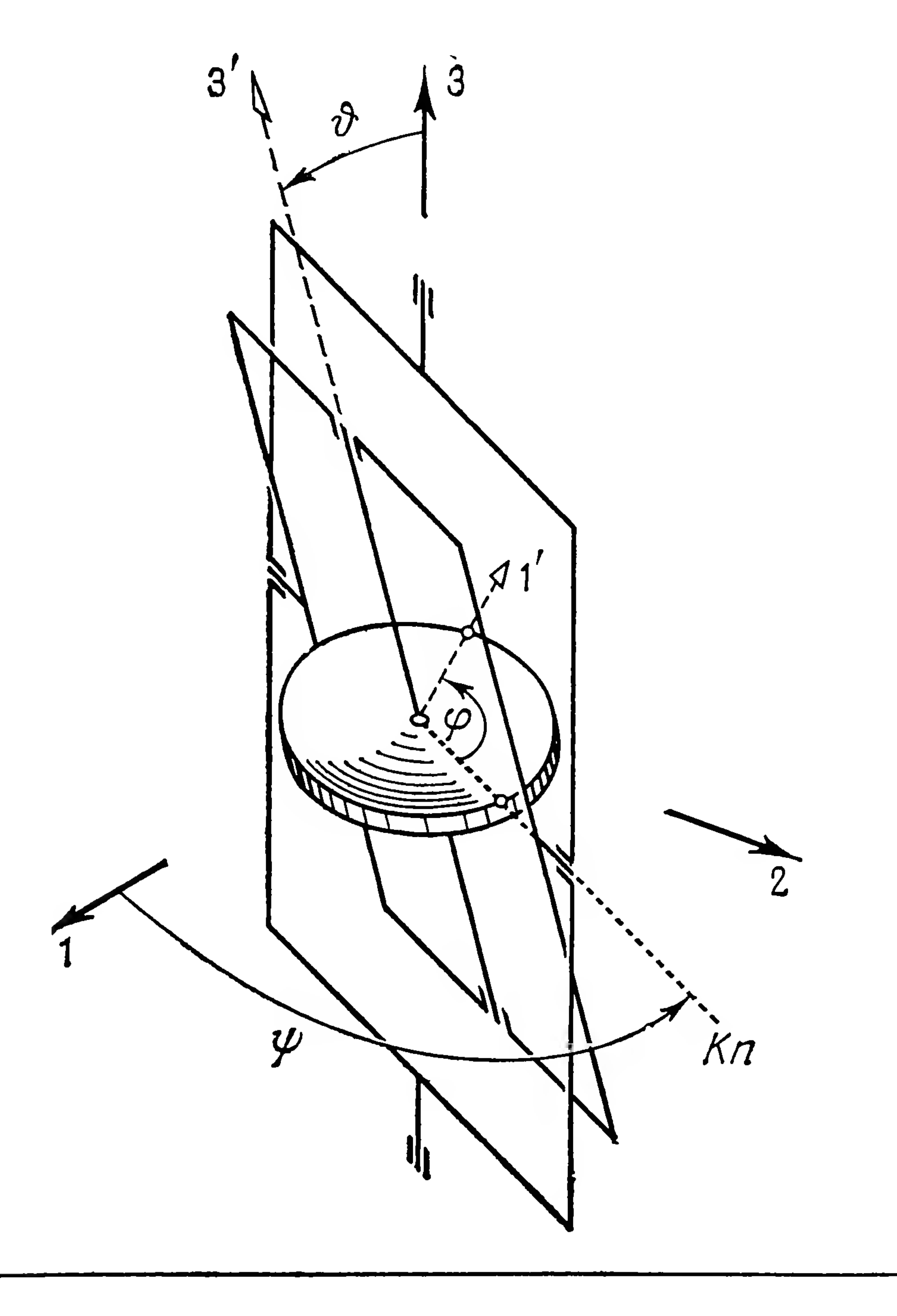


Рис. 1.28. Эйлеровы углы в кардановом подвесе.

Впрочем, при ином расположении кардановых осей относительно осей 1, 2, 3 системы отсчета можно получить эйлеровы углы непосредственно на кардановом подвесе. Если, согласно рис. 1.28, взять ось внешней рамки за ось 3, а ось ротора за ось 3′, то ось внутренней рамки будет линией узлов. Тогда углы Эйлера ψ, ϑ, φ могут быть получены как углы поворота вокруг оси 3, вокруг линии узлов и вокруг оси ротора соответственно (каждый поворот совершается в положительном направлении). При таком расположении осей

$$\alpha = \psi, \quad \beta = \vartheta - \pi/2, \quad \gamma = \varphi.$$

d) *Компоненты угловой скорости.* Из динамических уравнений гироскопа часто получают лишь угловую скорость гироскопа как функцию времени. Чтобы отсюда определить пространственную ориентацию тела, нужно знать зависимость между компонентами угловой скорости ω_i и указанными выше углами и их производными по времени. Эти соотношения могут быть получены с помощью рис. 1.23 и 1.25.

В случае применения углов Эйлера следует учитывать, что вектор угловой скорости $\dot\psi$ направлен вдоль оси 3, вектор угловой скорости $\dot\vartheta$ — вдоль линии узлов, а вектор $\dot\varphi$ — вдоль оси 3′. Раскладывая эти компоненты по осям, получаем

в проекциях на оси, связанные с телом:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi, \\ \omega_2' &= \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi, \\ \omega_3' &= \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta; \end{aligned} \tag{1.49}$$

в проекциях на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi, \\ \omega_2 &= -\dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \dot\vartheta \sin\psi, \\ \omega_3 &= \dot\psi + \dot\varphi \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Соответственно получаются соотношения в кардановых углах, если учесть, что вектор угловой скорости $\dot\alpha$ направлен вдоль оси 1, вектор $\dot\beta$ — вдоль оси 2 и вектор $\dot\gamma$ — вдоль оси 3′. Отсюда получаем

в проекциях на оси, связанные с телом:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \dot\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dot\beta \sin\gamma, \\ \omega_2' &= -\dot\alpha \cos\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma, \\ \omega_3' &= \dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta; \end{aligned} \tag{1.51}$$

в проекциях на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta, \\ \omega_2 &= -\dot{\gamma}\cos\beta\sin\alpha + \dot{\beta}\cos\alpha, \\ \omega_3 &= \dot{\gamma}\cos\beta\cos\alpha + \dot{\beta}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Если углы ψ, ϑ, φ или α, β, γ и их производные по времени даны, то с помощью приведенных формул могут быть вычислены компоненты угловой скорости. Однако в большинстве случаев нужно решать обратную задачу: определить углы по проекциям угловой скорости *на подвижные оси*. Для этой цели служат дифференциальные уравнения, а именно:

для углов Эйлера из (1.49) вытекает

$$\begin{aligned} \dot{\psi}\sin\vartheta &= \omega_1'\sin\varphi + \omega_2'\cos\varphi, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_1'\cos\varphi - \omega_2'\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_3' - \operatorname{ctg}\vartheta\,(\omega_1'\sin\varphi + \omega_2'\cos\varphi); \end{aligned} \tag{1.53}$$

для кардановых углов из (1.51) вытекает

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}\cos\beta &= \omega_1'\cos\gamma - \omega_2'\sin\gamma, \\ \dot{\beta} &= \omega_1'\sin\gamma + \omega_2'\cos\gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_3' - \operatorname{tg}\beta\,(\omega_1'\cos\gamma - \omega_2'\sin\gamma). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Следует указать еще на одно очень важное обстоятельство: из угловых скоростей $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ могут быть получены интегрированием соответствующие углы

$$\psi = \psi_0 + \int \dot{\psi}\,dt, \ \ldots; \quad \alpha = \alpha_0 + \int \dot{\alpha}\,dt, \ \ldots .$$

Производные углов являются голономными координатами в смысле аналитической механики. Напротив, проекции угловой скорости ω_1', ω_2', ω_3' не являются голономными координатами. Из них невозможно получить интегрированием углы, которые бы годились для задания положения тела. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим, например, первое равенство (1.49). Умножив его на элемент времени dt, получим

$$\begin{aligned} \omega_1'\,dt &= \dot{\psi}\,dt\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\,dt\cos\varphi = \\ &= d\psi\sin\vartheta\sin\varphi + d\vartheta\cos\varphi. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в правой части, не является точным дифференциалом, ибо так называемое условие интегрируемости не удовлетворяется. (Дифференциальное выражение $dU = P d\psi + Q d\vartheta$ ин-

тегрируемо только тогда, когда справедливо равенство

$$\partial P/\partial\vartheta = \partial Q/\partial\psi,$$

а это условие в данном случае не выполняется.)

Отсюда следует очень важный практический вывод: неоднократно предлагалось измерять составляющие угловой скорости ω_1', ω_2', ω_3' движущихся систем (кораблей, самолетов, ракет, спутников) с помощью измерительных приборов, укрепленных на объекте (например, гиротахометров; см. гл. 15), с тем чтобы затем прямым интегрированием получить углы поворота относительно связанных с объектом осей. Однако полученные таким образом углы по упомянутой причине не являются величинами, однозначно определяющими пространственную ориентацию системы. Напротив, корректный способ состоит в интегрировании довольно сложных нелинейных дифференциальных уравнений (1.53) или (1.54). Конечно, можно использовать и соотношения между направляющими косинусами.

е) *Дифференцирование по времени вектора во вращающейся системе координат.* В гироскопических задачах часто целесообразно пользоваться подвижной системой отсчета, которая неизменно связана с телом или движется произвольным образом. При отсутствии поступательного движения имеется следующее преобразование связывающее компоненты вектора в подвижной и в неподвижной системах:

$$x_i = a_{ik}x_k'.$$

Отсюда для скорости изменения вектора имеем

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}(a_{ik}x_k') = a_{ik}\frac{dx_k'}{dt} + \frac{da_{ik}}{dt}x_k'.$$

Здесь первое слагаемое характеризует изменение вектора x_k' по отношению к подвижной системе. Оно часто сокращенно записывается так:

$$a_{ik}\frac{dx_k'}{dt} = \frac{d'x_i'}{dt}.$$

Второе слагаемое может быть выражено с помощью вектора угловой скорости ω_j, с которой подвижная система движется относительно неподвижной:

$$(da_{ik}/dt)\,x_k' = \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k'.$$

Это выражение дает переносную скорость изменения вектора, которую он приобретает вследствие того, что участвует в движении подвижной системы. Таким образом, *абсолютная скорость изменения вектора равна сумме относительной и переносной скоростей*:

$$dx_i/dt = d'x_i'/dt + \varepsilon_{ijk}\omega_j x_k'. \qquad (1.55)$$

Легко усматриваются два граничных случая:

1) x_i неизменен в пространстве; тогда

$$\frac{dx_i}{dt}=0 \quad \text{и} \quad \frac{d'x'_i}{dt}=-\varepsilon_{ijk}\omega_j x'_k;$$

2) x'_i неизменен в подвижной системе; тогда

$$\frac{d'x'_i}{dt}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dx_i}{dt}=\varepsilon_{ijk}\omega_j x'_k.$$

Эти соотношения можно получить непосредственно из рис. 1.29. В первом случае конец вектора x_k остается неподвижным в пространстве; для наблюдателя, движущегося вместе с подвижной системой, конец вектора движется в противоположном направлении.

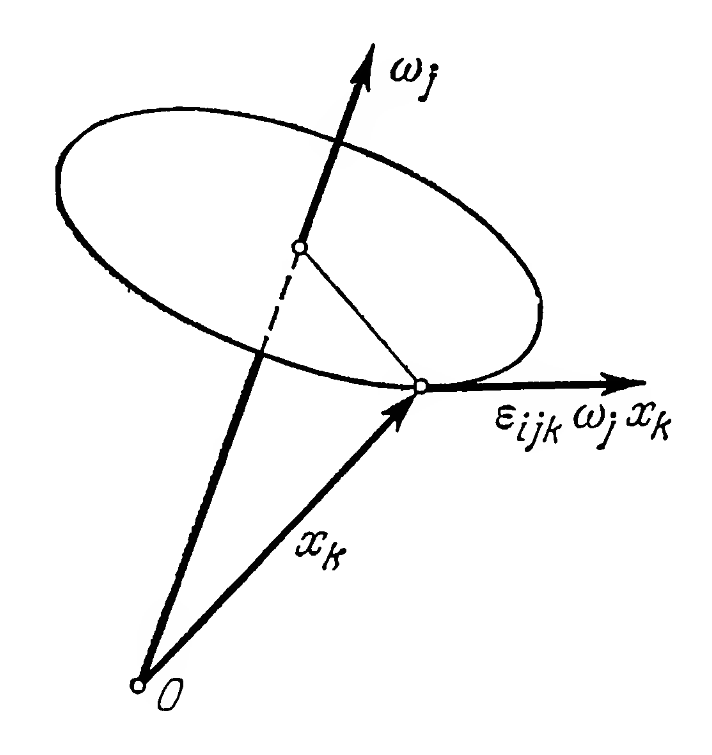


Рис. 1.29. Абсолютная производная вектора x_k, не изменяющегося во вращающейся системе координат.

Во втором случае x_k остается неизменным во вращающейся системе (т. е. $x'_k=\text{const}$); тогда для неподвижного наблюдателя конец вектора движется в направлении, обусловленном вращением системы с угловой скоростью ω_j.

Если применить формулу (1.55) к вектору самой угловой скорости, то получим

$$\frac{d\omega_i}{dt}=\frac{d'\omega'_i}{dt}. \tag{1.56}$$

1.5. Основы кинетики

1.5.1. Энергия и кинетический момент. Энергией движения или кинетической энергией материальной частицы dm называют величину

$$dT={}^1/_2\, v^2\, dm={}^1/_2\, \dot{y}^2\, dm={}^1/_2\, \dot{y}_i\dot{y}_i\, dm.$$

Здесь y_i — радиус-вектор частицы. Чтобы получить кинетическую энергию T системы, это выражение следует проинтегрировать по всем входящим в нее частицам. Для твердого тела, учитывая формулу (1.38), определяющую скорость частицы dm, получаем

$$2T = \int [\dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k][\dot{x}_i + \varepsilon_{ilm}\omega_l z_m]\,dm.$$

Перемножив и введя обозначения

$$\int dm = m \quad \text{и} \quad \int z_i\,dm = mz_i^S,$$

имеем

$$2T = m\dot{x}_i\dot{x}_i + 2m\dot{x}_i\varepsilon_{ijk}\omega_j z_k^S + \int \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k \varepsilon_{ilm}\omega_l z_m\,dm. \tag{1.57}$$

Здесь m — масса всего тела, а z_i^S — радиус-вектор центра масс, проведенный из какого-либо начала, взятого в теле. Таким образом, кинетическая энергия твердого тела состоит из трех слагаемых. Первое из них представляет собой энергию поступательного движения, третье — энергию вращения. Средний член зависит как от поступательного, так и от вращательного движения тела. Однако он обращается в нуль в двух важных случаях:

1) когда в качестве начала радиусов-векторов в теле взята его неподвижная точка; тогда $\dot{x}_i = 0$;

2) когда в качестве этого начала взят центр масс S тела; тогда $z_i^S = 0$.

Ниже мы исследуем более подробно важную для движения гироскопа часть энергии, обусловленную вращательным движением. Она остается единственной, если в (1.57) положить $\dot{x}_i = 0$. Подынтегральное выражение в последнем члене (1.57) можно, учитывая соотношения, полученные в § 1.2, преобразовать к виду

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\omega_j\omega_l z_k z_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm})\,\omega_j\omega_l z_k z_m =$$
$$= \omega_j\omega_j z_k z_k - \omega_j\omega_k z_j z_k = \omega_i\omega_j\,(z_k z_k\delta_{ij} - z_i z_j).$$

Из (1.57) с учетом (1.13) при $\dot{x}_i = 0$ следует

$$2T = \Theta_{ij}\omega_i\omega_j, \tag{1.58}$$

или в развернутом виде

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2D\omega_2\omega_3 - 2E\omega_3\omega_1 - 2F\omega_1\omega_2. \tag{1.59}$$

Следовательно, кинетическая энергия является квадратичной формой проекций вектора ω_i. Если систему координат связать с телом, то осевые и центробежные моменты инерции будут постоянными.

Формулы (1.58) и (1.59) будут формально идентичны формулам (1.25) и (1.26), если заменить ω_i на y_i. Подобно тому как

формулы (1.25) и (1.26) можно было толковать как уравнения эллипсоида инерции, так и формулы (1 58) и (1.59) можно принять за уравнения, определяющие некоторый эллипсоид. Он называется *эллипсоидом энергии*. Этот эллипсоид можно представить как геометрическое место концов векторов ω_i, отложенных от неподвижной точки, которым соответствует заданное значение энергии T.

Уравнение эллипсоида энергии принимает особенно простой вид, если привести его к главным осям инерции тела. Тогда $D' = E' = F' = 0$ и вместо (1.59) из (1.58) следует

$$2T = A'\omega_1'^2 + B'\omega_2'^2 + C'\omega_3'^2, \tag{1.60}$$

или

$$\left(\frac{\omega_1'}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2'}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_3'}{a_3}\right)^2 = 1,$$

где полуоси эллипсоида равны

$$a_1 = \sqrt{2T/A'} = \sqrt{2T/m}\,\rho_1, \quad a_2 = \sqrt{2T/B'} = \sqrt{2T/m}\,\rho_2,$$
$$a_3 = \sqrt{2T/C'} = \sqrt{2T/m}\,\rho_3.$$

Сравнив уравнения эллипсоида энергии (1.60) и эллипсоида инерции (1.27), видим, что эти эллипсоиды подобны.

Для дальнейших расчетов потребуются формулы кинетической энергии, в которых она выражена через углы Эйлера или через кардановы углы. Эти выражения легко получить, применяя полученные в п. 1.4.3 формулы для проекций угловой скорости на оси, связанные с телом. Будем ограничиваться случаем, когда оси координат совпадают с главными осями инерции; тогда, подставив (1.49) в (1.60), получим кинетическую энергию как функцию углов Эйлера

$$2T = A(\dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi)^2 + B(\dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi)^2 + C(\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta)^2. \tag{1.61}$$

Отсюда для симметричного гироскопа ($A = B$)

$$2T = A(\dot\psi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)^2. \tag{1.62}$$

Подобным же образом, подставив (1.51) в (1.60), получим кинетическую энергию как функцию кардановых углов

$$2T = A(\dot\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dot\beta \sin\gamma)^2 + B(-\dot\alpha \cos\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma)^2 + C(\dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma)^2. \tag{1.63}$$

Для симметричного гироскопа ($A = B$)

$$2T = A(\dot\alpha^2 \cos^2\beta + \dot\beta^2) + C(\dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma)^2. \tag{1.64}$$

В теории гироскопов наряду с энергией, являющейся скалярной величиной, важное значение имеет прежде всего *кинетический момент*. Кинетический момент, называемый также вращательным импульсом или моментом импульса, это вектор, который мы будем обозначать буквой H_i. Если

$$dI_i = \dot{y}_i\, dm$$

есть количество движения материальной частицы dm (рис. 1.30), то кинетический момент этой частицы относительно начала O не-

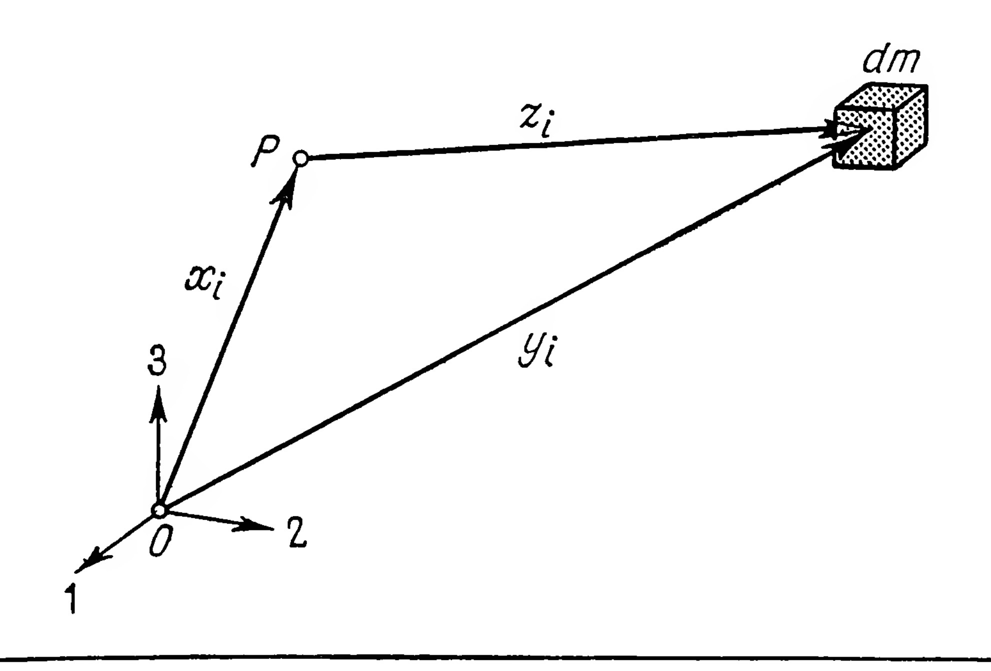


Рис. 1.30. К выводу выражения для кинетического момента

подвижной системы координат 1, 2, 3 определяется выражением

$$dH_i^O = \varepsilon_{ijk} y_j\, dI_k = \varepsilon_{ijk} y_j \dot{y}_k\, dm.$$

Интегрируя по всему объему тела, полагая $y_i = x_i + z_i$ и учитывая (1.38), получаем

$$H_i^O = \varepsilon_{ijk} x_j I_k + m\varepsilon_{ijk} z_j^S \dot{x}_k + \Theta_{ij}^P \omega_j; \tag{1.65}$$

здесь через m обозначена вся масса тела и

$$I_i = m\dot{y}_i^S = m\left(\dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k^S\right)$$

есть количество движения тела. Вектор z_i^S направлен из какой-либо точки P тела, называемой полюсом, к центру масс. Для тензора инерции, отнесенного к точке P, получаем после перемены некоторых индексов

$$\Theta_{ij}^P = \int \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jnl} z_k z_n\, dm = \int (\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kj})\, z_k z_n\, dm = \int (\delta_{ij} z_k z_k - z_i z_j)\, dm. \tag{1.66}$$

Согласно (1.65), кинетический момент твердого тела состоит из трех частей. Первый член суммы выражает кинетический момент,

возникающий вследствие движения центра масс S, третий член — кинетический момент от вращения тела вокруг полюса. Средний член зависит как от положения, так и от скорости полюса P. Этот смешанный член обращается в нуль в двух важных случаях:

1) когда в качестве полюса взят центр масс $S\,(z_i^S = 0)$;

2) когда полюс P является неподвижной точкой $(\dot{x}_i = 0)$.

Исследуем теперь подробней ту важную для гироскопа составляющую кинетического момента, которая обусловлена лишь вращательным движением. Она остается, если в (1.65) положить $\dot{x}_i = x_i = 0$. В данном случае для кинетического момента имеем

$$H_i = \Theta_{ij}\omega_j, \tag{1.67}$$

причем проекции на оси, связанные с телом, равны

$$\begin{aligned} H_1' &= A'\omega_1' - F'\omega_2' - E'\omega_3', \\ H_2' &= -F'\omega_1' + B'\omega_2' - D'\omega_3', \\ H_3' &= -E'\omega_1' - D'\omega_2' + C'\omega_3'. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Если оси координат совпадают с главными осями инерции, то

$$H_1' = A'\omega_1', \qquad H_2' = B'\omega_2', \qquad H_3' = C'\omega_3'. \tag{1.69}$$

Отсюда видно, что в общем случае вектор H_i не совпадает по направлению с вектором ω_i. Эти векторы коллинеарны лишь в том случае, когда вектор ω_i направлен по одной из главных осей инерции тела. Об этом подробней будет сказано в п. 1.5.2.

Как и при рассмотрении выражений (1.59) и (1.60) для энергии, можно задаться вопросом о геометрическом месте концов всех векторов ω_i, для которых получается одна и та же заданная величина кинетического момента. Из условия $H = \text{const}$, полагая притом, что оси координат совпадают с главными осями инерции тела, получаем уравнение

$$H^2 = H_iH_i = (A'\omega_1')^2 + (B'\omega_2')^2 + (C'\omega_3')^2 = \text{const}. \tag{1.70}$$

Это уравнение *кинетического эллипсоида*, полуоси которого равны

$$b_1 = H/A', \qquad b_2 = H/B', \qquad b_3 = H/C'.$$

Сравнивая это выражение с (1.60) и (1.27), заключаем, что кинетический эллипсоид не подобен эллипсоиду энергии (следовательно, и эллипсоиду инерции).

Из выражений для энергии (1.58) и для кинетического момента (1.67) можно вывести соотношения, которые очень полезны для последующих рассуждений. Во-первых, можно, учитывая (1.67), написать

$$2T = \Theta_{ij}\omega_i\omega_j = H_i\omega_i. \tag{1.71}$$

Согласно правилам дифференцирования квадратичной формы, отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial\omega_k}(2T)=\Theta_{kj}\omega_j+\Theta_{ik}\omega_i=2\Theta_{ki}\omega_i=2H_k.$$

Итак,

$$\partial T/\partial\omega_i=H_i. \tag{1.72}$$

Следовательно, вектор кинетического момента является градиентом энергии T (по проекциям вектора ω_i). И обратно, вектор угловой скорости ω_i может быть вычислен как градиент функции T, образуемый при дифференцировании по составляющим H_i. Чтобы показать это, введем в рассмотрение линейную векторную функцию

$$\omega_i=\psi_{ij}H_j.$$

Учитывая (1.67), получаем

$$H_i=\Theta_{ij}\psi_{jk}H_k, \qquad \text{или} \qquad \Theta_{ij}\psi_{jk}=\delta_{ik}.$$

Так как Θ_{ij} и δ_{ij} — симметричные тензоры, то и ψ_{ij} является симметричным тензором. Но отсюда следует, что

$$2T=H_i\omega_i=H_i\psi_{ij}H_j=\psi_{ij}H_iH_j$$

и

$$\frac{\partial}{\partial H_k}(2T)=\psi_{kj}H_j+\psi_{ik}H_i=2\psi_{kj}H_j=2\omega_k.$$

Итак,

$$\frac{\partial T}{\partial H_i}=\omega_i. \tag{1.73}$$

1.5.2. Главные оси, ось вращения и кинетическая ось. *Главными осями*, точнее *главными осями инерции*, в п. 1.3.4 были названы связанные с телом оси, для которых центробежные моменты инерции D, E, F обращаются в нуль. Расположение в теле главных осей в общем случае не является очевидным, но у тел, однородных и обладающих правильной формой, они всегда совпадают с осями симметрии (если таковые имеются) или лежат в плоскостях симметрии. Так, главные оси однородного параллелепипеда (кирпича) относительно его центра параллельны ребрам параллелепипеда. Главные оси инерции однородного эллипсоида относительно его центра совпадают с его главными осями. Все тела вращения имеют ось симметрии, которая при однородном распределении масс является одновременно и главной осью инерции.

Ось симметрии часто называют также *осью фигуры*. При исследовании движения гироскопов представляет интерес как раз поведение оси фигуры, так как в большинстве случаев именно она непосредственно видна и ее движения легко измерить. Каждая ось симметрии или ось фигуры тела с однородным распределением масс является одновременно и главной осью инерции, но, напротив, не каждая главная ось инерции является осью симметрии или осью фигуры.

Наряду с главной осью инерции, осью фигуры и осью симметрии важное значение имеют ось вращения и кинетическая ось.

Ось вращения определяется как геометрическое место точек движущегося тела, скорость которых в определенный момент времени равна нулю. Ось вращения всегда совпадает с направлением вектора ω_i мгновенной угловой скорости.

Кинетическая ось определяется как ось, имеющая направление вектора H_i кинетического момента.

В силу соотношения $H_i = \Theta_{ij}\omega_j$ направление кинетической оси зависит от направления оси вращения и от распределения масс в теле, т. е. от тензора инерции Θ_{ij}. Указанные оси совпадают лишь тогда, когда они направлены по главной оси инерции. Это свойство одновременно может быть принято в качестве *динамического определения главных осей*:

Главные оси твердого тела характеризуются тем, что при вращении тела вокруг этих осей векторы угловой скорости и кинетического момента направлены одинаково.

Это определение эквивалентно тому, которое было дано ранее с помощью понятий геометрии масс (п. 1.3.4); отсюда с учетом (1.68) вытекают следующие результаты:

1. Тело с тремя различными главными моментами инерции имеет три главные оси. Только в том случае, когда вектор ω_i совпадает с одним из этих направлений и, следовательно, две из трех компонент ω_1', ω_2' и ω_3' этого вектора равны нулю, имеем $H_i \| \omega_i$.

2. Если два главных момента инерции (например, A' и B') одинаковы, то все оси, лежащие в главной плоскости $1'$-$2'$, являются главными. Из условий $A' = B'$ и $\omega_3' = 0$ сразу следует, что $H_1' : H_2' = \omega_1' : \omega_2'$, т. е. что $H_i \| \omega_i$.

3. Если $A' = B' = C'$, то любая ось является главной. В этом случае $H_1' : H_2' : H_3' = \omega_1' : \omega_2' : \omega_3'$; следовательно, $H_i' \| \omega_i'$.

Из того что моменты инерции всегда положительны, следует, согласно (1.69), что векторы угловой скорости и кинетического момента лежат в одинаковых октантах, так что угол между ними никогда не может стать больше $\pi/2$. Связь между этими векторами можно выяснить более подробно, прибегнув к построению, предложенному Пуансо. Он использует интерпретацию эллипсоида энергии как геометрического места концов угловой скорости ω_i, соответствующих постоянному значению энергии T; см. (1.60). Если провести плоскость, касательную к эллипсоиду энергии в точке P (рис. 1.31), то перпендикуляр, опущенный из центра эллипсоида на эту плоскость, даст направление вектора кинетического момента H_i. Из (1.60) получается уравнение этой плоскости:

$$2T = A'\omega_1'^P\omega_1' + B'\omega_2'^P\omega_2' + C'\omega_3'^P\omega_3'. \tag{1.74}$$

Здесь ω_i^P — вектор, проведенный из начала координат в точку P, а вектор ω_i проведен в любую точку касательной плоскости. Так как направляющие косинусы нормали к поверхности $f(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ пропорциональны производным $\partial f / \partial x_i$, направляющие косинусы нормали к касательной плоскости (1.74) пропорциональны величинам $A'\omega_1'^P$, $B'\omega_2'^P$, $C'\omega_3'^P$, а следовательно, и величинам H_1', H_2', H_3'. Итак, вектор H_i направлен перпендикулярно рассматриваемой касательной плоскости.

Для симметричного гироскопа, когда, например, $A' = B'$, взаимное расположение различных осей может быть представлено

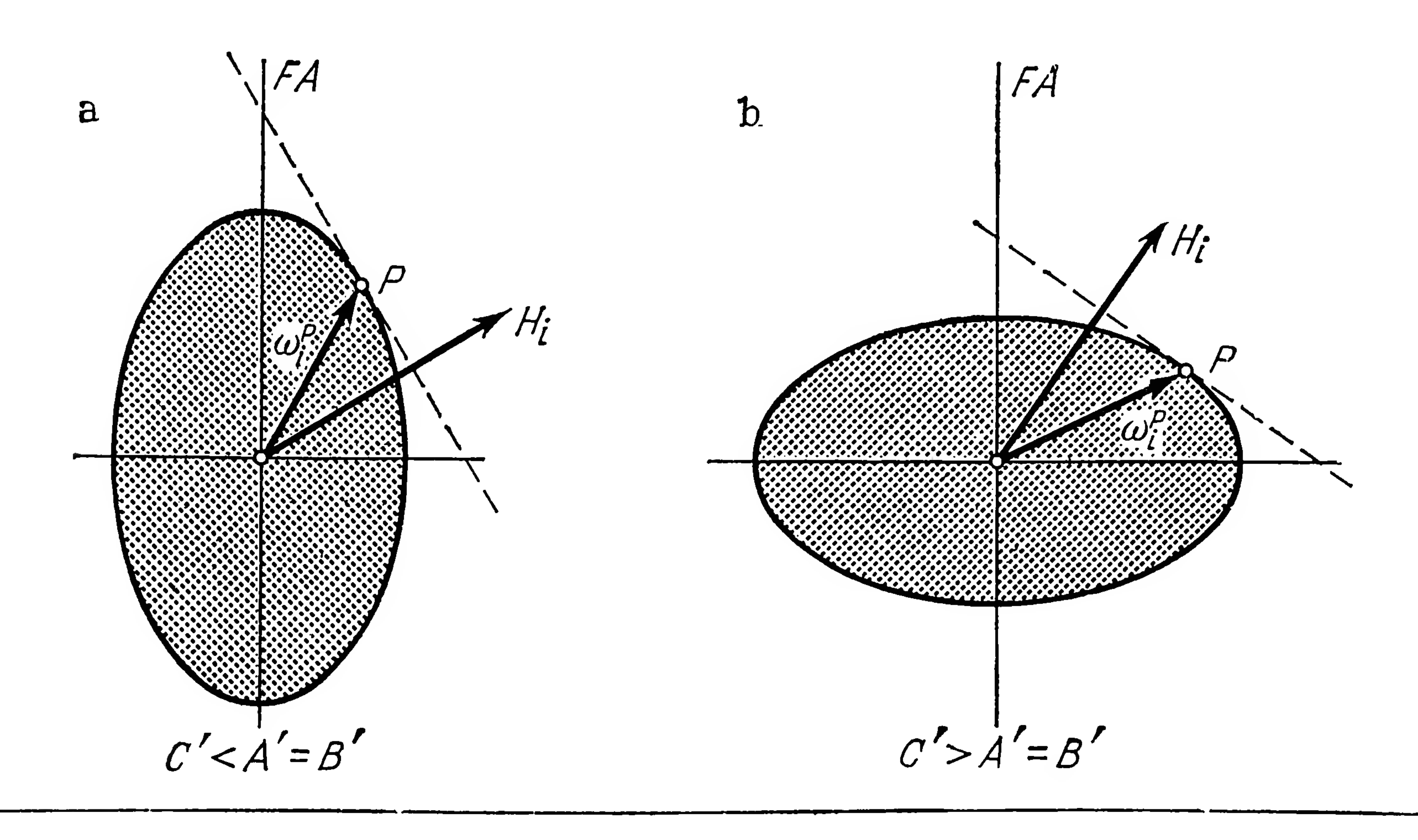


Рис. 1.31. Расположение трех осей (оси фигуры FA, оси вращения ω_i и кинетической оси H_i) при эпициклоидальном (а) и перициклоидальном (b) движении.

наглядно, так как при этом ось фигуры (FA), ось вращения (ω_i) и кинетическая ось (H_i) лежат в одной плоскости. На рис. 1.31 изображено сечение этой плоскостью эллипсоида инерции или подобного ему эллипсоида энергии. В случае «а» оси фигуры соответствует длинная ось эллипсоида и, следовательно, наименьший главный момент инерции $C' < A' = B'$. Гироскоп вытянут вдоль этой оси («эпициклоидальный» случай). Здесь ось вращения всегда лежит между осью фигуры и кинетической осью. В случае «b» $C' > A' = B'$; следовательно, гироскоп сплюснут вдоль оси фигуры («перициклоидальный» случай). При этом кинетическая ось всегда лежит между осью фигуры и осью вращения. Эти свойства не зависят от ω, так как при изменении величины угловой скорости получается только подобный (увеличенный или уменьшенный) эллипсоид энергии,

Из построения, приведенного на рис. 1.31, видно, что ω_i и H_i могут совпадать лишь тогда, когда вектор ω_i лежит на главной оси или когда в меридиональном сечении эллипс превращается в круг. Последнее имеет место в случае шарового гироскопа.

1.5.3. Теоремы о кинетическом моменте и кинетической энергии. Важнейшая теорема теории гироскопов — теорема о кинетическом моменте. В неподвижной системе отсчета ее можно записать так:

$$dH_i/dt = M_i. \qquad (1.75)$$

Словами: абсолютная производная по времени от кинетического момента H_i равна главному моменту M_i внешних сил.

Теорему о кинетическом моменте следует рассматривать как самостоятельную основную теорему механики[1]). Ее не только не обязательно, но и не во всех случаях возможно выводить из известных основных ньютоновых законов механики (см., например, Трусделл [18]).

Так как часто бывает нужно применять теорему о кинетическом моменте в системах отсчета, движущихся и имеющих начало в точке P (рис. 1.30), мы подставим (1.65) в (1.75) и получим

$$\frac{dH_i^O}{dt} = \varepsilon_{ijk}(\dot{x}_j I_k + x_j \dot{I}_k) + m\varepsilon_{ijk}(\dot{z}_j^S \dot{x}_k + z_j^S \ddot{x}_k) + \frac{d}{dt}(\Theta_{ij}^P \omega_j) =$$

$$= M_i^O = M_i^P + \varepsilon_{ijk} x_j F_k.$$

Здесь F_k — главный вектор внешних сил. Из теоремы о количестве движения системы, гласящей, что $\dot{I}_i = F_i$, следует

$$\varepsilon_{ijk} x_j \dot{I}_k = \varepsilon_{ijk} x_j F_k.$$

Если далее учесть равенство

$$I_i = m\dot{y}_i^S = m(\dot{x}_i + \dot{z}_i^S),$$

определяющее вектор количества движения, то получим

$$\varepsilon_{ijk}(\dot{x}_j I_k + m\dot{z}_j^S \dot{x}_k) = m\varepsilon_{ijk}(\dot{x}_j \dot{x}_k + \dot{x}_j \dot{z}_k^S + \dot{z}_j^S \dot{x}_k) = 0.$$

Таким образом, теорема о кинетическом моменте запишется в виде

$$\frac{d}{dt}(\Theta_{ij}^P \omega_j) + m\varepsilon_{ijk} z_j^S \ddot{x}_k = M_i^P. \qquad (1.76)$$

Равенство (1.76) выражает теорему о кинетическом моменте с учетом произвольного движения полюса P. Дифференцирование

[1]) Как известно, теорема о кинетическом моменте в форме (1.75), где M_i — момент *только внешних сил*, может быть выведена из второго закона Ньютона, если положить, что силы взаимодействия любых двух частиц механической системы не только равны по модулю и противоположно направлены, но и лежат на прямой, соединяющей эти частицы. Как считает Трусделл [18], нет оснований полагать, что этим свойством обладают любые внутренние силы системы, и в трудах Ньютона такого утверждения нет. Однако, утверждает Трусделл, теорема в форме (1.75) верна для любой материальной системы как самостоятельный закон природы. — *Прим. ред.*

производится здесь всюду в неподвижной системе координат. В двух случаях, а именно когда

1) полюс не обладает ускорением ($\ddot{x}_k = 0$) и

2) полюс совпадает с центром масс тела ($z_i^S = 0$),

это выражение приводится к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta_{ij}^P \omega_j\right) = M_i^P. \tag{1.77}$$

Теорема о кинетическом моменте в форме (1.75) *или* (1.77) *справедлива для системы отсчета, не обладающей ускорением* (*инерциальная система*), *или в случае, когда полюсом является центр масс, хотя бы он и обладал ускорением.*

Из (1.75) интегрированием получаем значение кинетического момента

$$H_i = H_{i0} + \int M_i \, dt. \tag{1.78}$$

Входящий в эту формулу интеграл называется *импульсом момента*. Следовательно, импульс момента, приложенного к покоящемуся твердому телу, равен кинетическому моменту, который приобретает это тело во вращательном движении. Кинетический момент и импульс момента — одинаково направленные векторы. Ось вращения в общем случае не совпадает с кинетической осью; это означает, что после приложения ударного момента тело может вращаться не вокруг той оси, относительно которой действовал момент. В этом сказывается анизотропия твердого тела по отношению к вращательному движению.

Мощность силы dF_i, приложенной к элементарной частице тела, равна $dN = \dot{y}_i dF_i$. Интегрированием по всему объему тела с учетом (1.38) получим

$$N = \int \dot{y}_i \, dF_i = \int (\dot{x}_i + \varepsilon_{ijk}\omega_j z_k) \, dF_i.$$

Так как

$$\varepsilon_{ijk}\omega_j \int z_k \, dF_i = \omega_i \varepsilon_{ijk} \int z_j \, dF_k = \omega_i M_i,$$

то

$$N = \dot{x}_i F_i + \omega_i M_i.$$

Таким образом, мощность складывается из двух слагаемых, соответствующих поступательному и вращательному движению тела. Выражение для *работы* получим интегрированием мощности. Далее,

$$dA = N \, dt = dT + dU + dE_D. \tag{1.79}$$

Это означает, что работа может идти на изменение кинетической энергии T, потенциальной энергии U (например, при поднимании центра тяжести или сжатии пружины) или на преодоление сопротивления движению, т. е. на изменение диссипативной энергии E_D. Для *консервативной системы* $E_D \equiv 0$ и $dA = 0$, т. е. внешние силы

отсутствуют или не производят работы[1]). Тогда из (1.79) следует *закон сохранения энергии*

$$T + U = E_0. \qquad (1.80)$$

Если потенциальные и диссипативные силы отсутствуют, $dU = dE_D = 0$, то работа сил идет только на изменение кинетической энергии.

Если ограничиться рассмотрением лишь твердого тела с неподвижной точкой ($\dot{x}_i = 0$), то с учетом равенства (1.75) получим

$$\frac{dT}{dt} = N = \omega_i M_i = \omega_i \frac{dH_i}{dt}.$$

С другой стороны, в силу равенства (1.71)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} H_i \omega_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dH_i}{dt}\omega_i + H_i \frac{d\omega_i}{dt}\right).$$

Сравнивая, получаем

$$\omega_i \frac{dH_i}{dt} = H_i \frac{d\omega_i}{dt}. \qquad (1.81)$$

Отсюда можно заключить, что для тела, на которое не действуют внешние силы, оба выражения, фигурирующие в равенстве (1.81), обращаются в нуль. Следовательно, при неравных нулю сомножителях

$$H_i \perp d\omega_i. \qquad (1.82)$$

1.5.4. Уравнения движения гироскопа. Пусть гироскоп имеет неподвижную точку. Случаи, когда такое ограничение отсутствует, будут рассмотрены позже (гл. 7 и 8).

Так как тело с неподвижной точкой имеет три степени свободы, необходимо иметь три уравнения, чтобы определить координаты тела как функции времени. Эти уравнения доставляются уже теоремой о кинетическом моменте, поскольку одно векторное уравнение соответствует трем скалярным.

Кроме того, для вывода уравнений движения можно использовать соотношения, связывающие кинетическую энергию T и координаты вектора ω_i. По первому из названных путей шел Эйлер, по второму — Лагранж. Уравнения движения Эйлера и Лагранжа широко применяются в теории гироскопов, и поэтому оба будут здесь рассмотрены.

а) Уравнения движения Эйлера. Выражение теоремы о кинетическом моменте в форме (1.75) или (1.77) в большинстве случаев

[1]) Если равенство (1.79) переписать в виде $N\,dt - dU - dE_D = dT$, то станет очевидным, что оно выражает теорему об изменении кинетической энергии, причем слагаемые $(-dU)$ и $(-dE_D)$ представляют собой работу потенциальных и диссипативных сил. Следовательно, здесь в отличие от предыдущего $N\,dt$ означает работу не всех сил, а лишь тех непотенциальных сил, которые не являются диссипативными. Поэтому оправдано, что автор называет консервативной такую систему, для которой $E_D = 0$ и $N\,dt = 0$. — *Прим. ред.*

неудобно для решения задач теории гироскопов. Это объясняется тем, что элементы тензора инерции Θ_{ij} в неподвижной системе отсчета, вообще говоря, не являются постоянными величинами. Поэтому лучше перейти к системе координат, связанной с телом, в которой элементы тензора инерции постоянны. Тогда теорема о кинетическом моменте может быть приведена с учетом уравнения (1.55) к виду

$$\frac{d}{dt}(\Theta'_{ij}\omega'_j) = \frac{d'}{dt}(\Theta'_{ij}\omega'_j) + \varepsilon_{ijk}\omega'_j\Theta'_{kl}\omega'_l = M'_i,$$

или

$$\Theta'_{ij}\frac{d'\omega'_j}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega'_j\Theta'_{kl}\omega'_l = M'_i. \qquad (1.83)$$

Это векторная форма *динамических уравнений Эйлера*. Согласно сказанному ранее, штрих над знаком дифференцирования означает, что производную следует вычислять в системе, связанной с телом.

Скалярные уравнения в общем виде могут быть легко получены из (1.83) проектированием векторов на оси; мы приведем их только для того важного случая, когда в качестве осей координат взяты главные оси инерции. Если теперь (а также и всюду далее) для величин, вычисленных в подвижной системе, опустить штрихи, то получим уравнения

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned} \qquad (1.84)$$

Для определенных задач может оказаться целесообразным выбирать как-либо иначе систему координат. Об этом будет сказано подробней в § 5.4.

Применяя соотношения (1.72) и (1.73), можно ввести функцию T (кинетическую энергию) в уравнения Эйлера. Из (1.75) получаем

$$\frac{dH_i}{dt} = \frac{d'H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = M_i, \qquad (1.85)$$

откуда

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial T}{\partial H_j}\frac{\partial T}{\partial \omega_k} = M_i. \qquad (1.86)$$

b) *Уравнения движения Лагранжа.* С помощью формализма Лагранжа уравнения движения физической системы могут быть получены из выражения кинетической энергии.

Если, например, кинетическая энергия T и потенциальная U известны как функции указанных выше переменных x и их производных $\dot{x}$, то в наиболее простом случае консервативной системы

уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_\nu}+\frac{\partial U}{\partial x_\nu}=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (1.87)$$

Индекс ν в данном случае относится к скалярным переменным и принимает значения от 1 до n, если имеется n переменных. Переменные должны быть обобщенными координатами, т. е. должны быть независимыми и должны однозначно определять положение системы. Для гироскопа с неподвижной точкой такими координатами являются, например, углы Эйлера ψ, ϑ, φ или кардановы углы α, β, γ. Напротив, компоненты угловой скорости ω_1, ω_2, ω_3 не могут служить обобщенными координатами. Это связано с тем обстоятельством (см. п. 1.4.3), что указанные координаты не являются голономными; интегрированием их невозможно однозначно определить положение тела. Поэтому уравнения (1.86) и (1.87), несмотря на их формальное сходство, имеют совершенно различный характер. Это сказывается в среднем члене уравнений.

Используя углы Эйлера $x_1=\psi$, $x_2=\vartheta$, $x_3=\varphi$ и учитывая, что $T=T(\psi,\ \vartheta,\ \varphi,\ \dot{\psi},\ \dot{\vartheta},\ \dot{\varphi})$ и $U=U(\psi,\ \vartheta,\ \varphi)$, из (1.87) получаем следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \psi}+\frac{\partial U}{\partial \psi}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \vartheta}+\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0.
\end{aligned} \qquad (1.88)$$

Эта система эквивалентна системе уравнений Эйлера (1.84). Последние можно получить из системы (1.88), если учесть кинематические соотношения [(1.49) без штрихов!]. Действуя таким образом, из (1.88/3) находим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\varphi}}=C\omega_3,\\
&\frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi}=A\omega_1\omega_2-B\omega_2\omega_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial \varphi}=-M_\varphi=-M_3;
\end{aligned}$$

следовательно,

$$C\dot{\omega}_3-(A-B)\,\omega_1\omega_2=M_3.$$

Чтобы получить два первых уравнения (1.84), нужно учесть соотношения между компонентами моментов:

$$\begin{aligned}
&M_\psi=M_1\sin\varphi\sin\vartheta+M_2\cos\varphi\sin\vartheta+M_3\cos\vartheta,\\
&M_\vartheta=M_1\cos\varphi-M_2\sin\varphi.
\end{aligned} \qquad (1.89)$$

Если в уравнения (1.88) подставить выражение общего вида (1.61) функции T, то получится сложная система нелинейных уравнений. Соответствующие вычисления здесь выполняться не будут. Уравнения значительно упрощаются для частного случая симметричного гироскопа. Из (1.88) с учетом (1.62) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)\dot\psi + C\cos\vartheta\,\dot\varphi] = -\frac{\partial U}{\partial\psi} = M_\psi, \\ &A\ddot\vartheta - (A-C)\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\psi^2 + C\sin\vartheta\,\dot\psi\dot\varphi = -\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = M_\vartheta, \\ &\frac{d}{dt}[C\cos\vartheta\dot\psi + C\dot\varphi] = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} = M_\varphi. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Вполне аналогичным образом, полагая в (1.87) $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$ и учитывая формулы (1.64), получаем из (1.87) систему уравнений в кардановых углах:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(A\cos^2\beta + C\sin^2\beta)\dot\alpha + C\sin\beta\,\dot\gamma] = -\frac{\partial U}{\partial\alpha} = M_\alpha, \\ &A\ddot\beta + (A-C)\sin\beta\cos\beta\,\dot\alpha^2 - C\cos\beta\,\dot\alpha\dot\gamma = -\frac{\partial U}{\partial\beta} = M_\beta, \\ &\frac{d}{dt}[C\sin\beta\dot\alpha + C\dot\gamma] = -\frac{\partial U}{\partial\gamma} = M_\gamma. \end{aligned} \tag{1.91}$$

Если моменты M_ψ и M_φ в уравнениях (1.90) и соответственно M_α и M_β в уравнениях (1.91) представляют собой функции только от времени (или равны нулю), то можно взять интеграл от выражений, стоящих в первых и третьих уравнениях. Это в значительной мере облегчит решение уравнений.

Глава 2

Свободный гироскоп с неподвижной точкой опоры

Свободным гироскопом называют такой гироскоп, для которого суммарный момент приложенных к нему внешних сил равен нулю. Исследование движения такого гироскопа — одна из классических проблем механики. Ее можно считать решенной полностью: аналитическим решением мы обязаны Эйлеру (1758), весьма наглядная геометрическая интерпретация движения гироскопа была

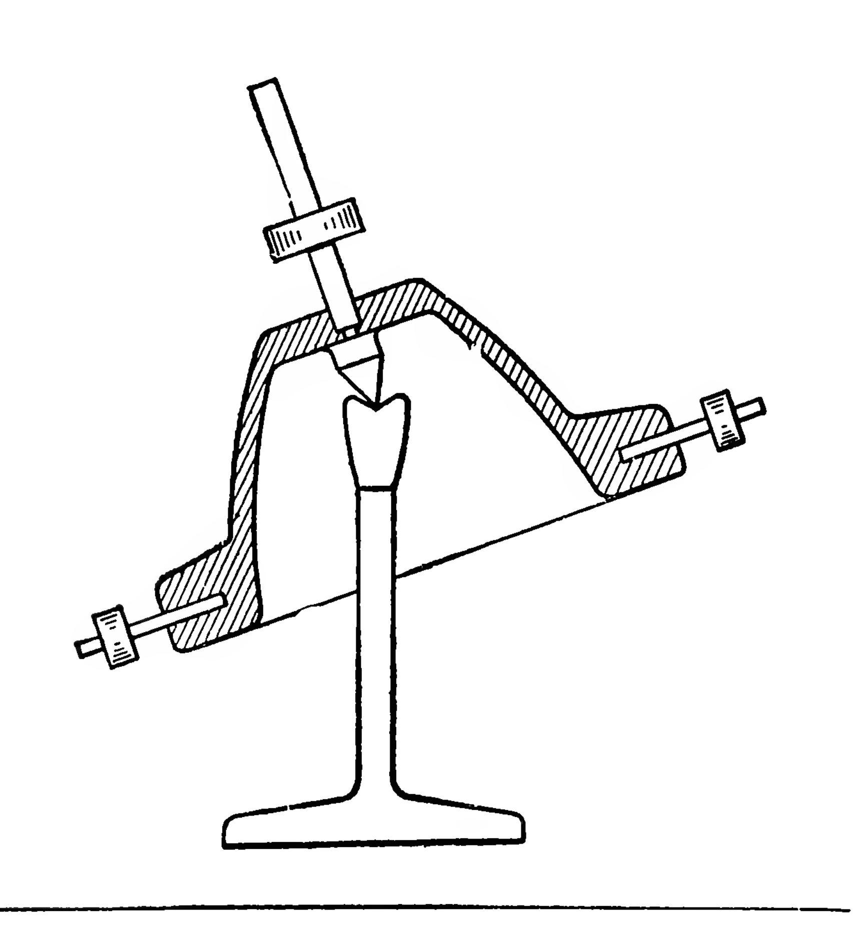


Рис. 2.1. Колоколообразный гироскоп, опирающийся острием.

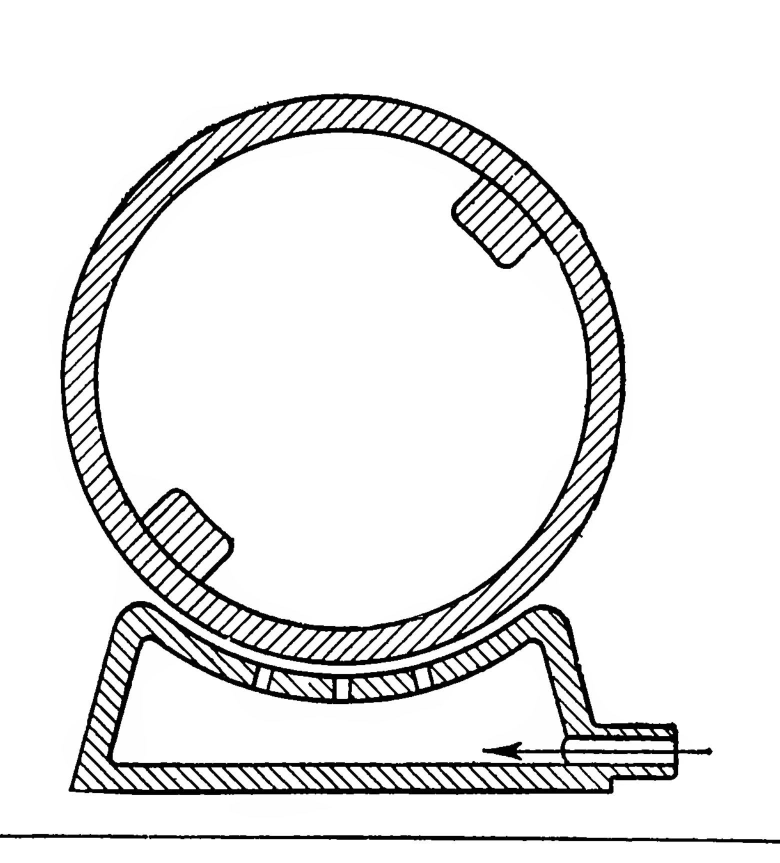


Рис. 2.2. Шаровидный гироскоп на воздушной опоре.

предложена Пуансо (1834). Последующие исследования привели к некоторым формальным упрощениям и уточнениям теории, однако не дали существенно новых результатов.

Гироскоп является свободным, например, в случае, когда точка опоры, вокруг которой вращается гироскоп, совпадает с его центром тяжести. В модели гироскопа, предложенной Максвеллом, это достигается тем, что колоколообразное тело опирается острием на подпятник (рис. 2.1). С помощью специальных юстировочных

винтов центр тяжести можно перемещать до совмещения его с точкой опоры. Более предпочтительно устройство, в котором тело, представляющее собой полый шар, помещено на воздушной опоре (рис. 2.2). Такая опора может быть выполнена с минимальным трением и позволяет наблюдать движение шара в течение продолжительного времени. В отличие от гироскопа Максвелла здесь поворот шара вокруг любой из трех осей не ограничен. Изменение распределения масс в этом устройстве достигается соответствующим размещением грузов внутри шара.

2.1. Геометрическая интерпретация движения гироскопа, предложенная Пуансо

Два интеграла уравнений движения свободного гироскопа могут быть найдены без труда. Из теоремы о кинетическом моменте (1.75) следует, что при $M_i = 0$

$$\frac{dH_i}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad H_i = \text{const}. \tag{2.1}$$

В силу этого *интеграла кинетического момента* в процессе движения как величина, так и направление H_i остаются неизменными.

Вследствие отсутствия внешних сил при рассматриваемом движении не может совершаться работа. Поэтому должна оставаться постоянной и кинетическая энергия T системы. Отсюда, исходя из (1.71), приходим к *интегралу энергии*

$$2T = H_i \omega_i = \text{const}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что конец вектора ω_i может двигаться лишь в плоскости, перпендикулярной вектору H_i, ибо в силу $H_i = \text{const}$ только в этом случае проекция ω_i на H_i оказывается постоянной, а значит, будет постоянно и скалярное произведение $H_i\omega_i$ (рис. 2.3). Плоскость, в которой движется конец P вектора ω_i, называется *неизменяемой плоскостью*. Она неподвижна в пространстве и отстоит от точки опоры F на расстояние $2T/H$.

Однако конец вектора ω_i лежит не только в неизменяемой плоскости, но одновременно и на поверхности связанного с телом эллипсоида энергии (1.60). Последний, согласно изложенному в п. 1.5.1, является геометрическим местом концов векторов ω_i, которому соответствует заданная постоянная кинетическая энергия T. Главные оси эллипсоида энергии одновременно являются главными осями тела, а его центр совпадает с точкой опоры F.

Движение тела может быть представлено как качение эллипсоида энергии по неизменяемой плоскости. Прежде всего ясно, что плоскость и эллипсоид должны иметь по меньшей мере одну общую точку, именно конец P вектора ω_i. То, что плоскость и эллипсоид касаются в точке P, а не пересекаются в ней, вытекает из установленного нами в п. 1.5.2 следующего факта: вектор H_i

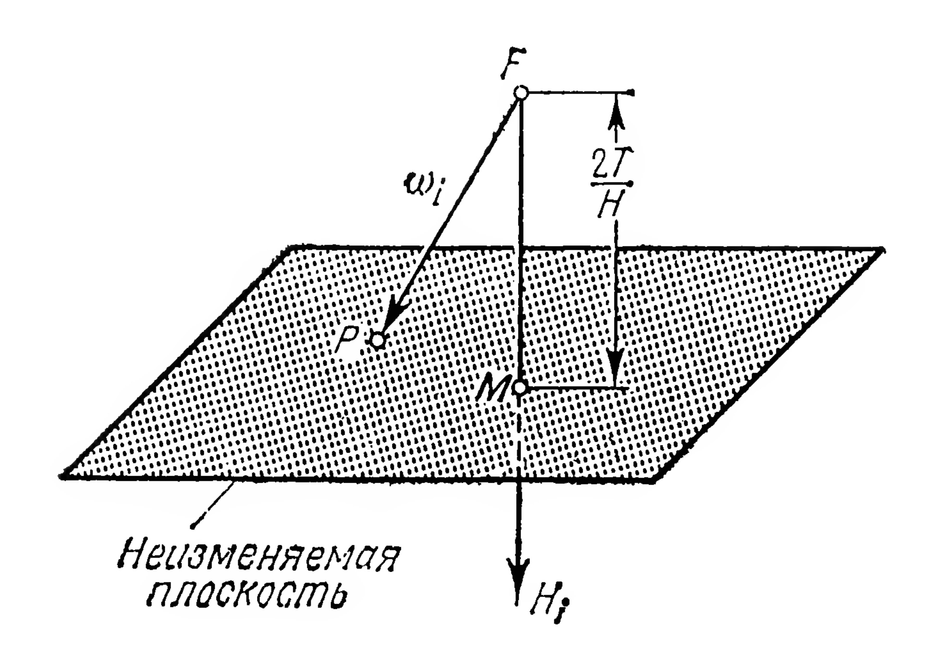


Рис. 2.3. Конец P вектора угловой скорости ω_i движется в неизменяемой плоскости.

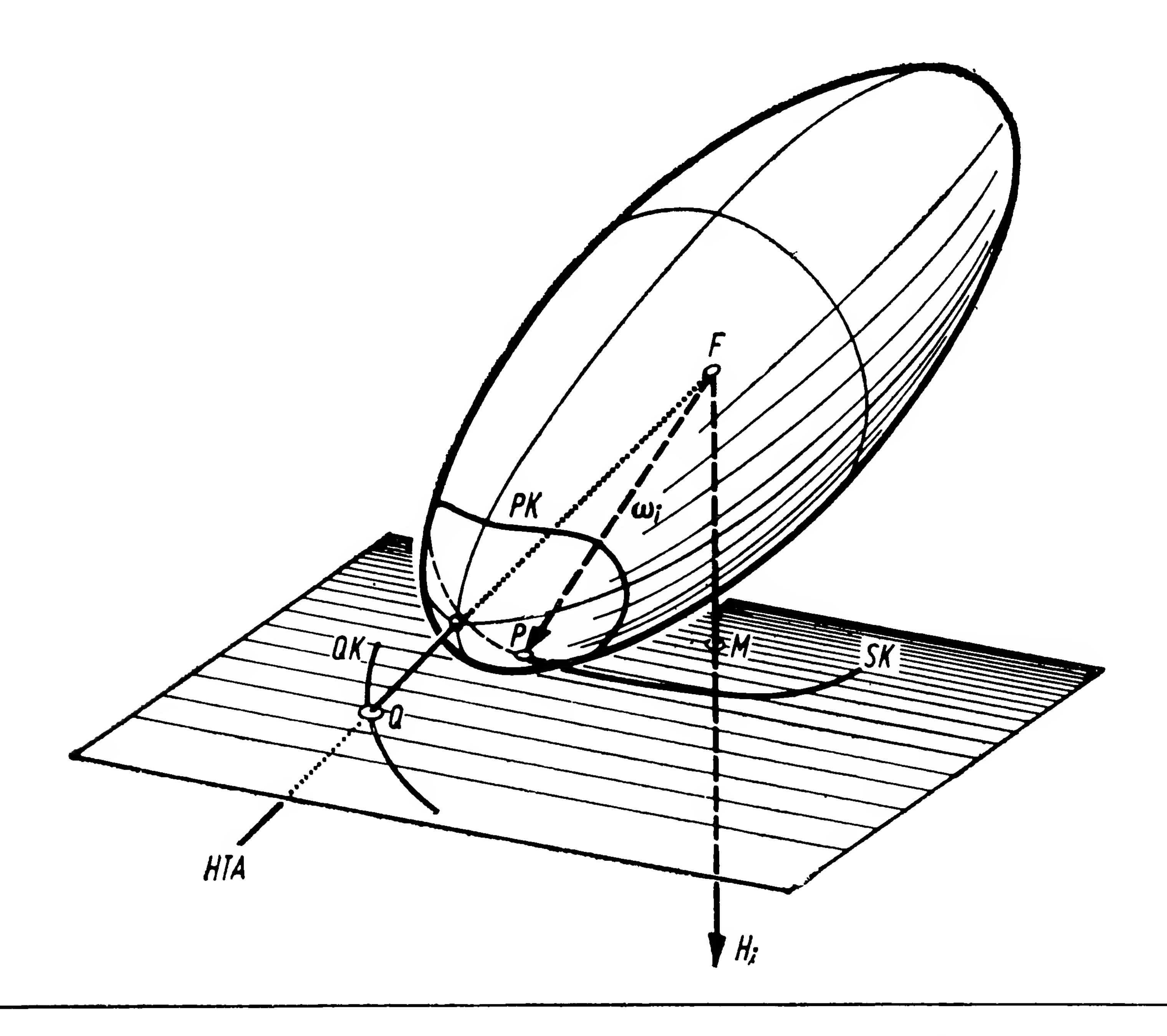


Рис. 2.4. Образование герполодии (SK) и траектории оси фигуры (QK) при качении эллипсоида энергии по неизменяемой плоскости.

постоянно перпендикулярен плоскости, касательной к эллипсоиду энергии в точке, совпадающей с концом вектора ω_i. Но если две плоскости проходят через одну и ту же точку P и одновременно перпендикулярны некоторому заданному направлению, то они совпадают. Таким образом, неизменяемая плоскость в то же время является касательной плоскостью к эллипсоиду энергии в точке P.

Эллипсоид катится по плоскости без скольжения потому, что точка P лежит на мгновенной оси и, следовательно, ее скорость равна нулю. При таком качении (рис. 2.4), которое называется иначе *движением Пуансо*, полюс P, лежащий на мгновенной оси, описывает на неизменяемой плоскости кривую SK, называемую *герполодией*, а на эллипсоиде энергии кривую PK, которая называется *полодией*. Одновременно точка пересечения Q главной оси инерции HTA, показанной на рис. 2.4, с неизменяемой плоскостью движется по некоторой кривой QK. Названные кривые дают наглядное представление о геометрических свойствах движения. Рассмотрим их более подробно.

2.1.1. Полодии. Полодии представляют собой замкнутые кривые на поверхности эллипсоида энергии. Они могут быть найдены как кривые пересечения этого эллипсоида с кинетическим эллипсоидом (1.70). Последний является геометрическим местом концов векторов ω_i, которым соответствует постоянное значение кинетического момента. Кинетический эллипсоид

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = H^2 \tag{2.3}$$

всегда более вытянут, чем эллипсоид энергии

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2T. \tag{2.4}$$

Выберем главные оси так, чтобы было $A > B > C$. Тогда, умножив (2.4) на A, а затем на C и сопоставив оба полученных выражения с (2.3), найдем

$$2TA \geqslant H^2 \geqslant 2TC.$$

Отсюда получаем следующие неравенства, связывающие полуоси a и b соответственно эллипсоида энергии и кинетического эллипсоида:

для малых полуосей

$$a_1^2 = \frac{2T}{A} \geqslant \frac{H^2}{A^2} = b_1^2,$$

для больших полуосей

$$a_3^2 = \frac{2T}{C} \leqslant \frac{H^2}{C^2} = b_3^2.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда вращение происходит либо вокруг оси 1, либо вокруг оси 3. В обоих случаях упомянутая кривая стягивается в точку. Если знак равенства содержится в первом соотношении, то кинетический эллипсоид охватывает эллипсоид энергии и касается его в обеих точках пересечения с осью 1. Знак равенства во втором соотношении означает, что кинетический эллипсоид вписан в эллипсоид энергии и касается его в обеих точках пересечения с осью 3.

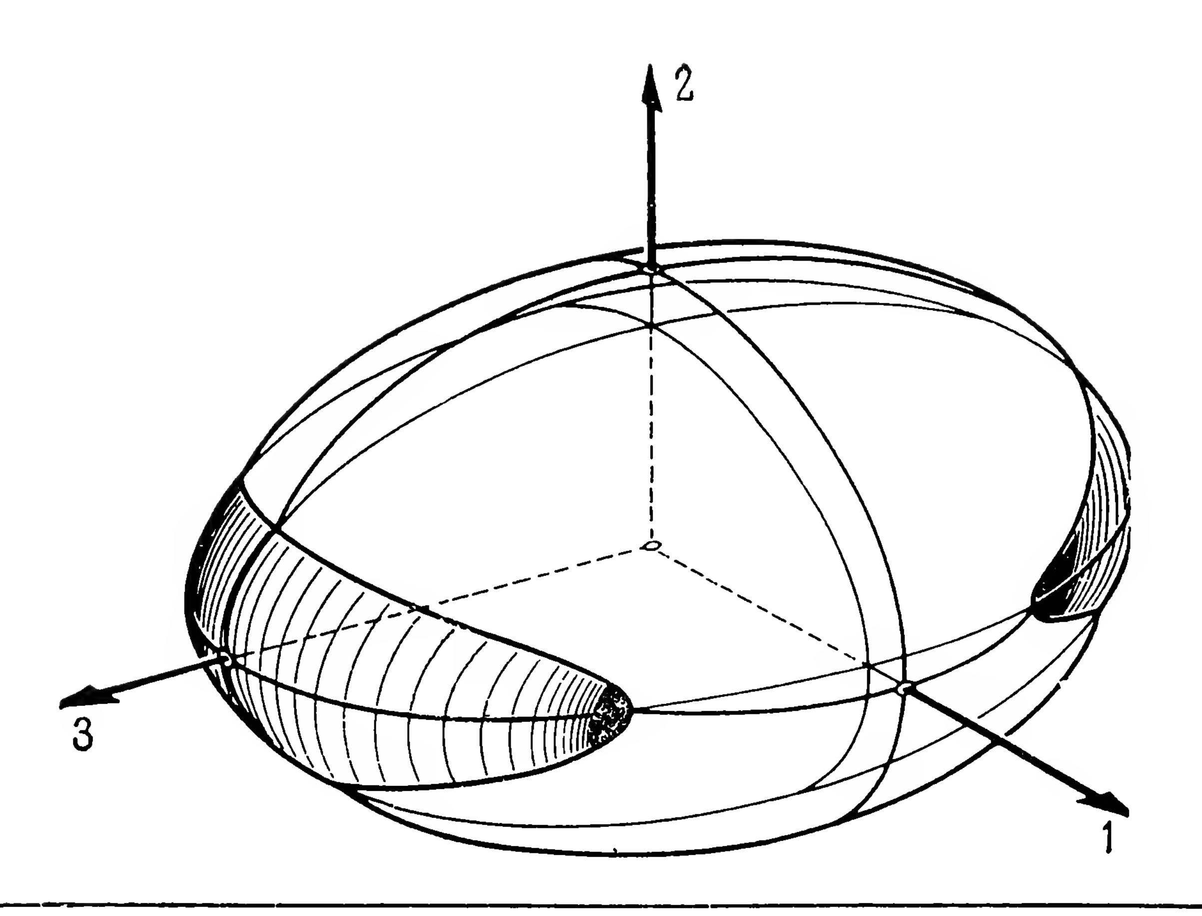


Рис. 2.5. Полодии как линии пересечения эллипсоида энергии и кинетического эллипсоида.

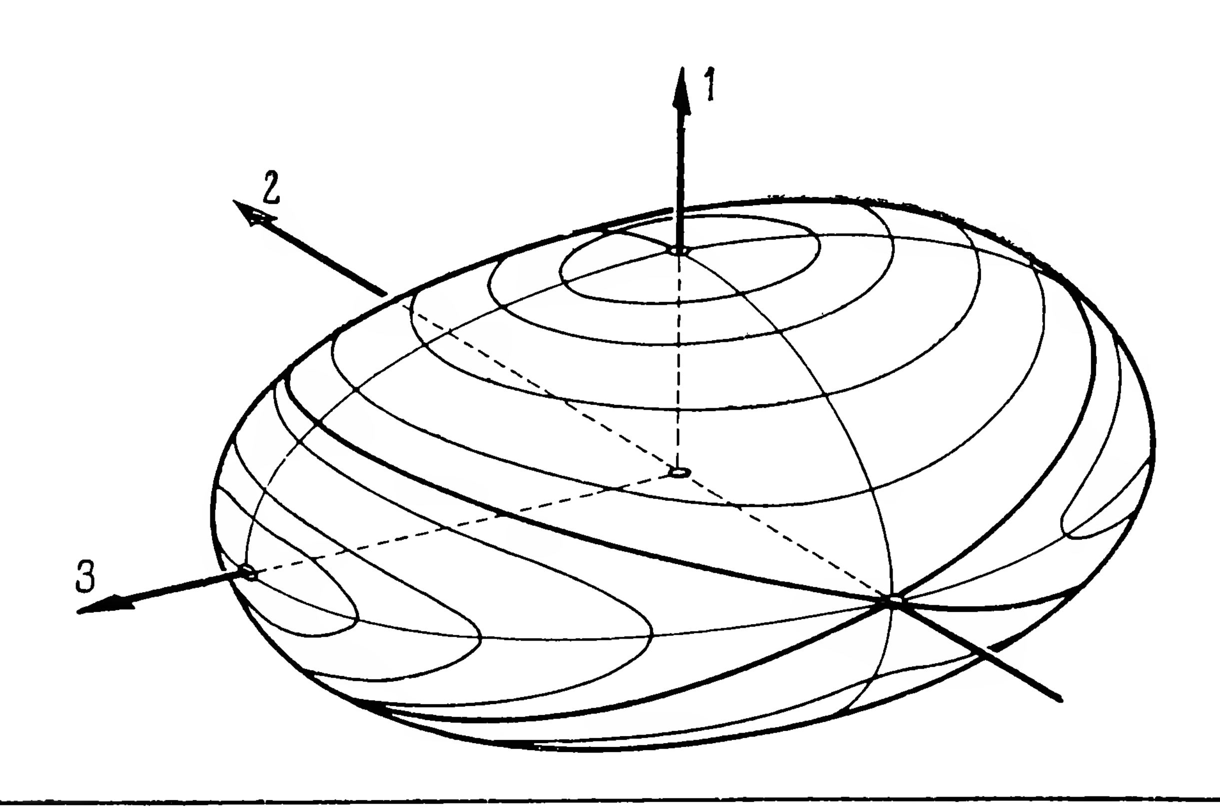


Рис. 2.6. Семейства полодий на эллипсоиде энергии.

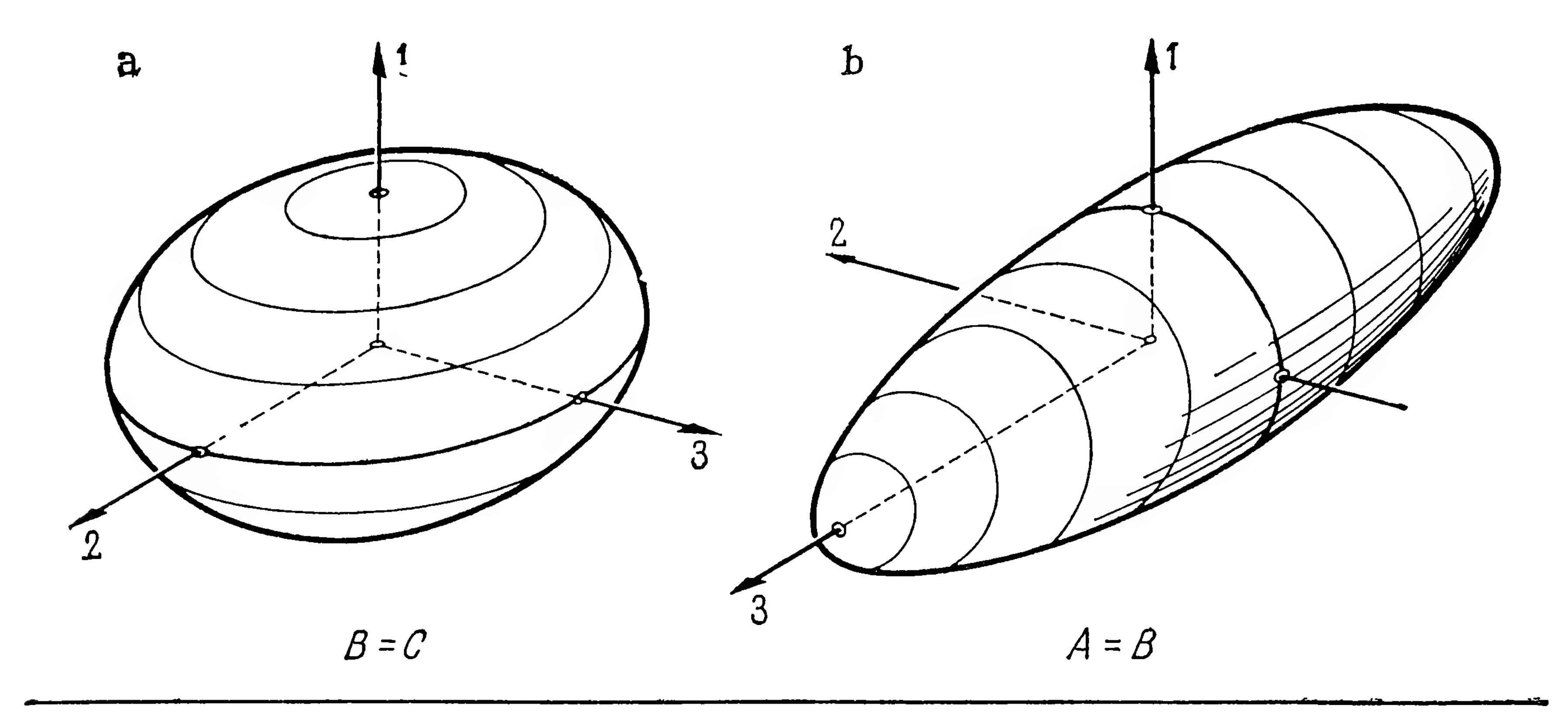


Рис. 2.7. Эллипсоид энергии и полодии сплюснутого (a) и вытянутого (b) симметричного гироскопа.

Полодии как кривые пересечения двух эллипсоидов (рис. 2.5) являются пространственными кривыми. Вид последних проще всего уяснить себе, если рассмотреть их проекции на главные плоскости. Это нетрудно сделать путем последовательного исключения составляющих угловой скорости из (2.3) и (2.4). В результате придем к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} 2TA - H^2 &= B(A-B)\,\omega_2^2 + C(A-C)\,\omega_3^2, \\ 2TB - H^2 &= -A(A-B)\,\omega_1^2 + C(B-C)\,\omega_3^2, \\ 2TC - H^2 &= -A(A-C)\,\omega_1^2 - B(B-C)\,\omega_2^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Левые части равенств содержат постоянные величины; в правых частях выражения в скобках положительны, ввиду того что $A > B > C$. Поэтому по знакам отдельных членов мы в состоянии судить о характере искомых проекций. Так, в плоскостях 1-2 и 2-3 это будут эллипсы, а в плоскости 1-3 — гиперболы. На рис. 2.6 в аксонометрическом изображении показаны полодии на эллипсоиде энергии. Они образуют два парных семейства замкнутых кривых, разделенных двумя пересекающимися граничными кривыми. В проекции на плоскость 1-3 граничные кривые вырождаются в прямые, которые являются асимптотами семейств гипербол, определяемых уравнением (2.5/2). Уравнение этих прямых имеет вид

$$\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}}\,\omega_3.$$

При $B = C$ угол наклона прямой равен нулю, а при $A = B$ он составляет $\pi/2$. В обоих случаях эллипсоид энергии есть эллипсоид вращения; в первом случае он по оси симметрии сплюснут, а во втором вытянут (рис. 2.7).

Если точки полодии соединить прямыми с центром эллипсоида, то образуется конус полодии. Конусы полодии не будут эллиптическими, однако это симметричные конусы, плоскости симметрии которых совпадают с главными плоскостями тела.

2.1.2. Герполодии. Сам способ образования герполодий (рис. 2.4) позволяет выявить некоторые общие их свойства. Это плоские симметричные кривые, завивающиеся вокруг центра, которым является точка M пересечения вектора кинетического момента с неизменяемой плоскостью. Хотя эти кривые состоят из конгруэнтных частей или симметричных участков, являющихся зеркальным отображением друг друга, они не обязательно замкнуты. Однако они заключены между двумя граничными концентрическими окружностями с центром в точке M, которых они попеременно касаются. Укажем без доказательства еще одно их свойство: герполодии не имеют ни точек перегиба, ни точек возврата.

Далее мы ограничимся определением радиусов R граничных окружностей. Пользуясь рис. 2.8, мы можем написать общее выражение:

$$R^2 = \omega^2 - (2T/H)^2. \qquad (2.6)$$

На основании геометрических свойств эллипсоида можно заключить, что экстремальные значения R достигаются тогда, когда ω_i

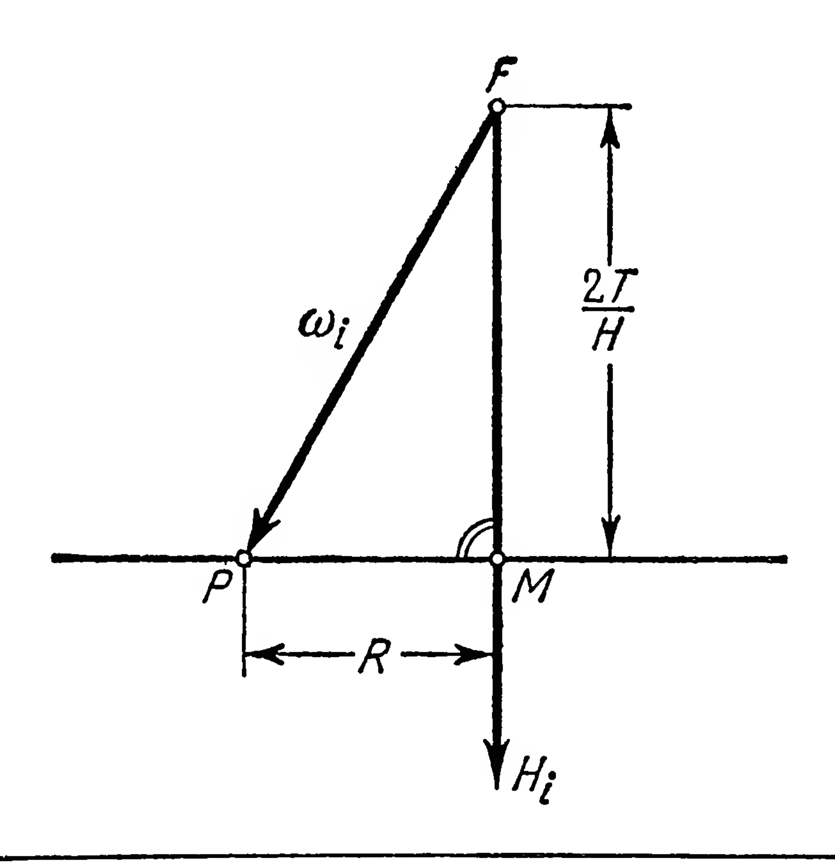


Рис. 2.8. К расчету герполодии.

оказывается в какой-либо главной плоскости. Здесь нужно различать два основных случая в зависимости от того, какому семейству принадлежит соответствующая полодия на эллипсоиде энергии (рис. 2.6):

a) движение, возмущенное по отношению к вращению вокруг большой оси эллипсоида (ось 3 на рис. 2.6), — *эпициклоидальный случай*; здесь $2TB > H^2 \geqslant 2TC$;

b) движение, возмущенное по отношению к вращению вокруг малой оси эллипсоида (ось 1 на рис. 2.6), — *перициклоидальный случай*; здесь $2TA \geqslant H^2 > 2TB$;

c) случай, промежуточный между a) и b); здесь $H^2 = 2TB$. Это тот случай, когда тело приводится во вращение вокруг средней оси эллипсоида (ось 2 на рис. 2.6). Ему соответствует граничная полодия, показанная на рис. 2.6.

Случай a). Здесь всегда $\omega_3 \neq 0$. Тогда получаем для

1) $\omega_1 = 0$ значение $R = R_{min}$,

2) $\omega_2 = 0$ значение $R = R_{max}$.

Из (2.3) и (2.4) при $\omega_1 = 0$ следует

$$B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = H^2, \qquad B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2T;$$

отсюда

$$\omega_2^2 = \frac{H^2 - 2TC}{B(B-C)}, \qquad \omega_3^2 = \frac{2TB - H^2}{C(B-C)}.$$

Подставив полученные равенства в (2.6), получим значение R_{min}, приведенное в нижеследующей таблице. Эта таблица содержит также результаты вычислений для всех остальных случаев, полученные совершенно аналогично.

Радиусы граничных окружностей для герполодий

Случай	R^2_{min}	R^2_{max}
a) $H^2 < 2TB$, эпициклоидальный	$\frac{(2TB - H^2)(H^2 - 2TC)}{BCH^2}$	$\frac{(2TA - H^2)(H^2 - 2TC)}{ACH^2}$
b) $H^2 > 2TB$, перициклоидальный	$\frac{(2TA - H^2)(H^2 - 2TB)}{ABH^2}$	$\frac{(2TA - H^2)(H^2 - 2TC)}{ACH^2}$
c) $H^2 = 2TB$, промежуточный	0	$\frac{2T(A-B)(B-C)}{ABC}$

Приведенная таблица позволяет сделать следующие заключения (см. также геометрическое описание в п. 2.1.1):

Случай a). При $H^2 = 2TC$ имеем $R_{min} = R_{max} = 0$, вращение происходит вокруг оси 3; при $A = B$ имеем $R_{min} = R_{max}$, гироскоп симметричен относительно оси 3, герполодии превращаются в окружности; при $H^2 = 2TB$ имеем $R_{min} = 0$ — промежуточный случай.

Случай b). При $H^2 = 2TA$ имеем $R_{min} = R_{max} = 0$, вращение происходит вокруг оси 1; при $B = C$ имеем $R_{min} = R_{max}$, гироскоп симметричен относительно оси 1, герполодии превращаются в окружности; при $H^2 = 2TB$ имеем $R_{min} = 0$ — промежуточный случай.

Случай c). При $A = B$ или $B = C$ имеем $R_{min} = R_{max} = 0$, гироскоп симметричен относительно оси 3 или оси 1.

2.1.3. Траектории оси фигуры. Наряду с герполодиями представляют также интерес кривые QK (рис. 2.4), по которым перемещается на неизменяемой плоскости точка пересечения с нею главной оси. Например, луч связанного с гироскопом источника света может прочертить такие кривые на экране, расположенном перпендикулярно кинетической оси. Назовем их *траекториями оси фигуры*. Сам способ образования этих кривых указывает на то, что они заключены между двумя граничными окружностями с радиусами r_{min} и r_{max}. Для определения последних воспользуемся

рис. 2.9, из которого видно, что

$$r = (2T/H)\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

При этом для случая a)

$$\mathrm{tg}\,\delta_{\min} = H_1/H_3 = A\omega_1/(C\omega_3) \qquad (\omega_2 = 0),$$
$$\mathrm{tg}\,\delta_{\max} = H_2/H_3 = B\omega_2/(C\omega_3) \qquad (\omega_1 = 0).$$

Исключив с помощью (2.3) и (2.4) соответствующие составляющие ω, получим значения радиусов, приведенные в следующей таблице.

Радиусы граничных окружностей для траекторий оси фигуры

Случай	$r^2_{\min}$	$r^2_{\max}$
a) $H^2 < 2TB$, эпициклоидальный	$\frac{4T^2}{H^2}\frac{A(H^2-2TC)}{C(2TA-H^2)}$	$\frac{4T^2}{H^2}\frac{B(H^2-2TC)}{C(2TB-H^2)}$
b) $H^2 > 2TB$, перициклоидальный	$\frac{4T^2}{H^2}\frac{C(2TA-H^2)}{A(H^2-2TC)}$	$\frac{4T^2}{H^2}\frac{B(2TA-H^2)}{A(H^2-2TB)}$
c) $H^2 = 2TB$, промежуточный	0	∞

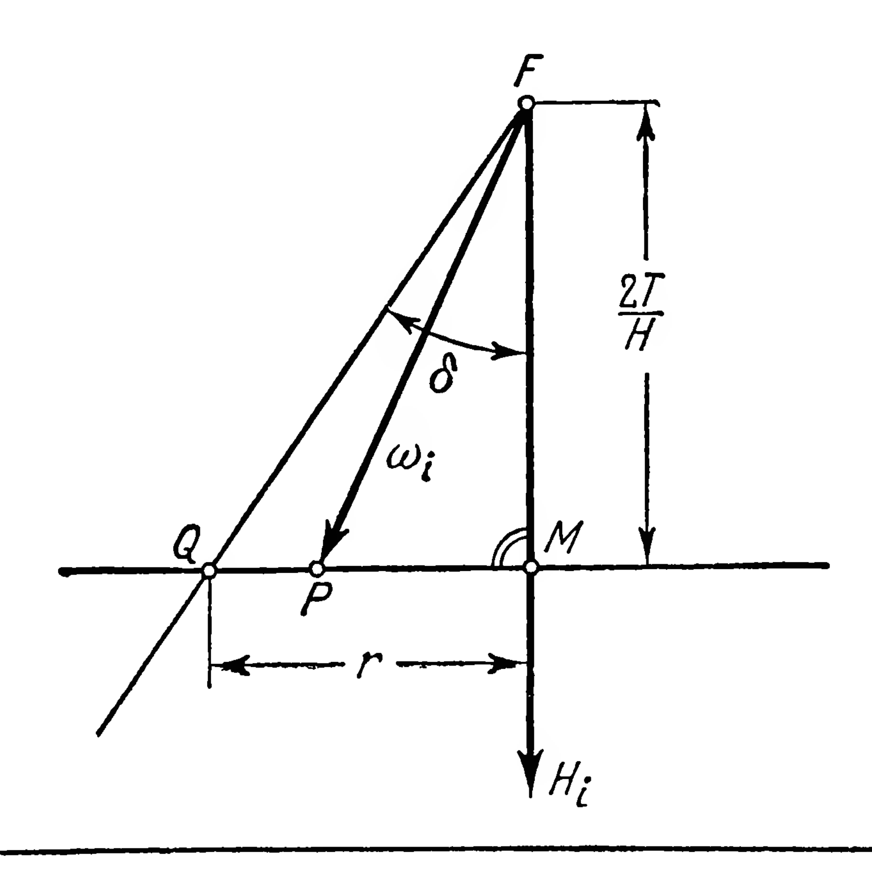


Рис. 2.9. К расчету траектории оси фигуры.

Для симметричного гироскопа $A = B$ (случай a)) или $B = C$ (случай b)) снова имеем $r_{\min} = r_{\max}$ и траектории превращаются в окружности. Примечательно, что $r_{\max} \to \infty$ для промежуточного случая ($H^2 = 2TB$).

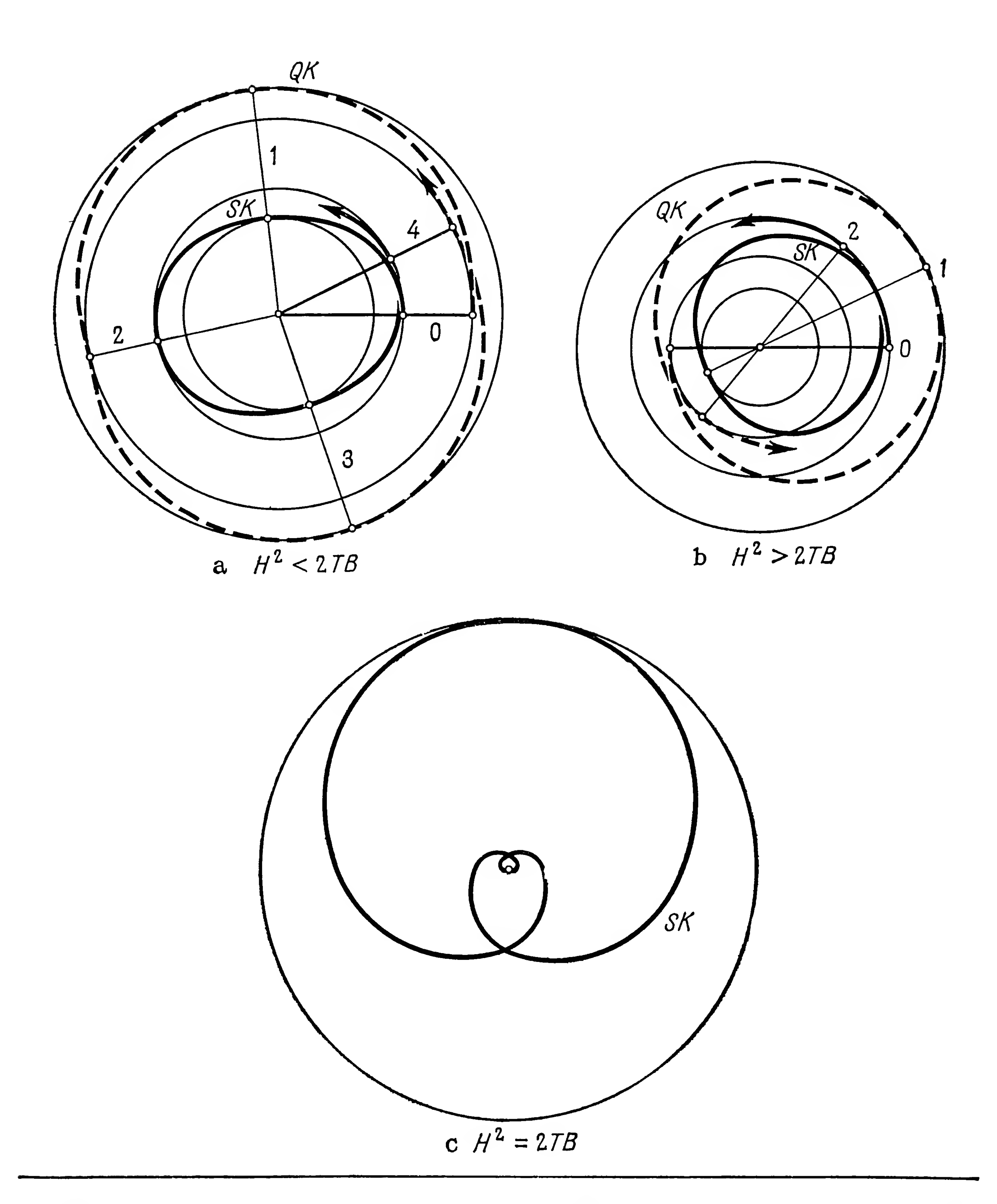


Рис. 2.10. Герполодии SK и траектории оси фигуры QK для эпициклоидального (a) и перициклоидального (b) движения, а также для промежуточного случая (c).

Сравнивая полученные результаты с данными предыдущей таблицы, приходим к выводу, что

для случая a) $r_{max} \geqslant r_{min} \geqslant R_{max} \geqslant R_{min}$;

для случая b) $r_{max} \geqslant \left\{ \begin{matrix} r_{min} \geqslant R_{max} \\ R_{max} \geqslant r_{min} \end{matrix} \right\} \geqslant R_{min}$.

Таким образом, в случае a) пересечение траекторий оси фигуры и герполодий невозможно, тогда как в случае b) это возможно. На рис. 2.10 представлены герполодии и траектории оси фигуры для эпициклоидального и перициклоидального движений. Соответственные точки начала движения лежат на одном радиусе-векторе. Для промежуточного случая нанесена только герполодия: траектория оси фигуры уходит в бесконечность.

2.2. Геометрическая интерпретация движения гироскопа, предложенная Мак-Куллагом

Наряду с очень наглядной интерпретацией движения свободного гироскопа по Пуансо существует также весьма наглядная, хотя и не столь плодотворная, геометрическая интерпретация, предложенная Мак-Куллагом. Здесь вводится другой эллипсоид, так называемый *эллипсоид Мак-Куллага*. Он определяется как геометрическое место концов векторов кинетического момента H_i, которые приводят к заданному значению кинетической энергии T. Уравнение этого эллипсоида, вытекающее из (2.4), имеет вид

$$\frac{H_1^2}{A}+\frac{H_2^2}{B}+\frac{H_3^2}{C}=2T. \tag{2.7}$$

Эллипсоид Мак-Куллага тоже неизменно связан с телом, его оси совпадают с осями эллипсоида инерции, эллипсоида энергии и кинетического эллипсоида. Полуоси его равны

$$c_1=\sqrt{2TA}, \qquad c_2=\sqrt{2TB}, \qquad c_3=\sqrt{2TC}.$$

Сопоставляя полученные величины с соответствующими параметрами эллипсоида энергии (1.60), приходим к выводу, что последний и эллипсоид Мак-Куллага взаимны, коль скоро произведения соответствующих осей ($a_1c_1=a_2c_2=a_3c_3=2T$) постоянны. Таким образом, сплюснутому эллипсоиду энергии соответствует вытянутый эллипсоид Мак-Куллага и обратно.

При движении свободного гироскопа кинетический момент остается постоянным по величине и направлению. Направление вектора кинетического момента называют *неизменяемой прямой*; она проходит через точку опоры F гироскопа. Отложив на этой прямой G (рис. 2.11) по обе стороны от точки опоры величину H кинетического момента, получим точки P и Q. Движение гироскопа может быть наглядно представлено таким движением эллипсоида Мак-Куллага ME с центром в точке F, при котором его поверхность постоянно проходит через точки P и Q. В процессе движения эти точки описывают на поверхности эллипсоида кривые, все точки которых равноудалены от центра. Эти *кинетические полодии* сходны с полодиями на эллипсоиде энергии в геометрической интерпретации Пуансо и могут быть изучены аналогичным образом.

Конец вектора кинетического момента H_i лежит, с одной стороны, на поверхности эллипсоида Мак-Куллага, а с другой стороны, вследствие $H = \text{const}$ на поверхности *кинетической сферы*

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = H^2. \tag{2.8}$$

Поэтому кинетические полодии могут рассматриваться как кривые пересечения эллипсоида Мак-Куллага (2.7) с кинетической

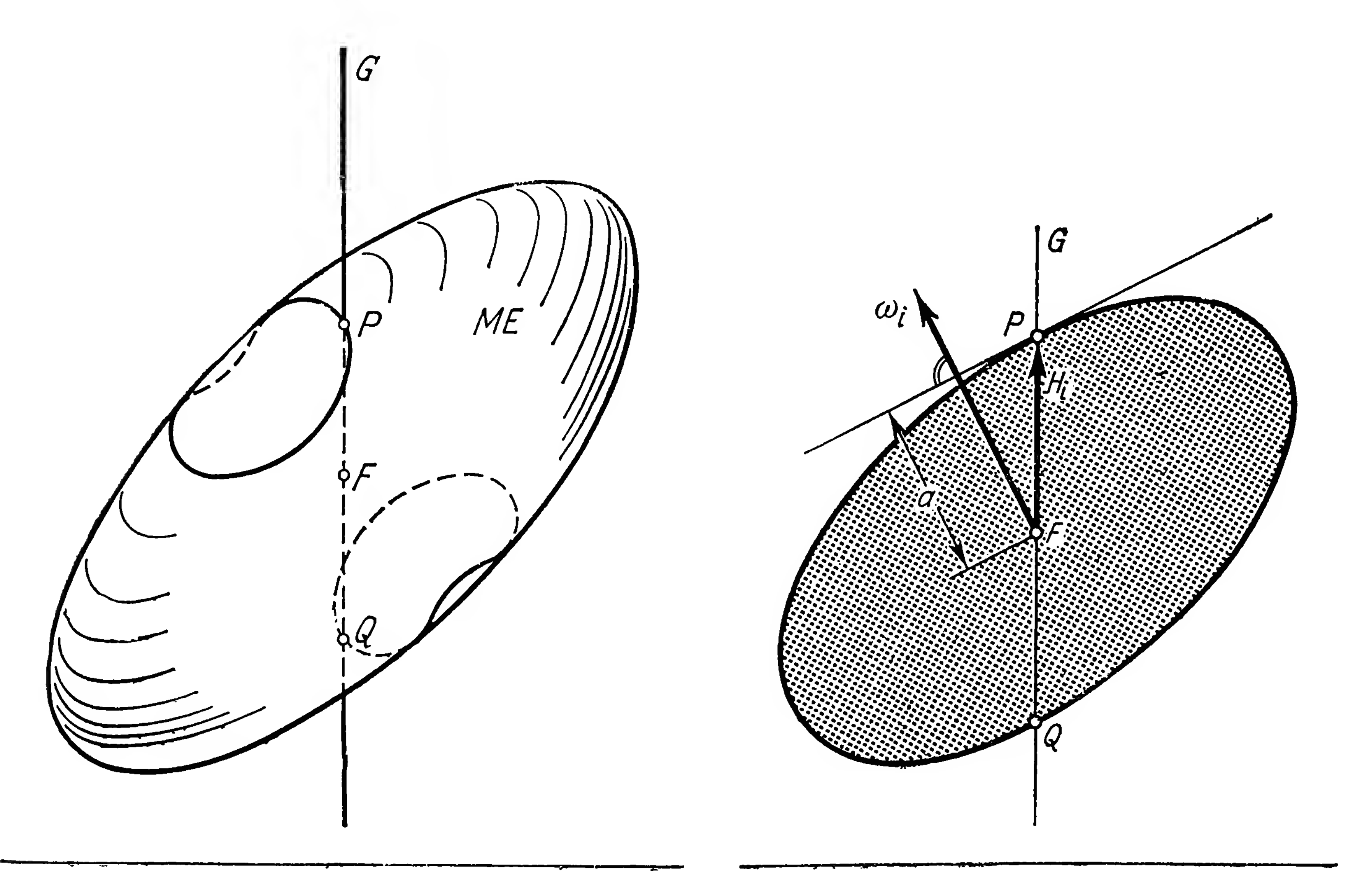


Рис. 2.11. Интерпретация движения гироскопа как перекатывания эллипсоида Мак-Куллага (*ME*) по неизменяемой прямой *G*.

Рис. 2.12. Вектор кинетического момента H_i и вектор угловой скорости ω_i при представлении движения по Мак-Куллагу.

сферой (2.8). Исключив в (2.7) и (2.8) последовательно проекции кинетического момента, найдем проекции кинетических полодий на главные плоскости:

$$\text{плоскость 2-3:} \quad \frac{A-B}{B} H_2^2 + \frac{A-C}{C} H_3^2 = 2TA - H^2,$$

$$\text{плоскость 1-3:} \quad -\frac{A-B}{A} H_1^2 + \frac{B-C}{B} H_3^2 = 2TB - H^2, \tag{2.9}$$

$$\text{плоскость 1-2:} \quad -\frac{A-C}{A} H_1^2 - \frac{B-C}{B} H_2^2 = 2TC - H^2.$$

Здесь так же, как и в случае движения Пуансо, при проектировании по направлению малой или большой осей эллипсоида (*A* или *C*) получаются эллипсы, а при проектировании по направлению средней оси (*B*) — гиперболы.

В интерпретации Мак-Куллага направление вектора угловой скорости ω_i можно получить, опустив из точки F перпендикуляр на плоскость, касательную к эллипсоиду в точке P (или Q); см. рис. 2.12. В противоположность неизменяемой плоскости в движении Пуансо касательная плоскость в движении Мак-Куллага не неподвижна: она качается около неизменяемой прямой, проходя, однако, постоянно через точку P.

2.3. Аналитическое решение по Эйлеру

2.3.1. Интегрирование дифференциальных уравнений Эйлера. Уравнение Эйлера (1.83) в случае свободного гироскопа переходит в следующее:

$$\frac{dH_i}{dt}=\frac{d'H_i}{dt}+\varepsilon_{ijk}\omega_j H_k=0. \tag{2.10}$$

Если отвлечься от тривиального случая $\omega_i=0$, то вследствие равенства

$$\frac{d'H_i}{dt}=\Theta_{ij}\frac{d'\omega_j}{dt},$$

оно всегда удовлетворяется при $\omega_i \| H_i$ и $\omega=\text{const}$. Это означает, что возможно вращение с постоянной угловой скоростью вокруг главных осей. Далее можно сразу заметить, что оно является единственно возможным перманентным вращением вокруг осей, неизменно связанных с телом. Действительно, если гироскоп вращается не вокруг главной оси, то из соотношений

$$\frac{d'H_i}{dt}=\Theta_{ij}\frac{d'\omega_j}{dt}=-\varepsilon_{ijk}\omega_j H_k\neq 0$$

сразу следует, что ω_i не может быть постоянной.

Из (2.10) нетрудно найти оба интеграла (2.1) и (2.2) уравнений движения. Из $dH_i/dt=0$ непосредственно вытекает, что

$$H_i=\text{const} \quad \text{и} \quad \frac{d'H_i}{dt}=\varepsilon_{ijk}H_j\omega_k.$$

С другой стороны, скалярно умножая (2.10) на ω_i и учитывая (1.81), получаем

$$\omega_i\frac{dH_i}{dt}=\frac{1}{2}\left(\omega_i\frac{dH_i}{dt}+H_i\frac{d\omega_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}H_i\omega_i\right)=\frac{dT}{dt}=0,$$

т. е.

$$T=\text{const}.$$

Теперь мы можем воспользоваться интегралами кинетического момента и энергии для того, чтобы прийти к точному решению уравнений движения путем простого интегрирования (в квадратурах). С этой целью перейдем к проекциям и исключим из (2.3) и (2.4)

две из трех проекций угловой скорости, например ω_1 и ω_3. Обозначив $x = \omega_2$, получим

$$A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2 = H^2 - B^2x^2,$$

$$A\omega_1^2 + C\omega_3^2 = 2T - Bx^2.$$

Отсюда

$$\omega_1^2 = \frac{(H^2-B^2x^2)-C\,(2T-Bx^2)}{A\,(A-C)} = \frac{B\,(B-C)}{A\,(A-C)}\left(x_1^2 - x^2\right),$$
$$\omega_3^2 = \frac{A\,(2T-Bx^2)-(H^2-B^2x^2)}{C\,(A-C)} = \frac{B\,(A-B)}{C\,(A-C)}\left(x_2^2 - x^2\right), \qquad (2.11)$$

где

$$x_1^2 = \frac{H^2-2TC}{B\,(B-C)}, \qquad x_2^2 = \frac{2TA-H^2}{B\,(A-B)}.$$

Эти выражения в случае $A > B > C$ всегда положительны. В проекции на главную ось 2 уравнение (2.10) имеет вид

$$B\dot{x} + (A-C)\,\omega_1\omega_3 = 0.$$

Подставив в него (2.11), получим

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{(A-B)\,(B-C)}{AC}}\sqrt{\left(x_1^2-x^2\right)\left(x_2^2-x^2\right)}. \qquad (2.12)$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x_1^2-x^2\right)\left(x_2^2-x^2\right)}} = \sqrt{\frac{(A-B)\,(B-C)}{AC}}\,(t-t_0). \qquad (2.13)$$

Интеграл в левой части (2.13) может быть преобразован к нормальному эллиптическому интегралу Лежандра первого рода. При этом, подобно тому как мы поступали в § 1.2, следует различать три случая:

a) эпициклоидальное движение $H^2 < 2TB$, $x_1^2 < x_2^2$,

b) перициклоидальное движение $H^2 > 2TB$, $x_1^2 > x_2^2$,

c) промежуточный случай $H^2 = 2TB$, $x_1^2 = x_2^2$.

Случай a). Так как нас интересуют только действительные значения x, из (2.11) получаем $x < x_1$. Введем безразмерную переменную

$$\xi = x/x_1 < 1.$$

параметр

$$k = x_1/x_2 < 1$$

и безразмерное время

$$\tau = x_2\sqrt{\frac{(A-B)\,(B-C)}{AB}}\,(t-t_0) = \sqrt{\frac{(B-C)\,(2TA-H^2)}{ABC}}\,(t-t_0).$$

С помощью этих выражений интеграл (2.13) преобразуется к нормальному виду

$$\tau = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = F(\varphi, k), \qquad (2.14)$$

где аргумент $\varphi = \arcsin \xi$.

Обратив интеграл (2.14), придем к эллиптической функции Якоби

$$\xi = \sin \varphi = \operatorname{sn} \tau;$$

отсюда найдем $x = x_1\xi$. Для определения всех трех проекций угловой скорости это выражение следует подставить в (2.11). Тогда, сообразуясь со свойствами эллиптических функций Якоби sn, cn, и dn, получим точное решение уравнений движения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\sqrt{\frac{H^2-2TC}{A(A-C)}}\operatorname{cn}\tau, \\ \omega_2 &= +\sqrt{\frac{H^2-2TC}{B(B-C)}}\operatorname{sn}\tau, \quad \text{случай а)}, \\ \omega_3 &= +\sqrt{\frac{2TA-H^2}{C(A-C)}}\operatorname{dn}\tau. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Указанная здесь расстановка знаков является лишь одной из шести возможных. Каждые две из проекций ω должны иметь одинаковые знаки, причем должны встречаться как те, так и другие. В этом можно убедиться, подставляя (2.15) в уравнения (2.10) в проекциях и учитывая следующие правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\operatorname{sn}\tau) &= \operatorname{cn}\tau \operatorname{dn}\tau, \\ \frac{d}{d\tau}(\operatorname{cn}\tau) &= -\operatorname{sn}\tau \operatorname{dn}\tau, \\ \frac{d}{d\tau}(\operatorname{dn}\tau) &= -k^2 \operatorname{sn}\tau \operatorname{cn}\tau. \end{aligned}$$

При анализе решения (2.15) следует иметь в виду, что функции Якоби являются периодическими по τ (рис. 2.13): $\operatorname{sn}\tau$ и $\operatorname{cn}\tau$ имеют период 4K, период $\operatorname{dn}\tau$ равен 2K, причем полный эллиптический интеграл первого рода K зависит еще от параметра k. В предельном случае, когда $k = 0$, имеем $K = \pi/2$; эллиптические функции $\operatorname{sn}\tau$ и $\operatorname{cn}\tau$ переходят в круговые $\sin\tau$ и $\cos\tau$, а $\operatorname{dn}\tau = 1$.

Таким образом, решение (2.15) для угловой скорости ω_i соответствует периодическому движению с периодом $\tau_s = 4K$. Подставив сюда исходные величины, получим для периода в натуральном времени выражение

$$T_s = 4K\sqrt{\frac{ABC}{(2TA-H^2)(B-C)}}. \qquad (2.16)$$

Уяснить характер движения проще всего, исходя из предельного случая $k = 0$. Тогда $x_1 = 0$, $H^2 = 2TC$, и из (2.15) получаем

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \sqrt{2T/C} = \omega_{30},$$

т. е. налицо вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси 3. При малом возмущении этого стационарного движения имеем

$$k \ll 1, \qquad 1 - 2TC/H^2 \ll 1.$$

Учитывая это, из (2.15) находим

$$\omega_1 \approx -\omega_{10} \cos\tau, \qquad \omega_2 \approx \omega_{20} \sin\tau, \qquad \omega_3 \approx \omega_{30}.$$

Соответственно этому конец вектора ω_i описывает в системе координат, связанной с телом, эллипс, плоскость которого перпен-

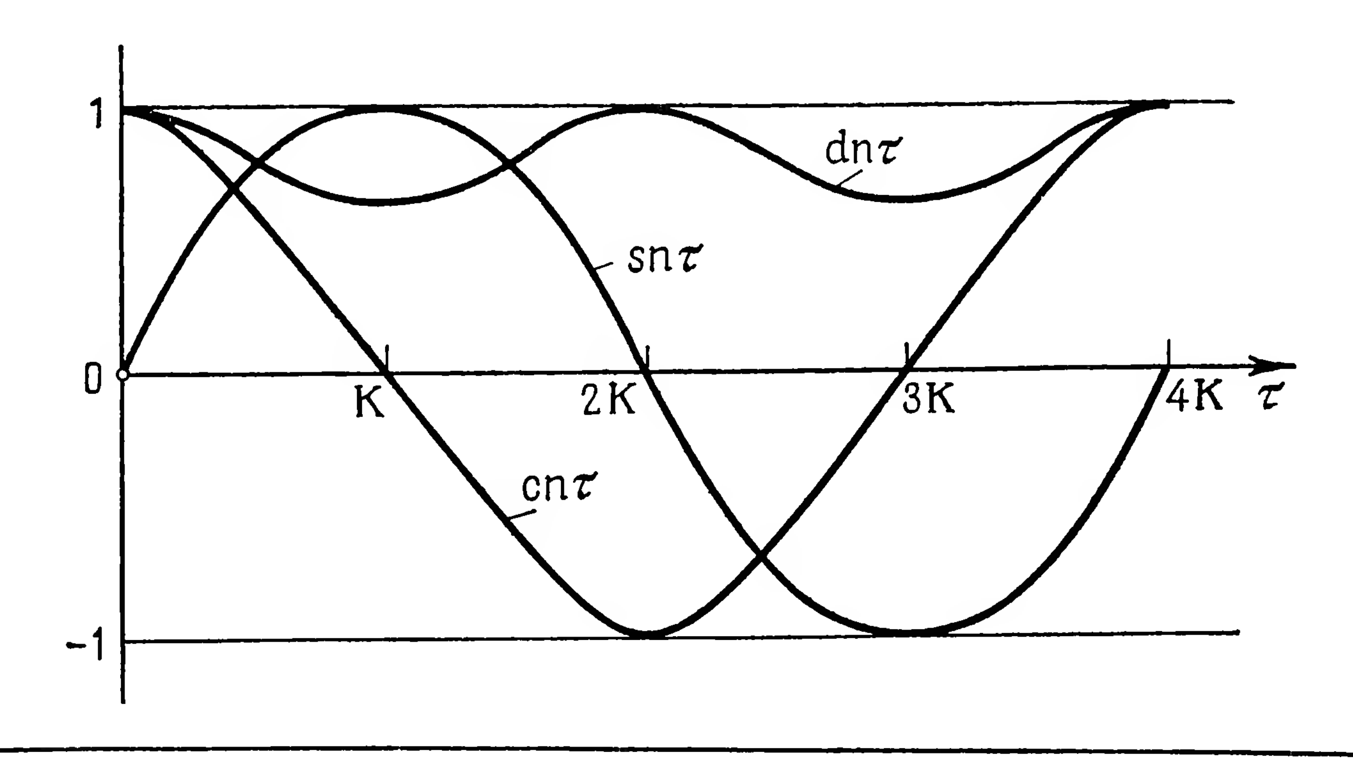


Рис. 2.13. Поведение эллиптических функций Якоби.

дикулярна оси 3 тела. По отношению к телу один оборот совершается за время

$$T_s \approx \frac{2\pi}{\omega_{30}} \sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}.$$

Как следует из (2.15), отношение осей эллипса равно

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \sqrt{\frac{B(B-C)}{A(A-C)}}.$$

Это полностью совпадает с результатом, вытекающим из (2.5/3).

При бо́льших отклонениях от стационарного вращения вокруг оси 3 полодия описывается равенствами (2.15), пока движение еще эпициклоидально, т. е. пока остается в силе $H^2 < 2TB$. Полодии превращаются в пространственные кривые, подобные тем, которые были описаны в п. 2.1.1 и изображены на рис. 2.6.

Случай b). Здесь можно поступить совершенно аналогично, только иначе определив величины ξ, k и τ:

$$\xi = x/x_2 \leqslant 1, \qquad k = x_2/x_1 < 1,$$

$$\tau = x_1 \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AB}}\,(t-t_0) = \sqrt{\frac{(A-B)(H^2-2TC)}{ABC}}\,(t-t_0).$$

Используя эти обозначения, из (2.13) снова получаем нормальную форму (2.14). Обратив этот интеграл, мы найдем $x(\tau) = \omega_2(\tau)$, что позволит определить и все остальные проекции. В результате имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= +\sqrt{\frac{H^2-2TC}{A(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,\tau, \\ \omega_2 &= +\sqrt{\frac{2TA-H^2}{B(A-B)}}\,\mathrm{sn}\,\tau, \quad \text{случай b)}, \\ \omega_3 &= -\sqrt{\frac{2TA-H^2}{C(A-C)}}\,\mathrm{cn}\,\tau. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Период угловой скорости периодического движения равен

$$T_s = 4\mathrm{K}\sqrt{\frac{ABC}{(H^2-2TC)(A-B)}}. \tag{2.18}$$

Предельному случаю $k = 0$ соответствует теперь вращение с постоянной угловой скоростью $\omega_{10} = \sqrt{2T/A}$ вокруг оси 1. При малых возмущениях этого движения ось вращения совершает оборот вокруг оси 1 за время

$$T_s \approx \frac{2\pi}{\omega_{10}}\sqrt{\frac{BC}{(A-B)(A-C)}}.$$

Равенства (2.17) позволяют определить также и полодии перициклоидального движения.

Случай c). Обозначив $x_1 = x_2 = 2T/B$, получим из (2.13)

$$x_1 \int \frac{dx}{x_1^2 - x^2} = \int \frac{d(x/x_1)}{1-(x/x_1)^2} = \mathrm{Ar\,th}\left(\frac{x}{x_1}\right) = \tau.$$

Обратная функция

$$\omega_2 = x = x_1\,\mathrm{th}\,\tau.$$

На основании сказанного, учитывая, что $1 - \mathrm{th}^2\,\tau = 1/\mathrm{ch}^2\,\tau$, находим точные значения проекций угловой скорости:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= +\sqrt{\frac{2T(B-C)}{A(A-C)}}\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}, \\ \omega_2 &= +\sqrt{\frac{2T}{B}}\,\mathrm{th}\,\tau, \qquad \text{случай c)}, \\ \omega_3 &= -\sqrt{\frac{2T(A-B)}{C(A-C)}}\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\tau}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Приведенные знаки, как и ранее, представляют только одну из возможных комбинаций. Вид фигурирующих выше гиперболических функций (рис. 2.14) указывает, что движение уже не является периодическим, а имеет асимптотический характер. Для очень больших (положительных или отрицательных) значений τ компоненты ω_1 и ω_3 весьма малы, так что движение практически сводится к вращению вокруг средней оси эллипсоида инерции (ось 2). Однако в интервале $-\infty < \tau < +\infty$ вращение меняет

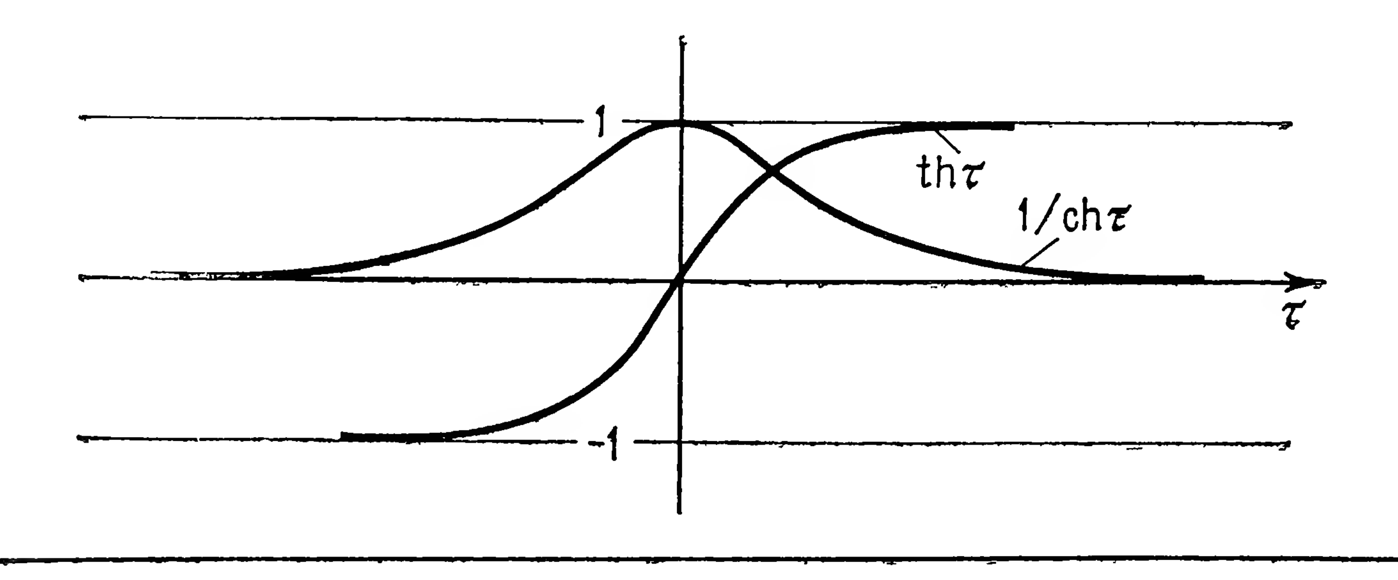


Рис. 2.14. Поведение гиперболических функций, входящих в формулы (2.19).

свое направление по отношению к телу, потому что $\operatorname{th}\tau$ изменяется в пределах от -1 до $+1$. Так как при вращении вокруг главных осей векторы угловой скорости и кинетического момента параллельны, а последний неподвижен в пространстве, то это означает, что в процессе движения ось 2 тела поворачивается на 180°. Это движение мы разберем несколько подробнее в следующем пункте.

2.3.2. Движение главных осей. Мы сделали лишь первый шаг в изучении движения тела. Второй шаг должен состоять в том, чтобы по известным ω_i определить движение главных осей, т. е. в конечном счете изменение положения тела со временем. Для этой цели можно было бы обратиться к эйлеровым углам ψ, ϑ, φ и путем интегрирования системы (1.53) выразить их как функции времени. Этот длинный и утомительный путь можно сократить, если непосредственно использовать теорему о кинетическом моменте и определенным образом выбрать систему координат. В качестве системы, связанной с телом (подвижной), примем систему главных осей, а неподвижную систему сориентируем так, чтобы ее ось 3 совпала с неподвижным направлением вектора кинетического момента H_i. Тогда проекции кинетического момента в подвижной системе будут

$$\begin{aligned} H_1 &= A\omega_1 = H \sin\vartheta \sin\varphi, \\ H_2 &= B\omega_2 = H \sin\vartheta \cos\varphi, \\ H_3 &= C\omega_3 = H \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{2.20}$$

Отсюда непосредственно определяются два угла Эйлера:

$$\cos\vartheta = \frac{C}{H}\omega_3, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A\omega_1}{B\omega_2}. \tag{2.21}$$

Угол ψ находим из (1.53/1) посредством интегрирования:

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi}{\sin\vartheta}\, dt.$$

Принимая во внимание (2.21), преобразуем это выражение к виду

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2\right) H}{\sqrt{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2}\,\sqrt{H^2 - C^2\omega_3^2}}\, dt, \qquad \psi = \psi_0 + H\int \frac{2T - C\omega_3^2}{H^2 - C^2\omega_3^2}\, dt. \tag{2.22}$$

Так как проекции ω, вычисленные в п. 2.3.1, нам известны, то, имея в виду равенства (2.21) и (2.22), вопрос об определении углов Эйлера как функций времени в принципе можно считать исчерпанным. Продолжим наши выкладки для выяснения характера изучаемого движения.

В случае а) эпициклоидального движения после подстановки ω_3 из (2.15) в (2.21) получим

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{C\,(2TA - H^2)}{H^2\,(A - C)}}\,\operatorname{dn}\tau = \cos\vartheta_1 \operatorname{dn}\tau. \tag{2.23}$$

Так как вследствие $H^2 > 2TC$ подкоренное количество всегда меньше единицы, можно считать, что угол ϑ_1 изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$; кроме того, имеем $1 \geqslant \operatorname{dn}\tau \geqslant \sqrt{1 - k^2}$. Вводя в рассмотрение угол ϑ_2, определяемый соотношением

$$\cos\vartheta_2 = \cos\vartheta_1 \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{\frac{C\,(2TB - H^2)}{H^2\,(B - C)}},$$

мы на основании (2.23) заключаем, что угол ϑ колеблется между граничными значениями ϑ_1 и ϑ_2 по периодическому закону:

$$\pi/2 \geqslant \vartheta_2 \geqslant \vartheta \geqslant \vartheta_1 \geqslant 0. \tag{2.24}$$

Между граничными углами существует следующая зависимость:

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \sqrt{\frac{B\,(A - C)}{A\,(B - C)}}, \tag{2.25}$$

которую нетрудно проверить путем подстановки. Это отношение зависит только от моментов инерции тела и не зависит ни от H, ни от T.

Поведение функции $\operatorname{dn}\tau$ (рис. 2.13) таково, что моменты времени, соответствующие граничным значениям угла ϑ, разделены промежутком

$$T_\vartheta = \mathrm{K}\sqrt{\frac{ABC}{(2TA - H^2)(B - C)}}. \tag{2.26}$$

Таким образом, период угла ϑ составляет $2T_\vartheta$.

Подставив (2.15) в (2.21), для угла φ получим

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{\frac{A(B - C)}{B(A - C)}}\,\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}. \tag{2.27}$$

Отсюда следует, что нули $\operatorname{tg}\varphi$ совпадают с нулями $\operatorname{cn}\tau$, а бесконечно большие значения $\operatorname{tg}\varphi$ совпадают с нулями $\operatorname{sn}\tau$. Поэтому каждый раз, когда безразмерное время увеличивается на $\Delta\tau = \mathrm{K}(k)$, φ возрастает на $\Delta\varphi = \pi/2$. В таком случае средняя скорость изменения φ составляет

$$\dot{\varphi}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau}\,\frac{d\tau}{dt} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}(k)}\sqrt{\frac{(2TA - H^2)(B - C)}{ABC}}. \tag{2.28}$$

На эту среднюю угловую скорость накладываются колебания, которые мы можем определить на основании (2.27). Интенсивность этих колебаний зависит от разности $A - B$. В случае симметричного ($A = B$) гироскопа $k = 0$ и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\tau}{\sin\tau} = \operatorname{ctg}\tau, \qquad \varphi = \tau + \frac{\pi}{2}.$$

Продифференцировав (2.27), получим скорость изменения φ

$$\dot{\varphi} = \frac{(A - C)(B - C)\,\omega_3}{B(A - C)\operatorname{sn}^2\tau + A(B - C)\operatorname{cn}^2\tau}. \tag{2.29}$$

Из этой формулы видно, что ввиду $A > B > C$ знак $\dot{\varphi}$ всегда совпадает со знаком ω_3. Следовательно, $\varphi(\tau)$ — монотонная функция. Для симметричного гироскопа ($A = B$)

$$\dot{\varphi} = \frac{A - C}{A}\,\omega_3.$$

В заключение рассмотрим еще угол ψ. Вместо очень трудоемкого вычисления интеграла (2.22) будем исходить из (1.49/3). Мы получим

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_3 - \dot{\varphi}}{\cos\vartheta}. \tag{2.30}$$

Подставив сюда (2.29), найдем

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_3}{\cos\vartheta}\left[1 - \frac{(A - C)(B - C)}{B(A - C)\operatorname{sn}^2\tau + A(B - C)\operatorname{cn}^2\tau}\right]. \tag{2.31}$$

Замечая, что в (2.31)

$$\frac{(A-C)(B-C)}{B(A-C)\operatorname{sn}^2\tau+A(B-C)\operatorname{cn}^2\tau}=\frac{(A-C)(B-C)}{A(B-C)+C(A-B)\operatorname{sn}^2\tau}<$$

$$<\frac{(A-C)(B-C)}{A(B-C)}<1,$$

мы приходим к выводу, что $\dot\psi$ — знакопостоянная функция, совершающая периодические колебания около некоторого среднего значения. Поэтому $\psi(\tau)$ — также монотонная функция τ.

Таким образом, как видно из предыдущего, движение в целом характеризуется тем, что функции ϑ, $\dot\psi$ и $\dot\varphi$ совершают периодические колебания около постоянных средних значений, оставаясь при этом знакопостоянными; период колебаний $\Delta\tau=2K$. Наиболее интересующее нас движение главной оси тела однозначно описывается углами ψ и ϑ. Обращаясь к рис. 1.23, мы можем заключить, что вследствие условия $\vartheta_2>\vartheta>\vartheta_1$ и монотонности функции $\psi(\tau)$ главная ось (ось $3'$) постоянно вальсирует вокруг неподвижной кинетической оси (ось 3). Это и есть нутационное движение оси фигуры, уже описанное выше при изложении геометрической интерпретации движения.

До сих пор все наши рассуждения касались эпициклоидального движения (случай a)). Подобным же образом можно поступить и при рассмотрении перициклоидального движения (случай b)). Мы придем к качественно одинаковым выводам: угол ϑ колеблется между двумя граничными значениями, функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ оказываются монотонными. Разница заключается лишь в том, что в случае b) знак $\dot\varphi$ противоположен знаку ω_1. Это означает, что в системе, связанной с телом, линия узлов движется в направлении, противоположном направлению собственного вращения тела. Однако это не оказывает никакого влияния на движение главной оси: направление движения последней определяется функцией $\dot\psi$, знак которой в обоих случаях совпадает со знаком угловой скорости тела. Таким образом, нутационное движение всегда происходит в том же направлении, что и собственное вращение.

Нам остается только рассмотреть случай c). Подставляя в (2.21) выражения (2.19) при условии $H^2=2TB$, получаем

$$\begin{aligned}\cos\vartheta&=-\sqrt{\frac{C(A-B)}{B(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\tau}=\frac{\cos\vartheta_0}{\operatorname{ch}\tau},\\ \operatorname{tg}\varphi&=\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\tau}.\end{aligned}\qquad(2.32)$$

Так как $\cos\vartheta_0<0$, то ϑ_0 лежит теперь в интервале $\pi/2<\vartheta_0<\pi$, так что постоянно $\pi/2<\vartheta<\vartheta_0$, поскольку $\operatorname{ch}\tau\geqslant 1$. Ни ϑ, ни φ не являются периодическими функциями τ. Результат подстановки (2.19) в (2.22) убеждает нас в том, что и угол ψ не является периодической функцией.

Для того чтобы яснее представить себе процесс движения, рассмотрим ϑ и φ для некоторых характерных моментов времени:

τ	$-\infty$	0	$+\infty$
ϑ	$\pi/2$	ϑ_0	$\pi/2$
φ	π	$\pi/2$	0

Имея в виду рис. 1.23, мы можем на основании этих значений заключить, что направление интересующей нас теперь средней главной оси (оси $2'$) для $\tau = -\infty$ противоположно направлению неподвижной кинетической оси (ось 3), тогда как для $\tau = +\infty$ оно

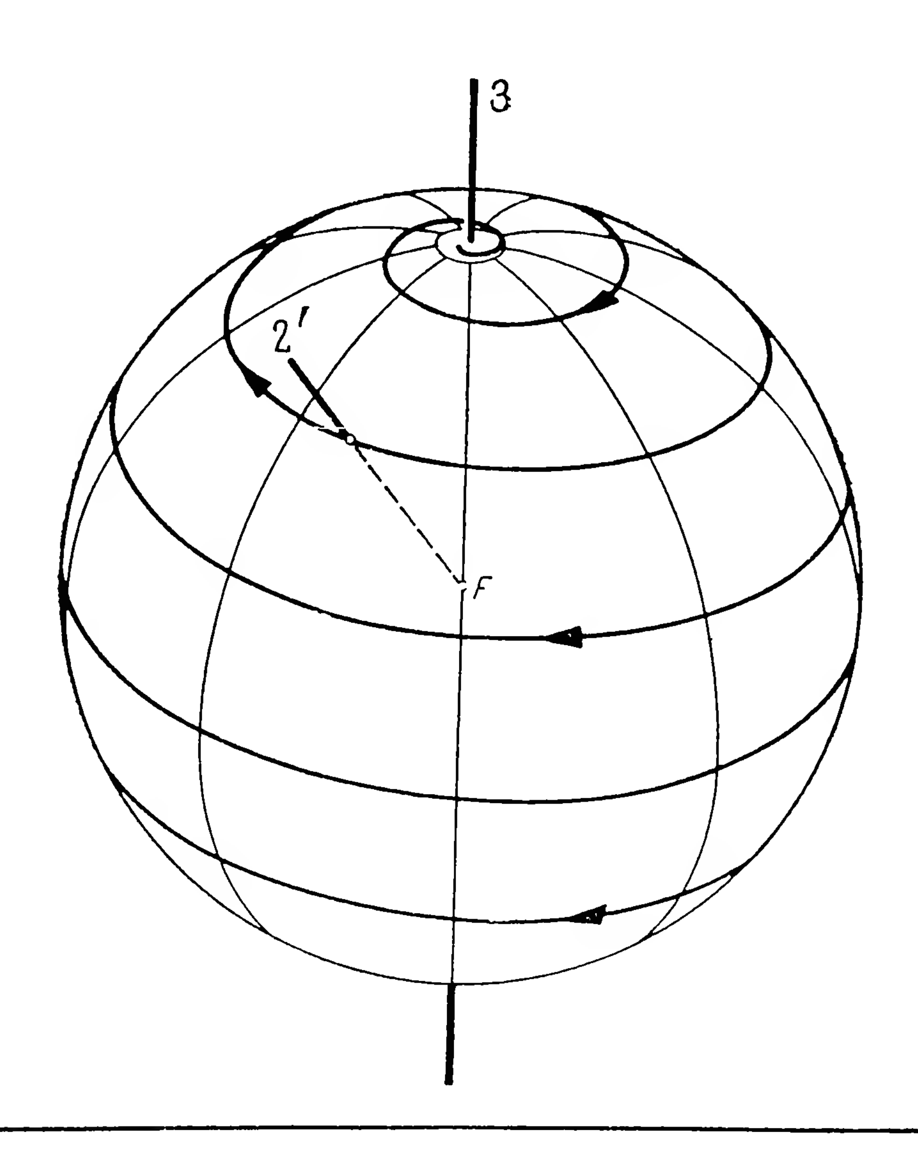


Рис. 2.15 Траектория точки средней главной оси $2'$ в промежуточном случае $H^2 = 2TB$.

совпадает с направлением последней. Таким образом, главная ось поворачивается на 180°. Этот факт уже был нами установлен в предыдущем пункте при исследовании состояния движения тела. Процесс опрокидывания мы можем исследовать, пользуясь выражением (2.32) совместно с (2.22) после подстановки в него (2.19). На рис. 2.15 показана точка пересечения оси $2'$ с единичной сферой, описанной из точки опоры. Ось $2'$, первоначально ($\tau = -\infty$) пересекавшая сферу в нижнем ее полюсе, описывая спираль, удаляется от этого положения, обегает всю сферу и асимптотическим винтообразным движением переходит при $\tau \to +\infty$ в верхнее свое

положение, в котором она совпадает с осью 3. В начале и в конце движения вращение происходит исключительно вокруг средней главной оси. Отметим еще, не вдаваясь в доказательство этого положения, что изображенная на рис. 2.15 траектория является локсодромией — линией, которая пересекает меридианы под одним и тем же углом (см., например, Граммель [3, т. I, стр. 190—191]).

2.4. Устойчивость вращения вокруг главных осей

Положение равновесия x_0 некоторой системы, состояние которой может быть охарактеризовано переменной $x(t)$, называется *устойчивым*, если в результате малого возмущения системы разность $x(t)-x_0$ остается малой, т. е система не удаляется значительно от положения равновесия. *Движение*, характеризуемое координатой $x_0(t)$, называется *устойчивым*, если движение, возникшее после малого возмущения, в дальнейшем остается близким к невозмущенному. Ляпунов сформулировал это требование в качестве критерия устойчивости следующим образом.

Потребуем, чтобы

$$|x(t)-x_0(t)| < \varepsilon > 0 \quad \text{для} \quad t > 0. \tag{2.33}$$

Тогда основное решение (невозмущенное движение) $x_0(t)$ называется устойчивым, если для любого заданного ε можно всегда отыскать $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что при

$$|x(0)-x_0(0)| < \delta \quad \text{для} \quad t=0 \tag{2.34}$$

будет выполняться требование (2.33).

Системы, удовлетворяющие названному критерию, называют *устойчивыми в смысле Ляпунова* Системы, которые удовлетворяют более частному требованию

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0(t), \tag{2.35}$$

называются *асимптотически устойчивыми.*

В отношении устойчивости вращения твердого тела справедлива следующая теорема:

Вращение свободного твердого тела вокруг главных осей устойчиво лишь в том случае, когда оно происходит вокруг большой или малой оси эллипсоида инерции. Вращение вокруг средней оси неустойчиво.

Это положение относится как к координатам вектора угловой скорости ω_i, так и к эйлерову углу ϑ. О том, удовлетворяются ли по отношению к ω_i условия устойчивости (2.33) и (2.34) или нет, мы можем судить по виду полодий (рис. 2.6), не прибегая ни к каким дополнительным вычислениям. На рис. 2.16 такого рода полодия изображена в двух проекциях; она характеризует возмущенное движение относительно вращения вокруг малой оси эллипсоида

инерции (перициклоидальный случай b)). Если допустимые для ω_1, ω_2, ω_3 значения ε_1, ε_2, ε_3 произвольно наперед заданы, то всегда найдутся δ_1, δ_2, δ_3, такие, что будет выполняться критерий Ляпунова. Так, каждая полодия, имеющая начало в какой-либо точке, лежащей внутри прямоугольника со сторонами δ_2, δ_3, всегда будет оставаться внутри изображенного на рисунке прямоугольника со сторонами ε_2, ε_3. То же относится к ограничению, наложенному на ω_1 значениями ε_1 и δ_1.

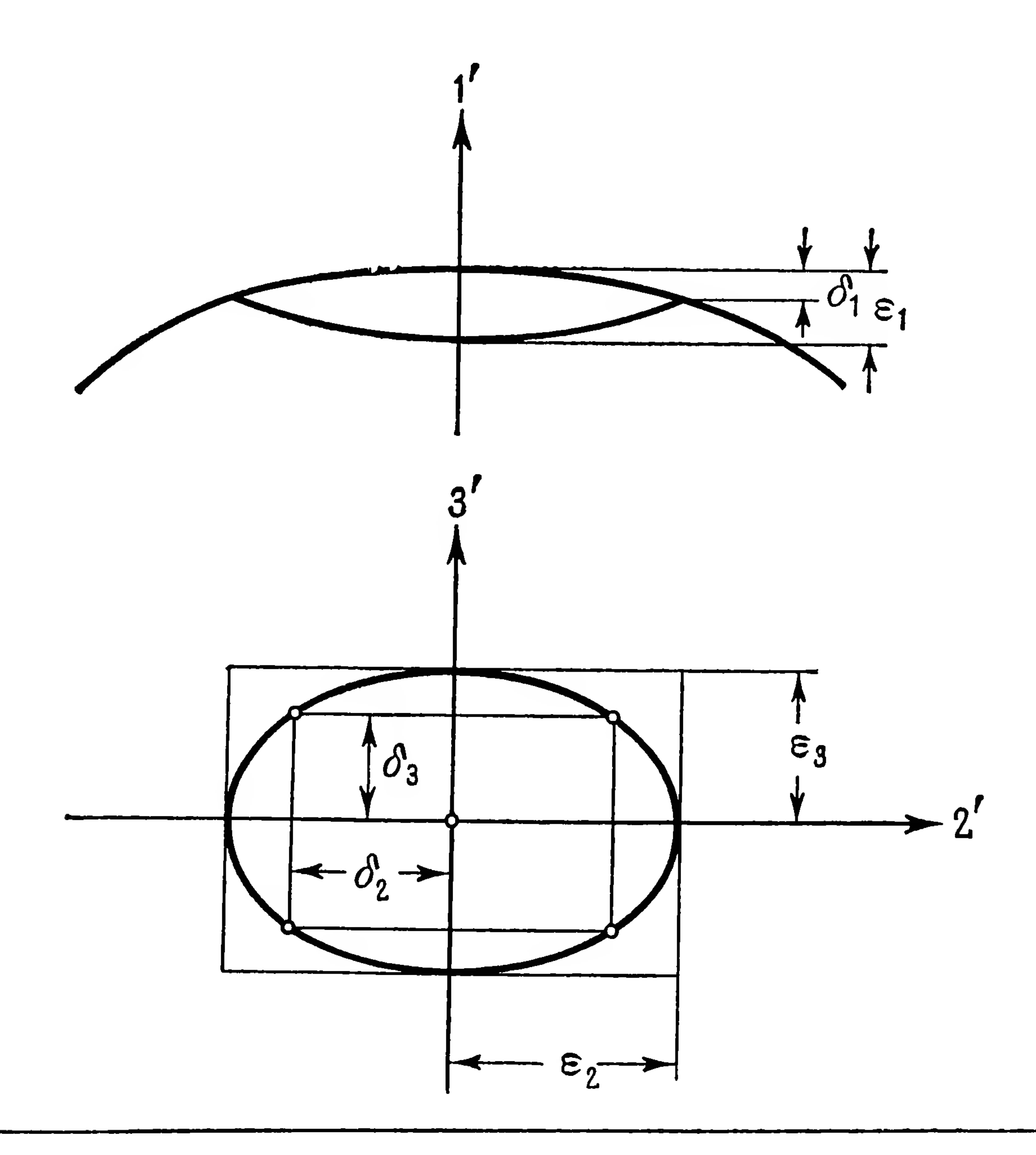


Рис. 2.16. К доказательству устойчивости вращения вокруг малой оси эллипсоида инерции.

В рассмотренном примере δ_1, δ_2, δ_3 взаимно зависимы. Поэтому нельзя проводить доказательство устойчивости для каждой составляющей ω в отдельности. Для доказательства устойчивости угловой скорости ω_i существен тот факт, что если конец вектора ω_i лежит внутри наперед заданного в подвижной системе параллелепипеда с ребрами ε_1, ε_2, ε_3, то всегда могут быть найдены другие параллелепипеды с ребрами δ_1, δ_2, δ_3, которые должны заключать внутри себя начальное значение вектора $\omega_i(0)$, так что во все последующие моменты времени конец вектора никогда не выходит за пределы ε-параллелепипеда.

Совершенно аналогично выглядит ограничение, наложенное на составляющие ω, при вращении вокруг большой оси эллипсоида инерции (эпициклоидальный случай a)). Наоборот, как видно из

рис. 2.6, при вращении вокруг средней оси такого рода ограничение невозможно. Как бы ни было мало возмущение, полодии всегда будут гиперболами, для которых при произвольно выбранных значениях ε нельзя найти требуемых значений δ.

Для доказательства устойчивости движения по углу ϑ будем исходить, например, из найденных в § 2.1 радиусов граничных окружностей для траекторий, которые описывает точка пересечения данной главной оси с неизменяемой плоскостью. Вращению строго вокруг главных осей соответствует либо $H^2 = 2TC$ (эпициклоидальный случай), либо $H^2 = 2TA$ (перициклоидальный случай), либо $H^2 = 2TB$ (промежуточный случай). Тогда для возмущенного движения разности $H^2 - 2TC$, $2TA - H^2$ и $H^2 - 2TB$ должны оставаться малыми. Следовательно, соответствующие радиусы граничных окружностей $r_{\max}$ (см. таблицу в п. 2.1.2) для первых двух из названных случаев малы. Так как

$$\operatorname{tg} \vartheta_{\max} = H r_{\max}/(2T),$$

то $\vartheta_{\max}$ также мал, и мы можем им воспользоваться для наложения ограничения на $\vartheta(t)$.

Возмущенное движение относительно вращения вокруг средней оси можно считать как эпициклоидальным, так и перициклоидальным. В любом случае модуль $|H^2 - 2TB|$ остается малым. Но эта разность в выражениях для $r_{\max}$, представленных в таблице, стоит в знаменателе, так что никакое ограничение в смысле критерия Ляпунова здесь невозможно.

Заметим, что можно прибегнуть также к равенству (2.21/1), чтобы на основании уже доказанной устойчивости движения по ω_3 сделать заключение и об устойчивости по ϑ. Также и по траектории, изображенной на рис. 2.15, непосредственно видно, что вращение вокруг средней оси неустойчиво.

Положение оси фигуры можно определить и по ее направляющим косинусам относительно неподвижной системы координат. Полученные выше результаты распространяются, конечно, на эти направляющие косинусы, поскольку на пределы их изменений легко могут быть наложены ограничения с помощью значений $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$.

Все сказанное по поводу устойчивости движения вокруг главных осей можно наглядно представить в виде диаграммы устойчивости. На рис. 2.17 она изображена в виде треугольника формы. На диаграмме принято, что гироскоп вращается вокруг оси тела 1′. Это невозмущенное движение будет устойчивым, если изображающая точка, отвечающая определенной форме гироскопа, оказывается в одной из незатененных частей треугольника. Всем точкам в затененных областях будет соответствовать неустойчивое движение, потому что при этом A является моментом инерции относительно средней оси. Поведения тел, когда изображающая точка

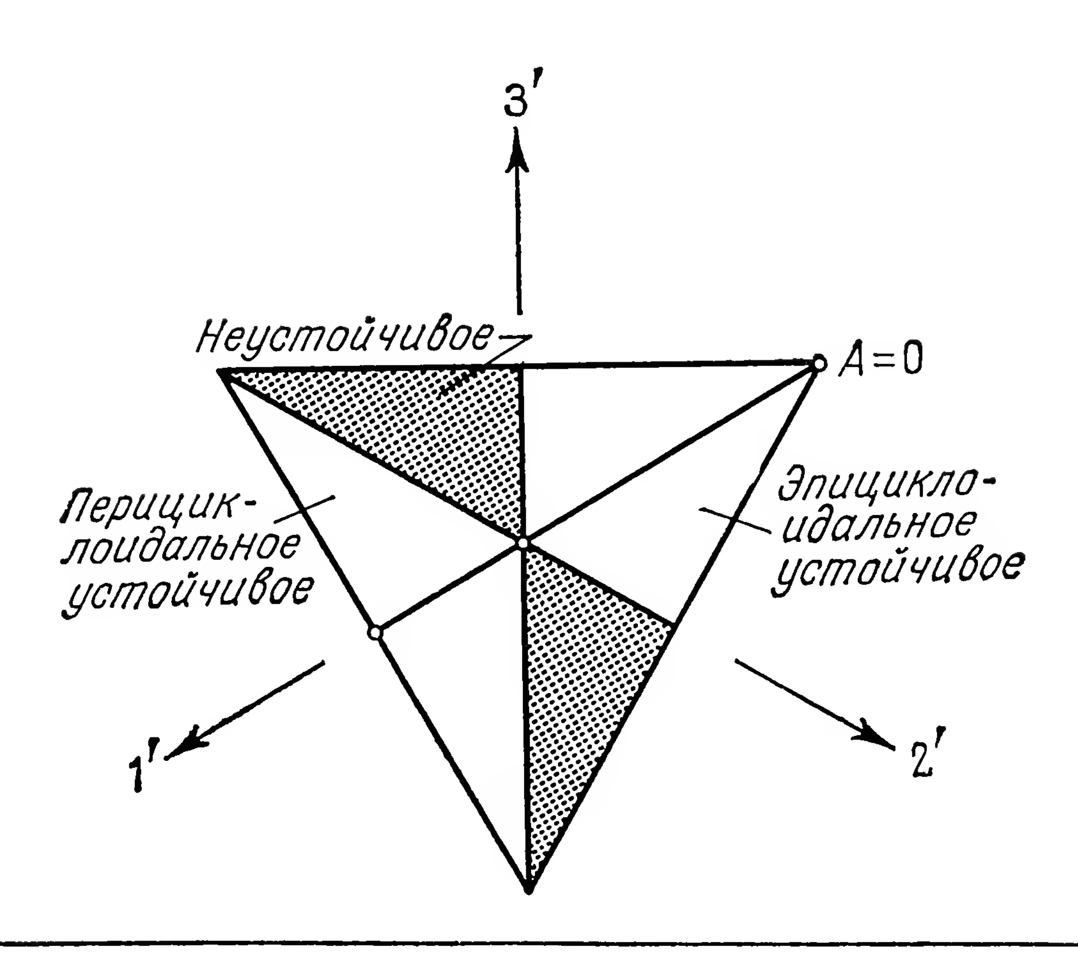


Рис. 2.17. Диаграмма устойчивости свободного несимметричного гироскопа в виде треугольника формы.

лежит на границе между областями устойчивости и неустойчивости, мы еще коснемся в следующем параграфе

Диаграммы устойчивости для рассмотренного нами случая в ином виде представлены на рис. 1.15.

2.5. Симметричный гироскоп

2.5.1. Аналитическое решение. Анализ движения гироскопа, у которого два главных момента инерции равны, можно провести элементарными методами. Хотя все интересующее нас мы могли бы получить, используя прежние результаты, например полагая в них $A = B$, мы все же предпочтем путь непосредственного анализа. При этом нет необходимости предполагать определенное соотношение между величинами моментов инерции.

Прежде всего из (2.10) для третьей координаты следует, что

$$C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = C\dot{\omega}_3 = 0,$$

т. е.

$$\omega_3 = \omega_{30} = \text{const}. \tag{2.36}$$

Вращение вокруг оси симметрии (оси фигуры) происходит с постоянной угловой скоростью. Вследствие этого два первых уравнения (2.10) линейны:

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_{30}\omega_2 = A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_{30}\omega_2 = 0,$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_{30}\omega_1 = A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_{30}\omega_1 = 0.$$

При подходящих начальных условиях их решения суть

$$\omega_1 = \omega_{10} \sin \nu t, \qquad \omega_2 = \omega_{10} \cos \nu t,$$

где

$$\nu = \frac{A - C}{A} \omega_{30} = \left(1 - \frac{C}{A}\right) \omega_{30}, \qquad \omega_{10} = \sqrt{\frac{H^2 - 2TC}{A(A - C)}}. \tag{2.37}$$

Из (2.37) находим, что полодии являются окружностями, время одного обхода которых

$$T_p = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi A}{(A - C)\,\omega_{30}}. \tag{2.38}$$

Из (2.21) для углов Эйлера получаем

$$\cos \vartheta = \frac{C\omega_{30}}{H} = \cos \vartheta_0, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \frac{\sin \nu t}{\cos \nu t} = \operatorname{tg} \nu t,$$

т. е.

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}, \qquad \varphi = \nu t = (1 - C/A)\,\omega_{30} t. \tag{2.39}$$

Отсюда следует, что

при $A > C$ имеем $\dot{\varphi} > 0$ (вытянутый гироскоп совершает эпициклоидальное движение),

при $A < C$ имеем $\dot{\varphi} < 0$ (сплюснутый гироскоп совершает перициклоидальное движение).

Из (2.30) после подстановки в него (2.39) получим

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_3 - \dot{\varphi}}{\cos \vartheta} = \frac{C\omega_{30}}{A \cos \vartheta_0} = \frac{H}{A} = \dot{\psi}_0 = \text{const}, \tag{2.40}$$

$$\psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 t. \tag{2.41}$$

Из (2.40) вытекает, что $\dot{\psi}$ и ω_{30} имеют всегда одинаковые знаки; следовательно, вращение (ω_{30}) вокруг оси фигуры и коническое движение ($\dot{\psi}$) последней вокруг кинетической оси (*нутационное движение*) постоянно совпадают по направлению. Величину $n = \dot{\psi}$ называют также *частотой нутации*[1]). При $\vartheta \ll 1$ из (2.40) получается часто используемое приближенное значение

$$n = \dot{\psi} \approx (C/A)\,\omega_{30}. \tag{2.42}$$

Это приближение дает

$$n = \dot{\psi} < \omega_{30} \text{ для вытянутого гироскопа,}$$

$$n = \dot{\psi} > \omega_{30} \text{ для сплюснутого гироскопа.}$$

[1]) В отечественной литературе движение, при котором угол нутации ϑ остается постоянным, а $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ также постоянны, принято называть *регулярной прецессией*. То, что автор назвал его в данном случае нутационным, не должно вызывать принципиальных возражений, поскольку ранее (в п. 1.4.3) он предупредил читателя, что не будет пользоваться старыми названиями углов Эйлера (угол нутации и угол прецессии) и даст не кинематическое, а динамическое определение понятий нутации и прецессии. Такое определение дано в п. 3.2.1. Прецессией автор называет такое движение гироскопа, которое сопровождается вращением вектора H_i (и, следовательно, происходит только под действием внешних сил), а нутацией — движение свободного гироскопа. Естественно поэтому, что в п. 3.3.2с движение, имеющее тот же кинематический характер (ϑ = const, $\dot{\varphi}$ = const, $\dot{\psi}$ = const), но происходящее под действием силы тяжести и сопровождаемое вращением вектора H_i, автор называет регулярной прецессией. — *Прим. ред.*

Между величинами ϑ, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, которые оказываются постоянными, существует зависимость

$$C\dot{\varphi} - (A - C)\dot{\psi}\cos\vartheta = 0,$$

в чем нетрудно убедиться путем подстановок (2.39) и (1.49/3).

2.5.2. Геометрическое описание. Для симметричного гироскопа геометрическая интерпретация движения гироскопа по Пуансо (§ 2.1)

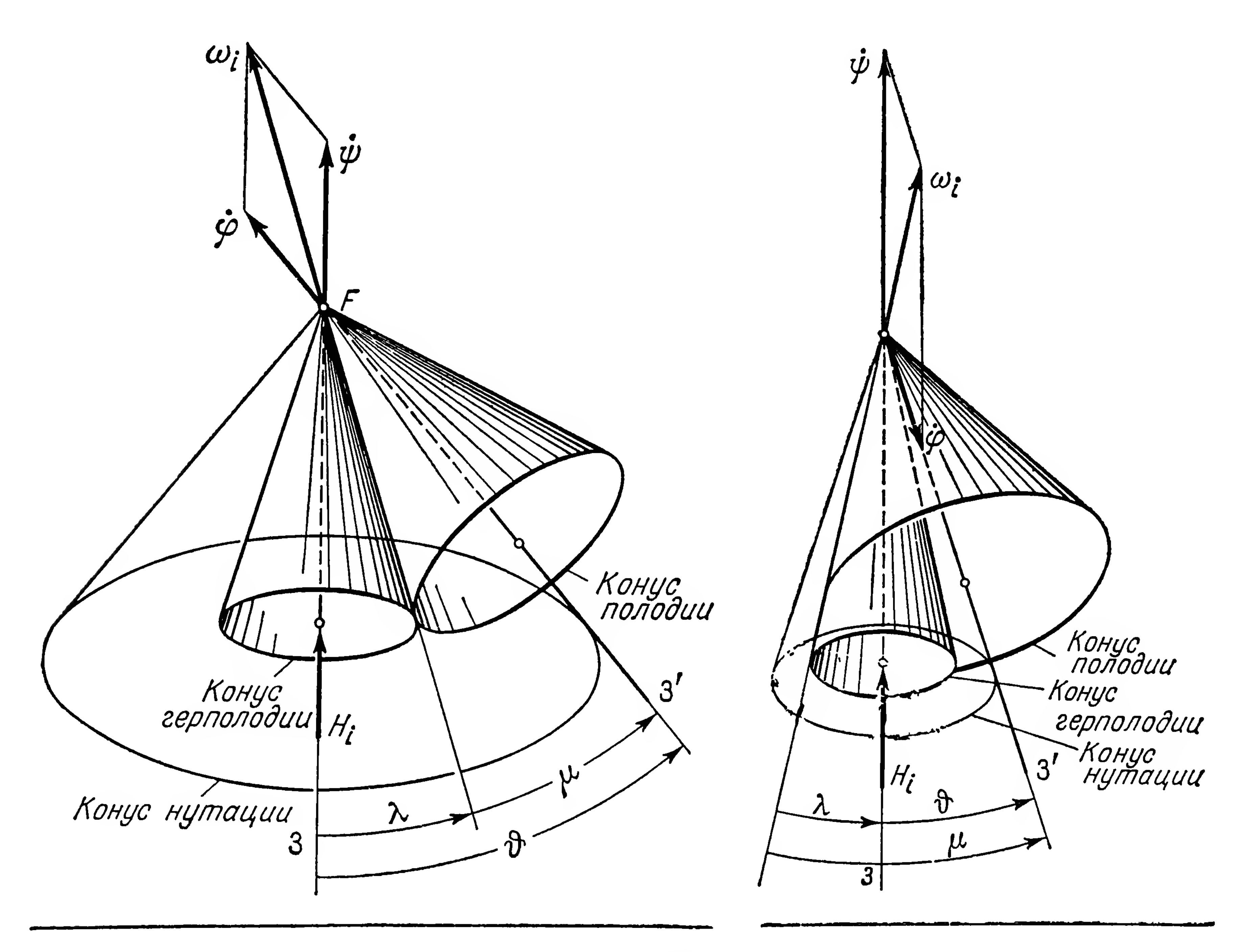


Рис. 2.18. Представление нутации симметричного гироскопа качением конуса полодии по конусу герполодии; вытянутый гироскоп.

Рис. 2.19. Представление нутации симметричного гироскопа качением конуса полодии по конусу герполодии; сплюснутый гироскоп.

становится особенно простой и наглядной. В данном случае эллипсоид энергии является эллипсоидом вращения, а полодии и герполодии превращаются в окружности. Если точку опоры F соединить с точками этих окружностей, то образуются два прямых круговых конуса, называемые *подвижным аксоидом* (*конусом полодии*) и *неподвижным аксоидом* (*конусом герполодии*). Тогда движение тела можно представить как качение подвижного аксоида по неподвижному.

Такое представление приведено на рис. 2.18 для вытянутого гироскопа и на рис. 2.19 для сплюснутого. При этом предполагается,

что ось 3 неподвижной системы координат направлена вдоль кинетической оси, а ось фигуры — вдоль оси $3'$. Осью конуса герполодии является кинетическая ось, а осью конуса полодии — ось фигуры. Общая образующая обоих конусов представляет собой мгновенную ось вращения.

Вектор угловой скорости ω_i можно разложить на две составляющие $\dot\psi$ и $\dot\varphi$ по направлениям осей обоих конусов. Угол, образуемый этими осями, равен эйлерову углу ϑ; это постоянный угол, так как оба конуса круговые.

При движении гироскопа, в то время как подвижный аксоид катится по неподвижному, изображенная на рисунках векторная диаграмма вращается как единое целое вокруг кинетической оси. В процессе этого движения в общем-то зримая ось фигуры гироскопа (ось $3'$) также описывает круговой прямой конус, называемый *конусом нутации*. Половина угла при его вершине равна углу ϑ, а ось совпадает с кинетической осью. Для половин углов при вершине конуса герполодии и конуса полодии (соответственно λ и μ) мы можем на основании закона синусов получить из рисунков следующие зависимости:

$$\sin\lambda = \frac{\dot\varphi}{\omega}\sin\vartheta; \quad \sin\mu = \frac{\dot\psi}{\omega}\sin\vartheta. \tag{2.43}$$

Подставив сюда ранее полученные для $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ значения (2.39) и (2.40), мы можем выразить эти углы через характеристические параметры гироскопа. Примечательно, что отношение

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} = \frac{\dot\varphi}{\dot\psi} = \left(\frac{A}{C} - 1\right)\cos\vartheta_0$$

для $\vartheta_0 \ll 1$ зависит исключительно от отношения A/C и не зависит от начальных условий.

Формулы (2.43) в равной мере относятся как к эпициклоидальному, так и к перициклоидальному движению. Все прочие данные, характеризующие эти движения, приведены в таблице на стр. 91. Она содержит также данные, относящиеся к предельному случаю $A = C$.

При перициклоидальном движении (сплюснутый гироскоп) подвижный аксоид следует представлять себе в виде полого конуса, который катится по неподвижному аксоиду, касаясь его своей внутренней поверхностью. Из (2.43), учитывая равенство (2.39), мы можем видеть, что угол λ конуса герполодии зависит от формы эллипсоида инерции:

$$\sin\lambda = \left(1 - \frac{C}{A}\right)\frac{\omega_{30}}{\omega}\sin\vartheta. \tag{2.44}$$

В предельном случае, когда $A = C$, т. е. когда эллипсоид инерции тела превращается в сферу, $\lambda = 0$, конус герполодии вырождается в прямую и конус полодии вращается просто вокруг одной из своих образующих.

Нутация симметричного гироскопа, $A = B$

a) Эпициклоидальное движение, $A > C$	b) Перициклоидальное движение, $A < C$	c) Предельный случай, $A = C$
$\vartheta = \lambda + \mu$	$\vartheta = \mu - \lambda$	$\vartheta = \mu$ $\lambda = 0$
$\dot\varphi > 0$	$\dot\varphi < 0$	$\dot\varphi = 0$
$\dot\psi = n < \dfrac{\omega_{30}}{\cos\vartheta}$	$\dot\psi = n > \dfrac{\omega_{30}}{\cos\vartheta}$	$\dot\psi = n = \dfrac{\omega_{30}}{\cos\vartheta}$
Ось вращения постоянно находится между кинетической осью и осью фигуры	Кинетическая ось постоянно находится между осью вращения и осью фигуры	Ось вращения и кинетическая ось совпадают

Если исключить особый случай $C = 0$, когда сам гироскоп вырождается в стержень, то угол μ конуса полодии обращается в нуль только при $\vartheta = 0$. Это происходит при невозмущенном вращении вокруг оси фигуры.

2.5.3. Устойчивость симметричного гироскопа. Согласно общим результатам, полученным в § 2.4, мы можем утверждать, что устойчивость вращения симметричного гироскопа вокруг его оси фигуры обеспечена. Вытянутый гироскоп вращается вокруг большой оси эллипсоида инерции, а сплюснутый — вокруг малой.

Остается еще исследовать вращение вокруг главных осей, лежащих в экваториальной плоскости. Как упоминалось выше (п. 1.5.2), все экваториальные оси симметричного гироскопа являются равноправными главными осями. Поэтому стационарное вращение вокруг этих осей возможно, однако оно оказывается неустойчивым по ω_i. Это проще всего усмотреть из формул (2.37). Если вращение происходит строго вокруг одной из поперечных осей, то $\omega_3 = 0$, значит, и $\nu = 0$, и тогда мы получаем $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega_{10}$. Если же вследствие некоторого возмущения этого движения возникнет $\omega_3 \neq 0$, хотя бы и весьма малая, то будет $\nu \neq 0$ (исключая случай шарового гироскопа, $A = C$), а ω_1 и ω_2 окажутся периодическими функциями, которые не являются близкими к невозмущенному решению $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega_{10}$.

В справедливости этого результата мы можем убедиться и непосредственно, по виду полодий (рис. 2.7). При возмущении вращения вокруг экваториальной оси конец вектора ω_i попадает на соседнюю полодию, лежащую в плоскости, параллельной экваториальной. По этой полодии он перемещается со скоростью, которая приблизительно пропорциональна расстоянию полодии от экватора. Время полного обращения вектора ω_i относительно тела

$T = 2\pi/\nu$. Отсюда видно, что вектор ω_i не остается вблизи той точки на экваторе, которая соответствует невозмущенному движению.

По переменной ω_3, а в силу равенства $\cos\vartheta = C\omega_3/H$ и по углу ϑ, описанное движение следует признать устойчивым (в смысле Ляпунова). Пусть, например, невозмущенное движение определено так: $\omega_3 = 0$ и $\vartheta = \pi/2$. После некоторого малого возмущения как ω_3, так и $\pi/2 - \vartheta$ остаются малыми, и мы можем для заданных значений ε отыскать соответствующие значения δ, доказав тем самым устойчивость движения.

Подобным же образом можно показать, что описанное движение устойчиво по угловым скоростям $\dot\varphi$ (2.39) и $\dot\psi$ (2.40), но неустойчиво по самим углам φ и ψ.

Изображающая точка на диаграмме устойчивости (рис. 2.17), отвечающая вращению симметричного гироскопа вокруг одной из его поперечных осей, лежит на границе зоны неустойчивости.

2.5.4. Шаровой гироскоп. Сделаем еще несколько замечаний относительно особого вида гироскопа — шарового, поскольку в свое время предполагали, что он наиболее пригоден для технических применений.

Безусловно, при равенстве всех трех главных моментов инерции ($A = B = C$) мы получаем в качестве общего решения уравнения Эйлера (2.10) перманентное вращение вокруг любой оси. В этом случае каждая ось, проходящая через точку опоры F, является главной. Отсюда непосредственно следует, что такое вращение устойчиво по переменным ω_1, ω_2, ω_3, ϑ, $\dot\psi$, $\dot\varphi$. Аналитические выражения для этих параметров нетрудно получить из выведенных выше формул, полагая в них $A = B = C$.

Изображающая точка для шарового гироскопа на диаграмме устойчивости (рис. 2.17) совпадает с ортоцентром треугольника. Здесь сходятся все зоны устойчивости и неустойчивости. Согласно сказанному выше, сама изображающая точка должна быть причислена к точкам зоны устойчивости. Однако это нельзя обеспечить практически. Для реальных тел невозможно строго соблюсти условие $A = B = C$. Вследствие неоднородности материала, неравномерного температурного расширения или деформаций под влиянием ускорений всегда приходится считаться с теми или иными отклонениями. Но тогда изображающая точка на диаграмме устойчивости может переместиться в зону неустойчивости.

Поэтому с точки зрения практического использования шаровой гироскоп следует признать непригодным, так как даже при малейшем изменении распределения массы, которого едва ли можно избежать, он может оказаться неустойчивым.

Глава 3

Гироскоп. Силы и движение

В случае гироскопа, на который действуют какие-либо силы (или моменты), возникают задачи двух типов: либо по известному движению гироскопа требуется определить действующие на него силы, либо, наоборот, найти движение, вызванное заданными силами. Как будет показано в § 3.1, решение первой из этих задач не вызывает принципиальных затруднений. Значительно более трудными оказываются задачи второго типа; о них и пойдет речь в § 3.2—3.5.

Разница в степени трудности обеих задач определяется тем обстоятельством, что уравнения движения гироскопа линейны относительно моментов, тогда как относительно составляющих угловой скорости они представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения.

3.1. Силы в случае гироскопа с дополнительной связью

3.1.1. Общее решение. Теорема о кинетическом моменте (1.75) устанавливает связь между изменением кинетического момента гироскопа и моментом M_i действующих на него сил. У гироскопа, совершающего вынужденное движение, предопределенное направляющей связью, следует различать активные моменты M_i^A и моменты реакции M_i^R. Активные моменты могут создаваться, например, силой тяжести, силой упругости пружины, электрическими или магнитными силами. Моменты же, наложенные на гироскоп посредством подвеса или направляющих связей, мы называем моментами реакции: благодаря им становится возможным вынужденное движение гироскопа. Таким образом, имеем

$$\frac{dH_i}{dt} = M_i = M_i^A + M_i^R. \qquad (3.1)$$

Расчленим момент реакции на две составляющие, одна из которых, M_i^{RO}, уравновешивает активные силы. В статическом случае, когда гироскоп неподвижен, эта составляющая является единственной. Вторая составляющая, M_i^{RK}, вызывает изменение кинетического

момента, например движение оси гироскопа. Таким образом,

$$M_i^R = M_i^{RO} + M_i^{RK},$$

где $M_i^{RO} = -M_i^A$ и $M_i^{RK} = -M_i^K$.

Момент реакции M_i^{RK} действует *на гироскоп*. В приложениях нас часто интересует противоположный ему момент, который приложен со стороны гироскопа к подвесу или *к направляющей связи*. Он обозначен выше M_i^K. Рассмотрим его более подробно. Согласно (3.1),

$$M_i^K = -\frac{dH_i}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Theta_{ij}\omega_j). \tag{3.2}$$

Для упрощения в (3.2) операции дифференцирования часто бывает удобно воспользоваться системой координат, связанной с телом, потому что в этой системе элементы тензора инерции Θ_{ij} постоянны. Тогда вместо (3.2) получим

$$M_i^K = -\frac{d'H_i}{dt} - \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k. \tag{3.3}$$

При заданной угловой скорости ω_i отсюда можно определить кинетический момент $H_i = \Theta_{ij}\omega_j$, а следовательно, и гироскопический момент M_i^K. Если вместо ω_1, ω_2, ω_3 заданы углы Эйлера ψ, ϑ, φ или кардановы углы α, β, γ, то сначала с помощью кинематических уравнений (1.49) или (1.51) могут быть вычислены ω_1, ω_2, ω_3. Эти вычисления не представляют затруднений, так как при этом не требуется интегрировать дифференциальные уравнения и все сводится лишь к операции дифференцирования. Тем не менее в результате вычислений составляющих момента мы можем прийти к совершенно необозримым выражениям. Поэтому в дальнейшем мы займемся более подробным исследованием лишь типичных и практически наиболее важных частных случаев.

3.1.2. Вращение вокруг неподвижной оси. Неподвижной осью пусть будет ось 3 и одновременно ось тела 3′. Тогда в подвижной системе (штрихи для ее обозначения мы далее опустим)

$$\omega_i = [0, 0, \omega_3], \qquad H_i = [-E\omega_3, -D\omega_3, C\omega_3].$$

Подставив эти векторы в (3.3), найдем гироскопический момент

$$M_i^K = \begin{bmatrix} E\dot{\omega}_3 \\ D\dot{\omega}_3 \\ -C\dot{\omega}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +D\omega_3^2 \\ -E\omega_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Здесь естественно рассмотреть два частных случая.

а) Вращение вокруг главной оси. При таком движении надо положить $D = E = 0$, и тогда

$$M_3^K = -C\dot{\omega}_3.$$

При ускорении или замедлении вращения гироскопа возникает реактивный момент относительно оси вращения. Он противоположен движущему или тормозящему моментам и воспринимается подвесом. При равномерном вращении $\dot{\omega}_i = 0$ и $M_3^K = 0$.

b) Вращение с постоянной угловой скоростью. Здесь $M_3^K = 0$. Остается момент, вектор которого перпендикулярен оси вращения, как показано на рис. 3.1, и для которого

$$M^K = \omega_3^2 \sqrt{D^2 + E^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi^K = -E/D.$$

Во вращающейся вместе с телом подвижной системе он постоянен и поэтому действует на неподвижный подвес как периодический

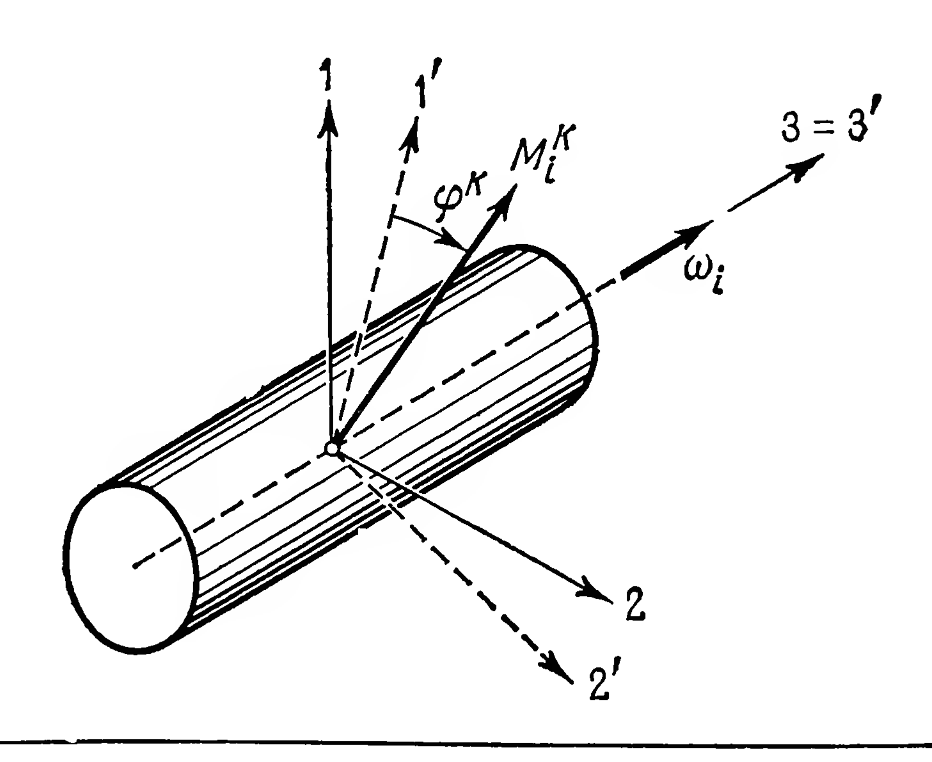


Рис. 3.1. Момент реакции гироскопа M_i^K при вынужденном вращении вокруг оси 3′.

вибрационный момент. В этом случае говорят о *динамической неуравновешенности* тела. Даже если тело статически уравновешено, т. е. его центр масс расположен на оси вращения, могут все же возникать действующие на опоры периодические силы, которые растут пропорционально квадрату угловой скорости. Их можно устранить, если тело динамически уравновесить. Для этого требуется, чтобы ось вращения оказалась главной осью, т. е. чтобы $D = E = 0$. Это всегда возможно осуществить путем добавления к телу недостающей массы или удаления излишней.

Рассмотрим более подробно случай симметричного ротора ($A = B$), особенно важного в технических приложениях. Пусть тело вращается вокруг лежащей в главной плоскости 1′-3′ оси 3, которая является одновременно неподвижной и связанной с телом

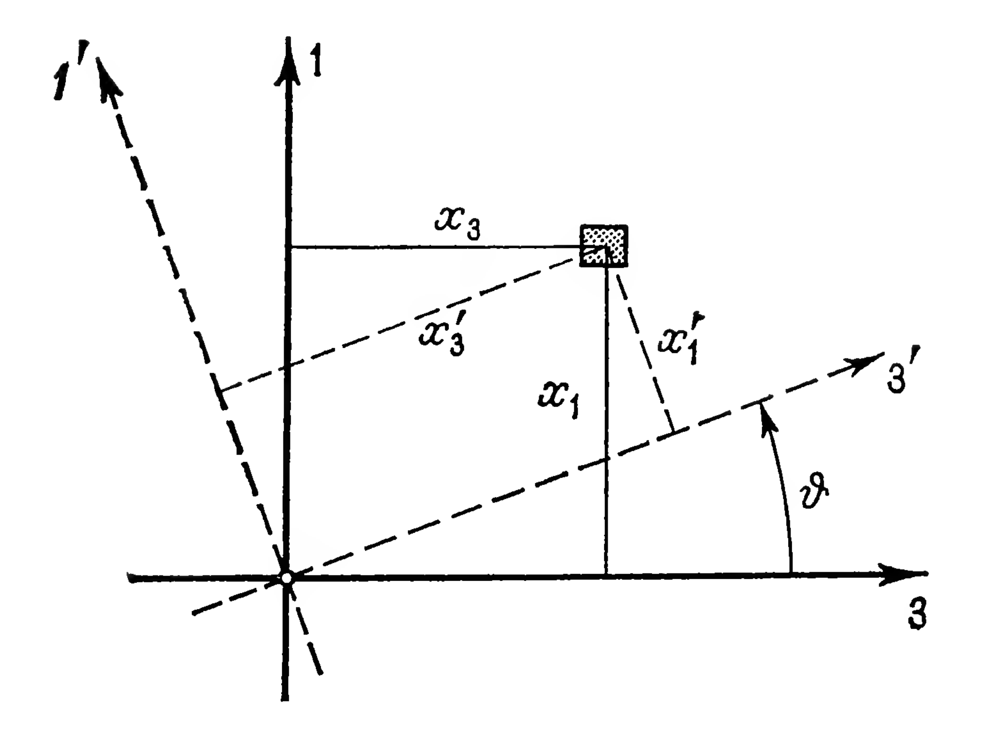


Рис. 3.2. К расчету центробежных моментов инерции при повернутой системе координат.

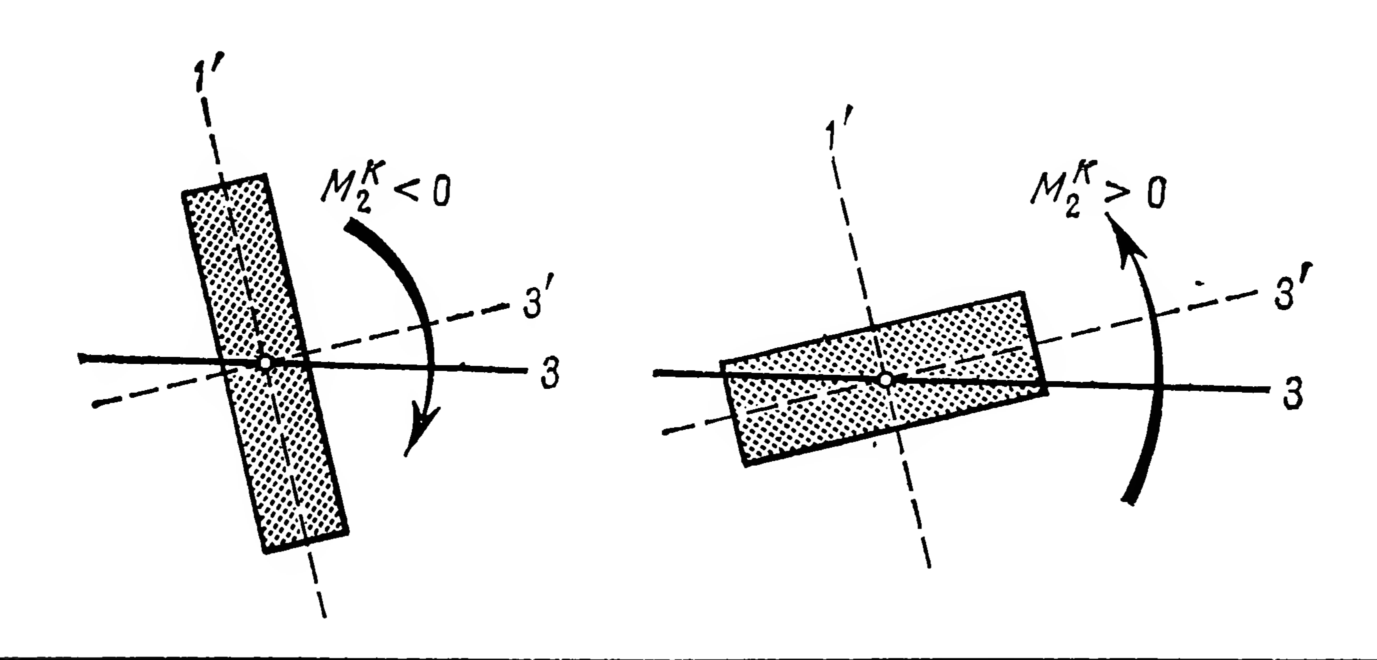


Рис. 3.3. Гироскопический момент для сплюснутого (слева) и для вытянутого (справа) симметричного тела, вращающегося вокруг оси 3.

осью и образует с осью симметрии тела 3' угол ϑ (рис. 3.2). Тогда

$$x_1 = x_1' \cos\vartheta + x_3' \sin\vartheta,$$

$$x_2 = x_2',$$

$$x_3 = -x_1' \sin\vartheta + x_3' \cos\vartheta.$$

Отсюда в силу $D' = E' = F' = 0$ для центробежных моментов инерции из (1.9) следует

$$D = \int x_2 x_3 \, dm = -F' \sin\vartheta + D' \cos\vartheta = 0,$$

$$E = \int x_3 x_1 \, dm = {}^1/_2 (A' - C') \sin 2\vartheta + E' \cos 2\vartheta = {}^1/_2 (A' - C') \sin 2\vartheta.$$

Подставив эти величины в (3.4) и положив в последнем $\dot{\omega}_3 = 0$, получим момент от небаланса

$$M_2^K = {}^1/_2 (A' - C') \, \omega_3^2 \sin 2\vartheta. \qquad (3.5)$$

Знак момента зависит от формы тела. У сплюснутого ротора ($A' < C'$) момент стремится повернуть ось симметрии $3'$ к оси вращения, а у вытянутого ($A' > C'$) — в обратном направлении (рис. 3.3).

Из (3.5) видно, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$ (вращение вокруг главной оси), а также при $A' = C'$ (шаровой гироскоп) вибрационный момент обращается в нуль. При $\vartheta = \pi/4$ он достигает максимума. В наиболее интересном для технических приложений случае малого ϑ справедливо приближенное равенство

$$M_2^K \approx (A' - C')\,\omega_3^2\vartheta \quad (\text{для } \vartheta \ll 1). \tag{3.6}$$

3.1.3. Вращение вокруг подвижных осей. Применим теперь общую формулу (3.3) к случаю, когда тело вращается с угловой скоростью ω_i^E вокруг главной оси $3'$, которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси 3 (рис. 3.4) с угловой скоростью ω_i^Z. Если

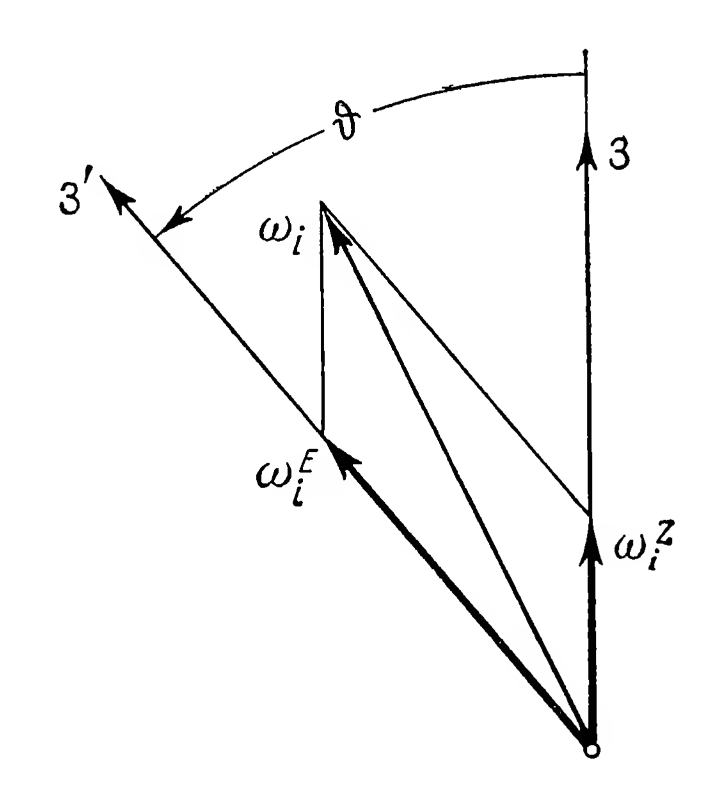


Рис. 3.4. Сложение угловых скоростей собственного (ω_i^E) и дополнительного (ω_i^Z) вращений.

движение связанной с телом системы $1'$, $2'$, $3'$ относительно неподвижной системы 1, 2, 3 описывается углами Эйлера, то при постоянном угле ϑ мы получим, согласно (1.49), вектор абсолютной угловой скорости

$$\omega_i = \omega_i^E + \omega_i^Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi \\ \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \dot\psi \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Если в качестве системы координат, связанной с телом, выбрать систему главных осей, то кинетический момент составит

$$H_i = \begin{bmatrix} A\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ B\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Ограничиваясь случаем $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \mathrm{const}$, т. е. равномерным дополнительным вращением вокруг оси, образующей с главной осью $3'$ тела постоянный угол $\vartheta = \vartheta_0$, согласно (3.3) имеем

$$M_i^K = \begin{bmatrix} (B-A-C)\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\vartheta_0\cos\varphi + (B-C)\dot{\psi}^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cos\varphi \\ (B-A+C)\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\vartheta_0\sin\varphi - (A-C)\dot{\psi}^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\sin\varphi \\ -C\ddot{\varphi} + (A-B)\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta_0\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Следует прежде всего отметить, что момент возникает также и относительно оси собственного вращения $3'$ гироскопа. Это означает, что при отсутствии трения равномерное собственное вращение без наличия некоторого внешнего момента M_3^A невозможно. Неравномерное собственное вращение можно рассчитать с помощью дифференциального уравнения

$$C\ddot{\varphi} - {}^1\!/_2\,(A-B)\,\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta_0\sin 2\varphi = 0.$$

Наоборот, если требуется равномерное собственное вращение с угловой скоростью $\dot{\varphi}_0$, то для его поддержания необходим периодический внешний момент

$$M_3^A = -{}^1\!/_2\,(A-B)\,\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta_0\sin 2\dot{\varphi}_0 t. \tag{3.8}$$

Момент этот колеблется с удвоенной частотой собственного вращения. Его можно использовать для измерения проекции $\dot{\psi}\sin\vartheta$ угловой скорости ω_i^Z на ось, перпендикулярную оси $3'$. Амплитуда измерительного сигнала пропорциональна несимметрии $A-B$ тела. В симметричных роторах такой момент отсутствует.

Как видно из (3.7), остальные составляющие момента M_i^K содержат слагаемые, в которые входят сомножители $\dot{\varphi}\dot{\psi}$ и $\dot{\psi}^2$, также являющиеся периодическими. Смысл этих членов проще всего обнаруживается при рассмотрении следующих двух частных случаев.

а) *Симметричный ротор*, $A = B$. Здесь (3.7) переходит в

$$M_i^K = \begin{bmatrix} -C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\varphi + (A-C)\dot{\psi}^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cos\varphi \\ C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta_0\sin\varphi - (A-C)\dot{\psi}^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\sin\varphi \\ C\ddot{\varphi} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Если внешний момент относительно оси $3'$ отсутствует, то $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{const}$. Тогда вектор гироскопического момента перпендикулярен оси $3'$ и совпадает с линией узлов (линия пересечения плоскостей $1'$-$2'$ и 1-2), как изображено на рис. 3.5. Его величина равна

$$M^K = C\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta_0 - {}^1/_2\,(A - C)\,\dot{\psi}^2\sin 2\vartheta_0 = \\ = \dot{\psi}\sin\vartheta_0\,[C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0) - A\dot{\psi}\cos\vartheta_0]. \quad (3.10)$$

У сплюснутого ротора ($C > A$) при $0 < \vartheta_0 < \pi/2$ момент всегда направлен по отрицательной линии узлов, если за положительное

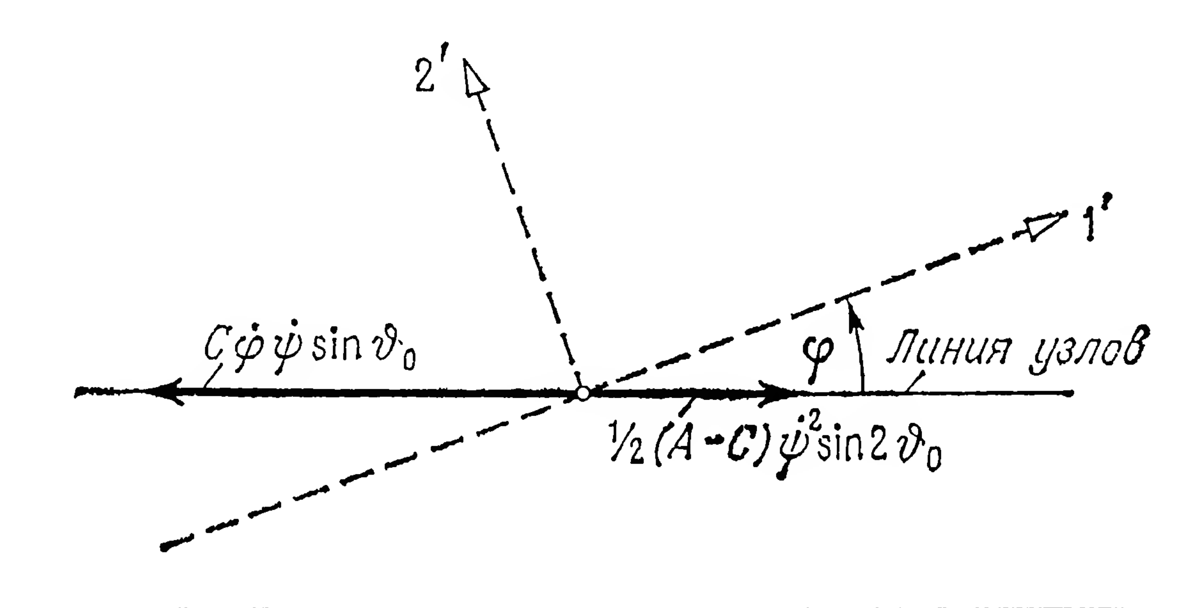


Рис. 3.5. К определению гироскопического момента симметричного ротора.

принять направление вектора $+\dot{\vartheta}$. У вытянутого ротора ($A > C$) момент M_i^K может совпадать с положительной линией узлов, поскольку

$$A\dot{\psi}\cos\vartheta_0 > C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0) = C\omega_3.$$

Для стержневидного ротора ($C = 0$) это условие всегда выполняется.

Возникновение момента (3.10) можно также объяснить, исходя непосредственно из теоремы о кинетическом моменте (3.2). Вследствие предполагаемой симметрии ось 3, ось $3'$, ось вращения и кинетическая ось лежат в одной плоскости, которая перпендикулярна линии узлов и вращается с угловой скоростью $\dot{\psi}$ (дополнительное вращение). Из диаграммы, представленной на рис. 3.6, можно видеть, что гироскопический момент равен

$$M^K = dH/dt = a\dot{\psi}.$$

Подставив сюда

$$a = (C\omega_3)\sin\vartheta_0 - (A\dot{\psi}\sin\vartheta_0)\cos\vartheta_0$$

и

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta_0,$$

мы сразу приходим к выражению (3.10). На рисунке вектор момента направлен за плоскость чертежа, т. е. по отрицательной линии узлов.

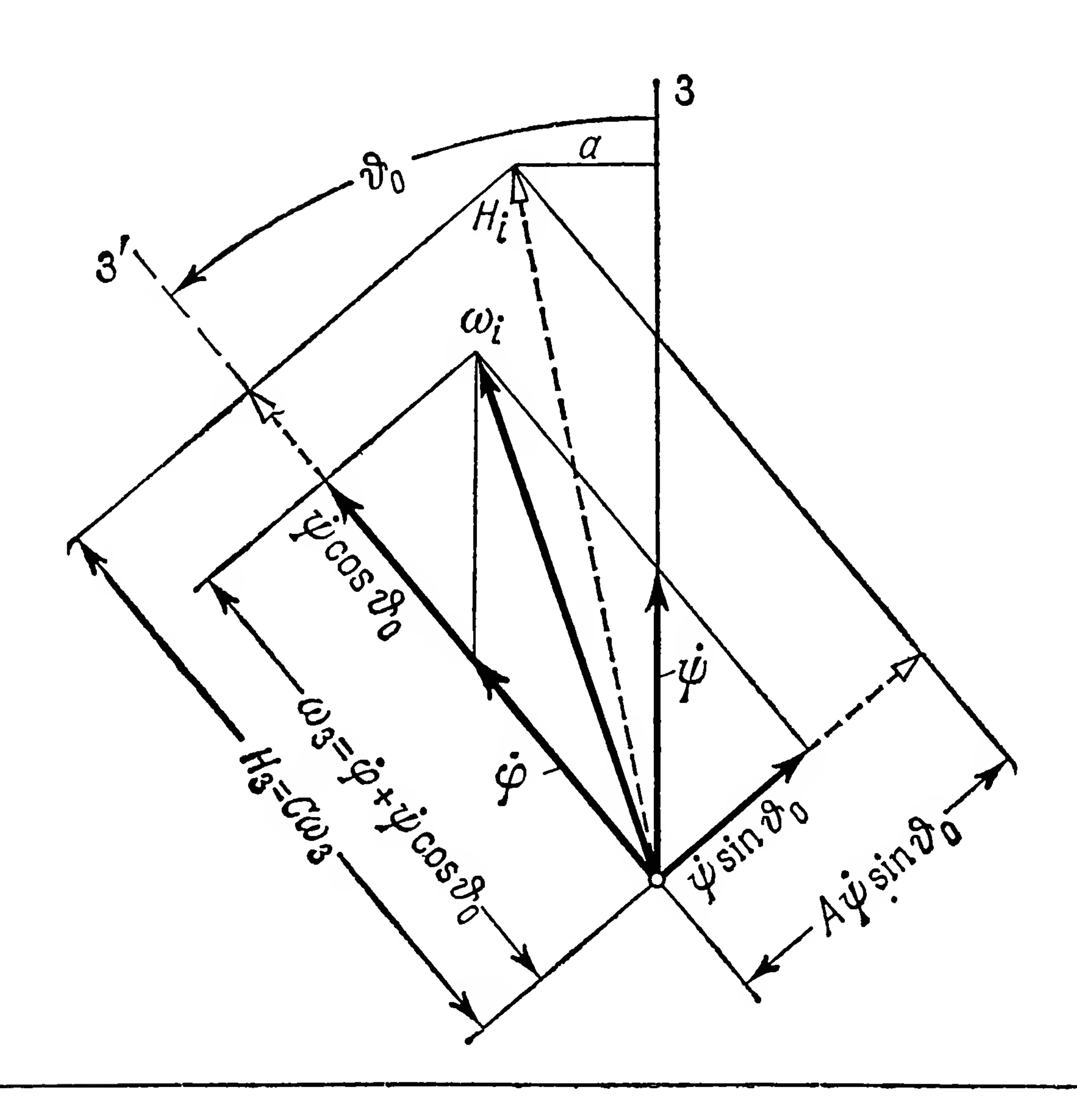


Рис. 3.6. Построение вектора кинетического момента H_i симметричного ротора, совершающего собственное ($\dot\varphi$) и дополнительное ($\dot\psi$) вращения.

b) *Быстровращающийся гироскоп.* В технике, использующей гироскопические явления, быстровращающиеся роторы играют особую роль. Для них можно ограничиться более простыми приближенными соотношениями, которыми часто пользуются главным образом в теории гироскопических приборов. В рассматриваемом нами случае можно принять $\dot\varphi \gg \dot\psi$. Однако одного этого условия, как оказывается, недостаточно. Требуется не столько высокая скорость собственного вращения, сколько соответствующий этому быстрому вращению большой кинетический момент $C\dot\varphi$. Поэтому о быстровращающемся гироскопе можно говорить лишь в том случае, когда выполняются условия:

$$H_3' \gg \begin{cases} H_1', \\ H_2' \end{cases} \quad \text{или} \quad C\dot\varphi \gg \begin{cases} A\dot\psi, \\ B\dot\psi. \end{cases} \tag{3.11}$$

Физически они означают, что кинетическая ось должна всегда находиться в непосредственной близости от главной оси инерции 3′, т. е. оси собственного вращения.

Для быстровращающегося гироскопа мы получаем из (3.7) приближенное значение момента реакции

$$M_i^K \approx \begin{bmatrix} (B-A-C)\,\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0\cos\varphi \\ (B-A+C)\,\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0\sin\varphi \\ -C\ddot\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Если тормозящий или движущий момент отсутствует, то $\ddot\varphi = 0$. Тогда величина вектора результирующего момента равна

$$M^K = \dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0\sqrt{(B-A)^2 + C^2 - 2C(B-A)\cos 2\varphi}.$$

Направление вектора момента в плоскости $1'$-$2'$ определяется из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B-A+C}{B-A-C}\operatorname{tg}\varphi.$$

Для симметричного ротора ($A = B$) получаем

$$M^K = C\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0 \quad \text{и} \quad \alpha = -\varphi \pm n\pi.$$

Это равенство показывает, что вектор момента совпадает с линией узлов, к чему мы уже пришли ранее и зафиксировали на рис. 3.5. Несимметрия ($A \neq B$) ведет к периодическим изменениям модуля и аргумента вектора момента. Разложим его на две составляющие — по направлению линии узлов (M_{Kn}^K) и по перпендикуляру к ней $(M_{\perp Kn}^K)$:

$$\begin{aligned} M_{Kn}^K &= M_1^K\cos\varphi - M_2^K\sin\varphi = -\dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0[C-(B-A)\cos 2\varphi], \\ M_{\perp Kn}^K &= M_1^K\sin\varphi + M_2^K\cos\varphi = \dot\varphi\dot\psi\sin\vartheta_0(B-A)\sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Как видно, обе составляющие содержат периодические члены двойной частоты относительно φ, пропорциональные разности $B-A$. Их тоже можно использовать для измерения составляющей угловой скорости $\dot\psi\sin\vartheta$, которая перпендикулярна оси собственного вращения. Они более пригодны для этой цели, чем составляющие (3.8) в направлении оси ротора, полученные выше, потому что $\dot\psi\sin\vartheta$ входит в них линейно, а в выражение (3.8) в квадрате.

По поводу направления момента M^K заметим следующее. Если тело совершает вынужденное вращение $(\omega_i^Z = \dot\psi)$, при котором его полный кинетический момент H_i, оставаясь неизменным по величине, участвует в этом вращении, как показано на рис. 3.6, то

$$M_i^K = -\frac{dH_i}{dt} = -\varepsilon_{ijk}\omega_j^Z H_k.$$

Отсюда следует, что направление этого момента всегда таково, что он стремится совместить *кинетическую ось* с осью вынужденного вращения. *Векторы* H_i *и* ω_i^Z *стремятся к одноименному*

параллелизму. Однако важное для практического использования гироскопических явлений правило об одноименном параллелизме нельзя без оговорок относить непосредственно к оси симметрии (ось 3′), чаще всего единственной зримой оси. Из построения на рис. 3.6 видно, что это допустимо только в том случае, когда ось вынужденного вращения ($\dot\psi$) не расположена между кинетической осью и осью 3′. Так всегда бывает у сплюснутых роторов ($C > A$). В случае вытянутого ротора должно соблюдаться условие

$$C\omega_3 = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta_0) > A\dot\psi\cos\vartheta_0. \tag{3.14}$$

Так как для быстровращающегося гироскопа в силу (3.11) названное условие всегда выполняется, справедливо правило:

Если ось симметрии (ось фигуры) быстровращающегося гироскопа совершает вынужденное вращение, то возникает момент реакции, стремящийся повернуть гироскоп так, чтобы оси собственного и вынужденного вращений были одноименно параллельными.

Правда, у сильно вытянутого, почти стержневидного ротора при малом $\dot\varphi$ может случиться так, что знак момента окажется противоположным. Однако этот случай не имеет практического значения.

3.1.4. Периметрический гироскоп и дробильная мельница. Связь гироскопического момента с вынужденным движением вдоль направляющей можно очень наглядно продемонстрировать на примере так называемого *периметрического гироскопа.* Его принципиальное устройство показано на рис. 3.7. Гироскоп выполнен в виде симметричного ротора R. Имеющимся на нем острием он опирается на подпятник, причем его центр масс совпадает с точкой опоры. Вдоль оси фигуры расположена стержневидная шейка. Если эту шейку, которая вращается вместе с ротором, привести в соприкосновение с неподвижным направляющим лекалом K, то шейка будет катиться по ребру лекала, одновременно производя на него заметное давление. (Качение шейки по лекалу заставляет гироскоп совершать вынужденное движение, и возникающий при этом гироскопический момент прижимает шейку к ребру лекала.)

Для вычисления этого момента представим себе направляющую в виде кривой на поверхности сферы с центром в точке опоры гироскопа (рис. 3.8). В случае симметричного ротора ($A = B$) вместо системы координат, связанной с телом, удобнее выбрать изображенную на рисунке промежуточную систему 1, 2, 3, ось 1 которой совпадает с линией узлов. Ось 3 является осью фигуры, а ось 2 перпендикулярна первым двум.

Подставив $H_i = \Theta_{ij}\omega_j$ в (3.3), мы определим гироскопический момент; при этом

$$\omega_i = \omega_i^E + \omega_i^Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot\vartheta \\ \dot\psi\sin\vartheta \\ \dot\psi\cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Theta_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

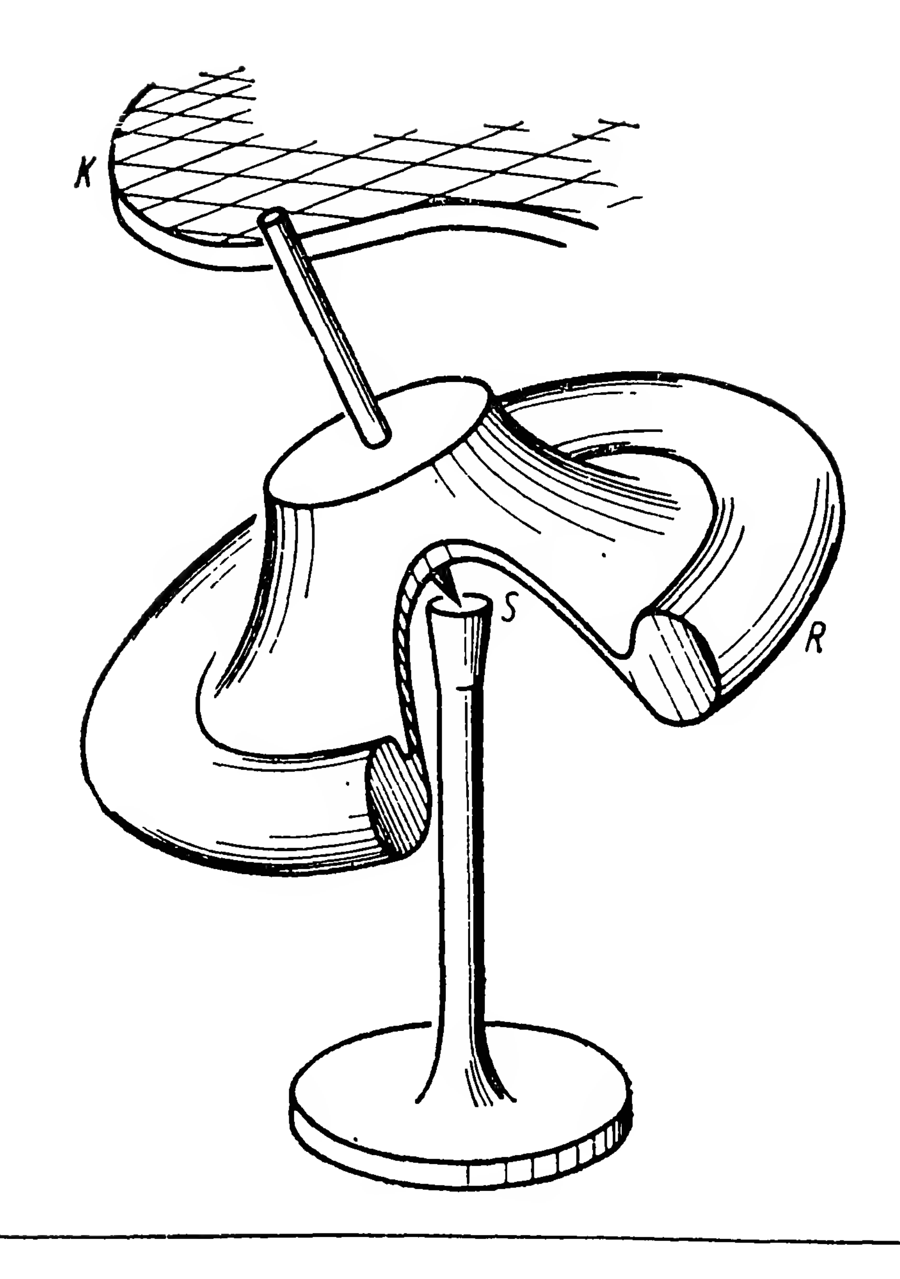


Рис. 3.7. Модель опирающегося острием периметрического гироскопа.

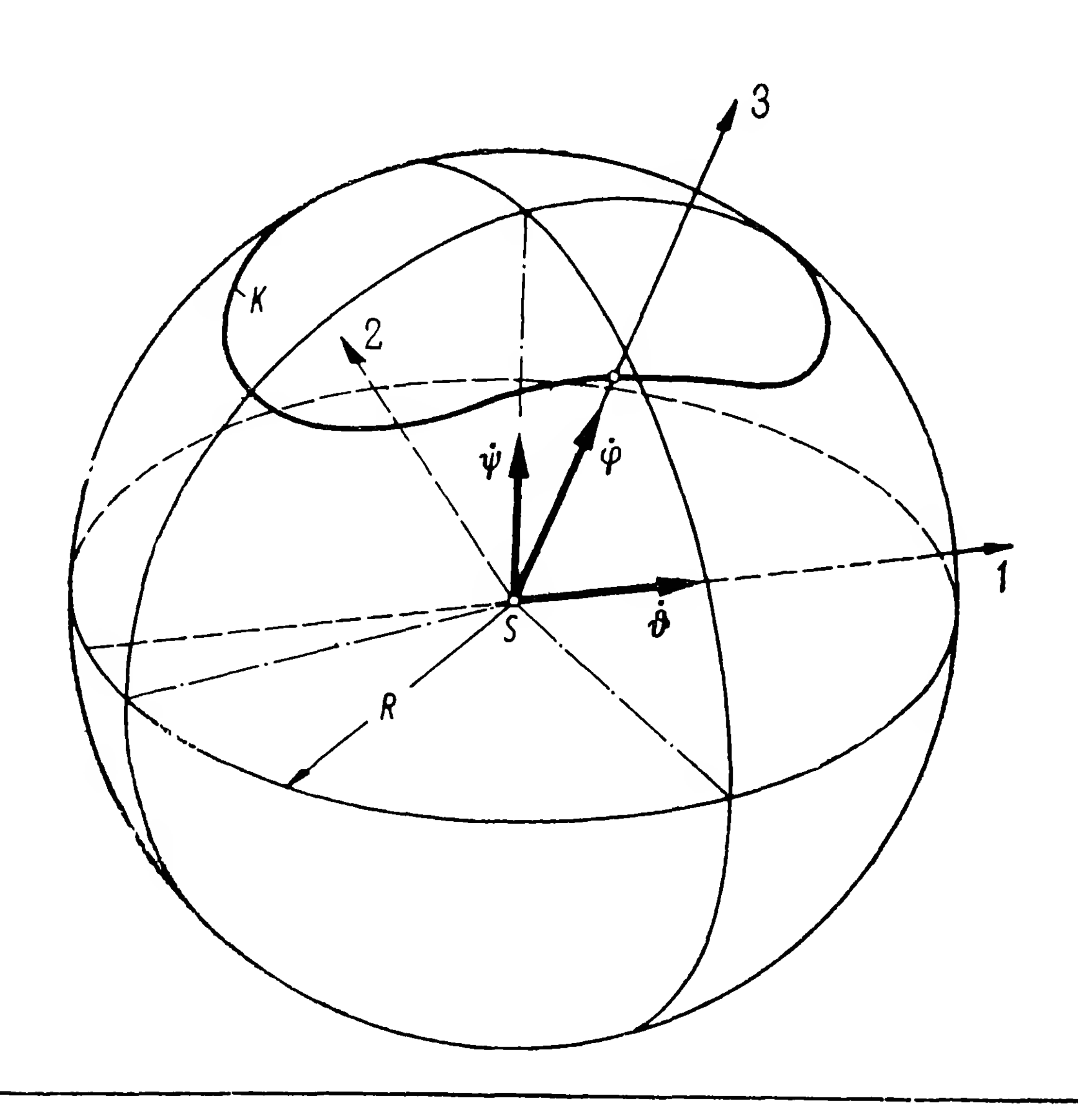


Рис. 3.8. К расчету периметрического гироскопа.

Произведя надлежащие преобразования, получим

$$M_i^K = -\begin{bmatrix} A\ddot{\vartheta} + C\dot{\psi}\sin\vartheta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - A\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta \\ A\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2A\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - C\dot{\vartheta}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) \\ C\ddot{\varphi} + C\ddot{\psi}\cos\vartheta - C\dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Если уравнение направляющей кривой $\vartheta = \vartheta(\psi)$ задано, то для того, чтобы определить момент, а тем самым и давление, которые

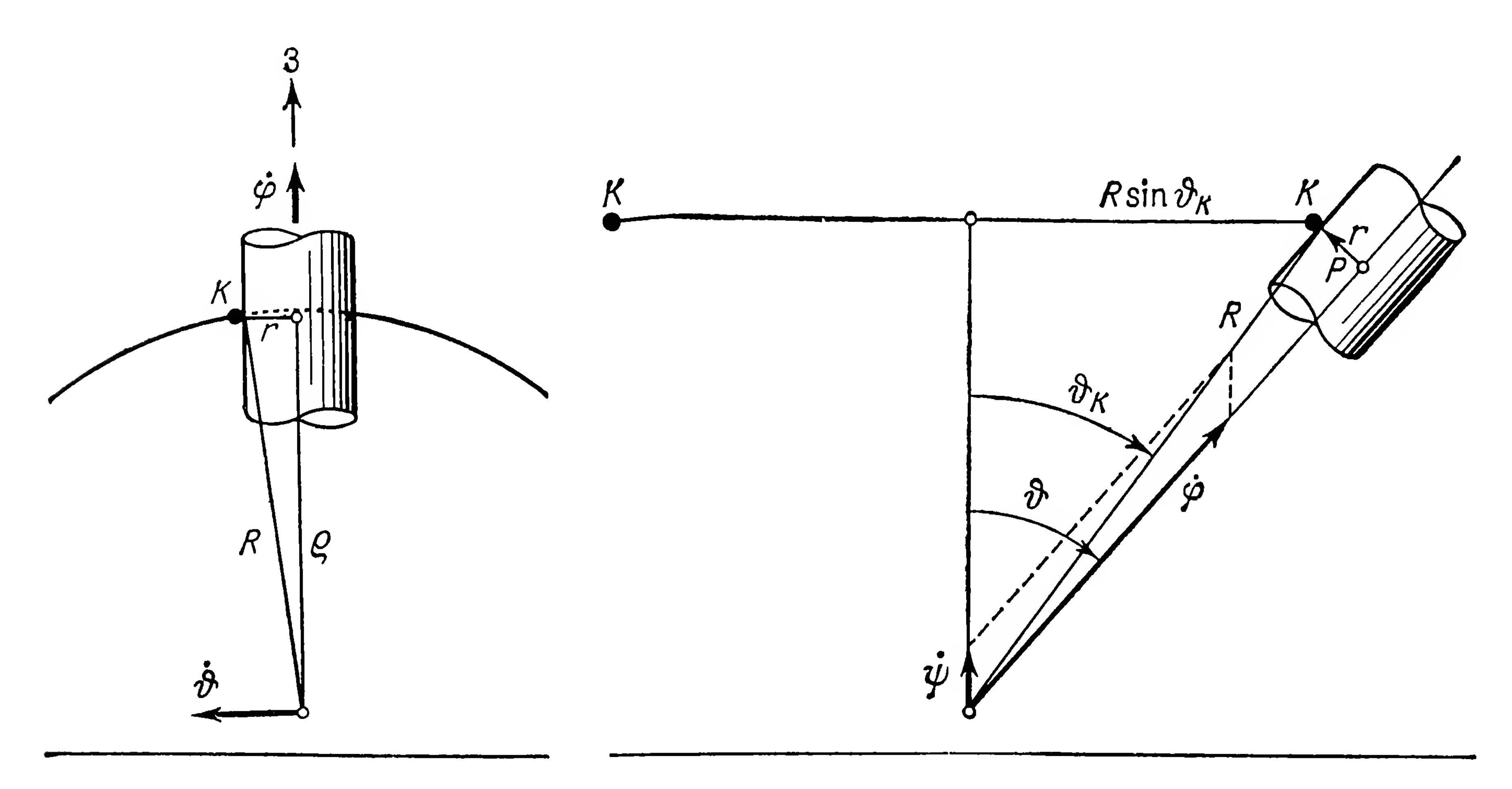


Рис. 3.9. Качение цилиндрической шейки по направляющей K для $\dot{\psi}=0$.

Рис. 3.10. Качение цилиндрической шейки по направляющей K для $\dot{\vartheta}=0$.

соответствуют определенной угловой скорости гироскопа, требуется еще учесть условие качения, например, в виде уравнения $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\dot{\psi}, \vartheta, \dot{\vartheta})$. Рассмотрим подробнее два частных случая.

а) Пусть направляющая кривая обладает тем свойством, что заставляет ось 3′ двигаться вдоль меридиана (дуги большого круга, проходящего через точку $\vartheta = 0$). Тогда $\psi = \text{const}$ и $\dot{\psi} = 0$. Подставляя эти значения в (3.15), получаем

$$M_i^K = \begin{bmatrix} -A\ddot{\vartheta} \\ C\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \\ -C\ddot{\varphi} \end{bmatrix}.$$

При отсутствии трения в опоре и трения качения $\ddot{\varphi} = 0$; следовательно, $\dot{\varphi} = \text{const}$. Как видно из условия качения, $\dot{\vartheta}$ тоже постоянна. Если R — радиус сферы, на поверхности которой расположена

направляющая кривая, а r — радиус цилиндрической шейки (рис. 3.9), то условие качения имеет вид

$$r\dot{\varphi} = \rho\dot{\vartheta} = \sqrt{R^2 - r^2}\,\dot{\vartheta}.$$

Поскольку $\ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} = 0$, остается только гироскопический момент относительно оси 2. Его величина

$$M_2^K = C\dot{\vartheta}\dot{\varphi} = (Cr/\rho)\,\dot{\varphi}^2 = (C\rho/r)\,\dot{\vartheta}^2. \qquad (3.16)$$

Этот момент прижимает шейку к направляющей с силой нормальной реакции

$$N = M^K/\rho = (Cr/\rho^2)\,\dot{\varphi}^2 = (C/r)\,\dot{\vartheta}^2.$$

Легко сообразить, что при перемене знака $\dot{\vartheta}$ сила по-прежнему прижимает шейку.

b) В качестве второго частного случая рассмотрим направляющую кривую K, представляющую собой окружность радиуса $R\sin\vartheta_K$ (рис. 3.10). Будем рассматривать качение по *наружной* стороне кривой. Тогда скорость v_P некоторой точки P оси фигуры равна

$$v_P = (R\sin\vartheta_K + r\cos\vartheta)\,\dot{\psi} = r\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta),$$

и условие качения примет вид

$$R\sin\vartheta_K\dot{\psi} = r\dot{\varphi}. \qquad (3.17)$$

Кроме того, в рассматриваемом случае $\dot{\vartheta} = 0$, и вследствие отсутствия трения $\ddot{\psi} = \ddot{\varphi} = 0$, поэтому в выражении (3.15) остается лишь один момент реакции относительно оси 1

$$M_1^K = -\dot{\psi}\sin\vartheta\,[C\,(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - A\dot{\psi}\cos\vartheta], \qquad (3.18)$$

или с учетом равенства (3.17)

$$M_1^K = -\dot{\psi}^2\sin\vartheta\left[\frac{CR\sin\vartheta_K}{r} + (C - A)\cos\vartheta\right]. \qquad (3.19)$$

В интересующем нас интервале $0 < \vartheta < \pi/2$ знак момента

для сплюснутого ротора $(C > A)$: $M_1^K < 0$,

для вытянутого ротора $(C < A)$: $\begin{cases} M_1^K < 0 \text{ при } R\sin\vartheta_K > \rho_0 \\ M_1^K > 0 \text{ при } R\sin\vartheta_K < \rho_0, \end{cases}$

где

$$\rho_0 = \frac{A - C}{C}\,r\cos\vartheta.$$

Нетрудно сообразить, что отрицательный момент свидетельствует о давлении на направляющую. Поэтому при качении снаружи кривой сплюснутый ротор никогда не покидает направляющую,

вытянутый же покидает последнюю, если ее радиус меньше критического значения ρ_0. Это явление можно пояснить наглядно: если кривизна кривой окажется меньше, чем кривизна дуги, которую гироскоп описал бы, имея возможность свободно совершать нутационное движение, то он покинет направляющую. К тому же результату можно прийти, используя ранее полученные соотношения, описывающие движение свободного симметричного гироскопа. Равенства (2.39) и (2.40) дают

$$\dot{\varphi} = \frac{A-C}{A}\omega_{30}, \qquad \dot{\psi} = \frac{C\omega_{30}}{A\cos\vartheta_0},$$

откуда

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = \frac{A-C}{C}\cos\vartheta_0.$$

С другой стороны, для периметрического гироскопа, согласно условию качения (3.17), имеем

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = \frac{R\sin\vartheta_K}{r}.$$

Сравнивая два полученных выражения, мы приходим к уже рассмотренному граничному случаю для периметрического гироскопа и получаем значение критического радиуса

$$\rho_0 = (R\sin\vartheta_K)_0 = \frac{A-C}{C}r\cos\vartheta_0.$$

Так как для сплюснутого гироскопа $\rho_0 < 0$, такой периметрический гироскоп может следовать всем изгибам и даже острым углам направляющей. Вытянутый же гироскоп, минуя такой угол, покинет направляющую. Однако после того, как гироскоп опишет некоторую нутационную дугу (короткую или длинную), шейка вновь коснется направляющей и в дальнейшем будет продолжать свое движение по ней.

Если периметрический гироскоп катится *изнутри* кривой, то условие качения будет другим, именно

$$R\sin\vartheta_K\dot{\psi} = -r\dot{\varphi}.$$

Подставив это условие в (3.18), найдем гироскопический момент

$$M_1^K = \dot{\psi}^2\sin\vartheta\left[\frac{CR\sin\vartheta_K}{r} - (C-A)\cos\vartheta\right]. \tag{3.20}$$

В данном случае всегда $M_1^K > 0$, так как из кинематических соображений постоянно должно быть $R\sin\vartheta_K > r$, если вообще имеет место качение по вогнутой стороне направляющей. Ввиду того что здесь положительный момент свидетельствует о давлении на направляющую, периметрический гироскоп, катящийся по вогнутой направляющей, никогда не покидает последнюю.

При любой форме направляющей момент реакции может быть найден по формуле (3.15). Не вдаваясь в разбор этого весьма общего выражения, заметим только, что и при отсутствии тормозящих или движущих моментов $\ddot{\varphi} \neq 0$ и угловая скорость собственного вращения может и не быть постоянной. Это непосредственно следует из формулы (3.15) для момента M_3^K. Принимая во внимание уравнение направляющей и условие качения, можно рассчитать переменную угловую скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$.

Практическое применение периметрического гироскопа воплощено в так называемой дробильной мельнице, предназначенной

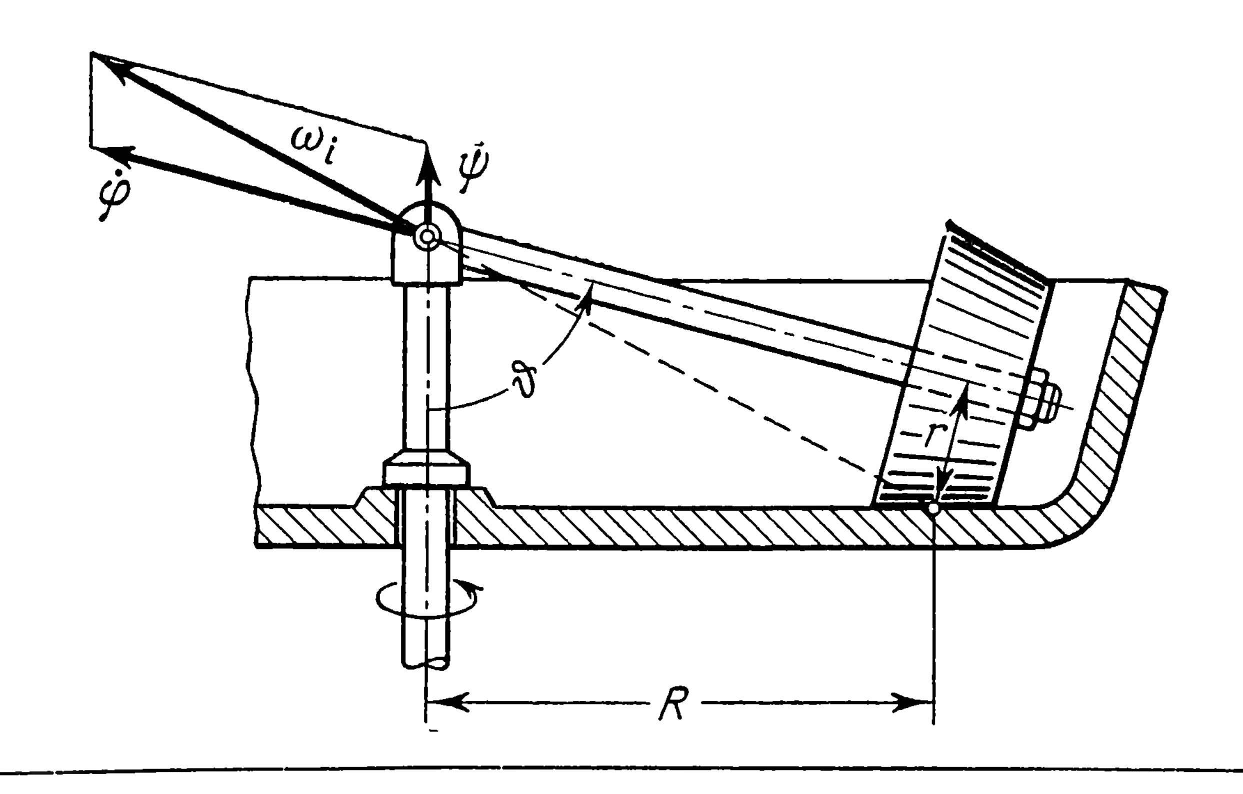


Рис. 3.11. Схема дробильной мельницы.

для измельчения твердых материалов. Ее принципиальное устройство показано на рис. 3.11. Внутри мельничной чаши бегают мельничные колеса (бегуны). Они приводятся в движение посредством штанг, связывающих каждый из них с вертикальным валом, который вращается с некоторой угловой скоростью $\dot{\psi}$. Сами бегуны при этом катятся по днищу чаши. Чистое качение возможно здесь, естественно, только при определенном радиусе R. Условие качения имеет вид $r\dot{\varphi} = R\dot{\psi}$. Полная угловая скорость бегуна складывается из угловой скорости собственного вращения $\dot{\varphi}$ и вынужденной угловой скорости $\dot{\psi}$. Из формулы (3.10), которую мы здесь вправе применить, получаем выражение гироскопического момента

$$M^K = \dot{\psi}^2 \sin\vartheta \left[(C - A)\cos\vartheta + \frac{CR}{r}\right]. \tag{3.21}$$

Вектор этого момента перпендикулярен векторам $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ и на рис. 3.11 направлен за плоскость чертежа. Давление, обусловленное этим моментом, добавляется к тому, которое создается собственным весом бегунов.

При заданных A, C, R, r мы можем, пользуясь формулой (3.21), вычислить угол ϑ, при котором дополнительное давление оказывается наибольшим. Для того чтобы получить представление о величине дополнительного давления, произведем приближенный расчет его для $\vartheta = \pi/2$. Положим, что бегун выполнен в виде сплошного однородного цилиндра, так что $C = mr^2/2 = Gr^2/(2g)$. Тогда сила нормального давления на днище вследствие гироскопического эффекта равна

$$N = \frac{M^K}{R} = \frac{C}{r}\dot{\psi}^2 = \frac{Gr}{2g}\dot{\psi}^2, \tag{3.22}$$

или

$$\frac{N}{G} = \frac{r}{2g}\dot{\psi}^2.$$

Таким образом, отношение N/G не зависит от R. Если принять, например, $r = 0{,}2$ м, то уже при вынужденной угловой скорости 100 об/мин сила нормального давления достигает величины, равной весу бегуна. Так как формула содержит $\dot{\psi}$ во второй степени, то путем повышения вынужденной угловой скорости можно достичь значительного увеличения дополнительного давления.

3.2. Общие сведения о движении гироскопа под действием сил

3.2.1. Действие момента сил. Если на ротор гироскопа действует некоторая сила, то совместно с возникающей в точке опоры реакцией она образует момент M_i. Теорема о кинетическом моменте (1.75) связывает этот момент с вектором кинетического момента H_i. Выполняя интегрирование, получаем

$$H_i = H_i^0 + \int M_i\,dt. \tag{3.23}$$

При заданном $M_i = M_i(t)$ и известном начальном кинетическом моменте H_i^0 мы можем отсюда определить $H_i = H_i(t)$. Зависимость между векторами H_i и M_i можно представить более наглядно, если написать выражение (3.23) в виде итерационной формулы, принимая момент на каждом шаге Δt постоянным:

$$H_i^n = H_i^{n-1} + \Delta H_i = H_i^{n-1} + M_i\,\Delta t.$$

Путем последовательного добавления приращений $\Delta H_i = M_i \Delta t$ мы можем по H_i^0 построить вектор $H_i(t)$ (рис. 3.12). В ходе этого построения мы непосредственно замечаем общую тенденцию: момент изменяет направление вектора кинетического момента, причем так, что последний стремится к одноименному совпадению с вектором M_i. Это положение, относящееся к *вектору кинетического момента*, нельзя распространять без оговорок на ось вращения или на ось фигуры (см. также п. 3.1.3*b*). Но так как у быстровращающегося гироскопа ось фигуры и кинетическая ось почти совпадают, то най-

денный выше результат можно сформулировать следующим образом:

Под действием внешнего момента ось фигуры быстровращающегося гироскопа стремится всегда к одноименному параллелизму с вектором момента.

Это *правило об одноименном параллелизме* как полезный ориентир играет большую роль в вопросе о применении гироскопов. Не следует, однако, забывать, что здесь идет речь об утверждении, верном лишь приближенно. При более строгом анализе приходится иногда учитывать несовпадение оси фигуры с кинетической осью. К этому мы еще вернемся в п. 3.2.2.

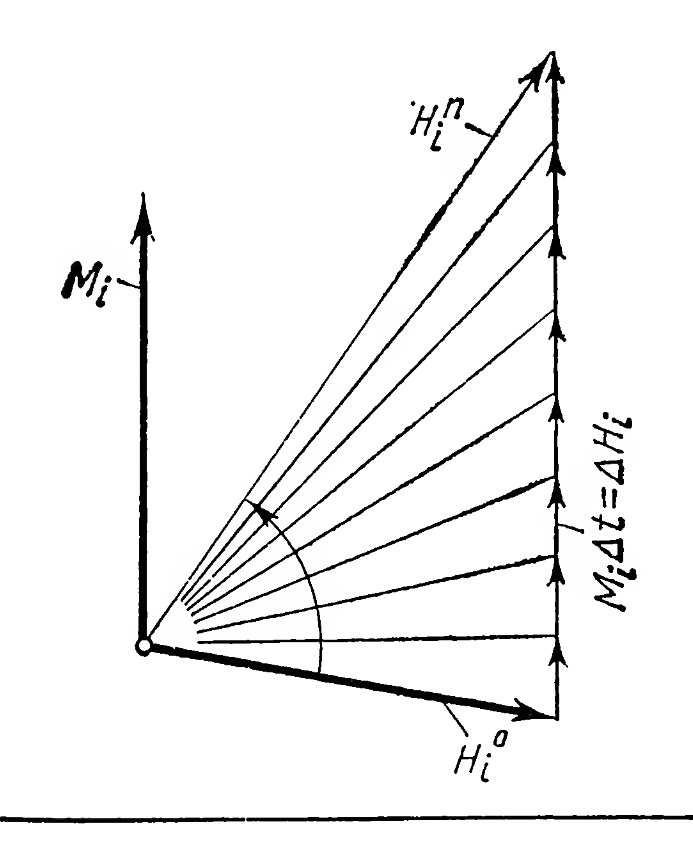


Рис. 3.12. Изменение вектора кинетического момента H_i при постоянном моменте M_i.

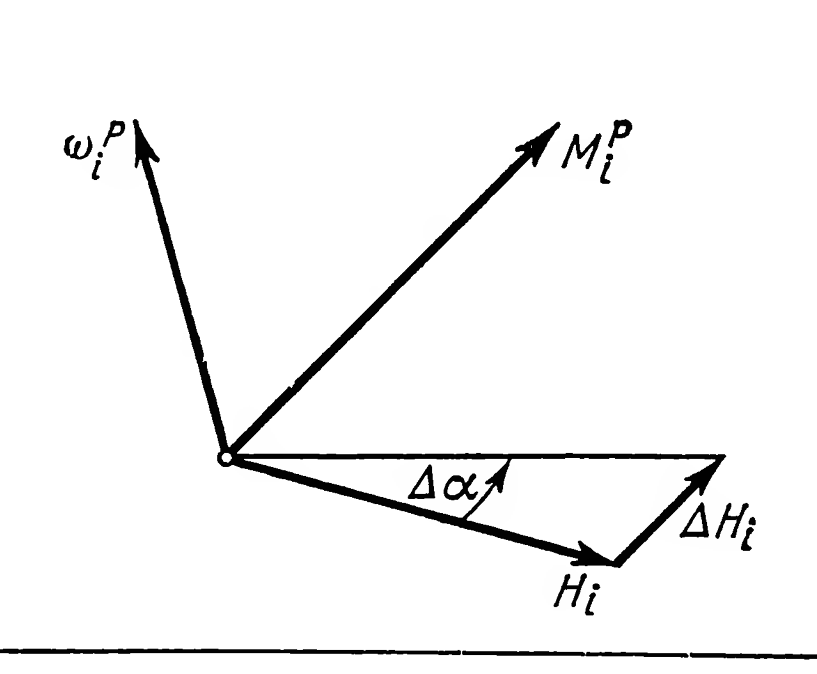


Рис. 3.13. Прецессионное движение вектора кинетического момента H_i под действием момента M_i^P.

Произвольный внешний момент M_i всегда можно разложить на две составляющие: M_i^H по направлению вектора H_i и M_i^P — по перпендикулярному к нему направлению. Влияние каждой из них на изменение вектора H_i нетрудно проследить на приведенном выше графическом построении. Мы приходим к следующим выводам.

a) Составляющая момента M_i^H изменяет *величину*, но не изменяет направления H_i. При $M_i^H \uparrow\uparrow H_i$ имеем $dH/dt > 0$, и вращение гироскопа убыстряется (разгон); при $M_i^H \downarrow\uparrow H_i$ вращение гироскопа замедляется (торможение).

b) Составляющая момента M_i^P изменяет *направление* вектора H_i, но не изменяет его величины. Вектор H_i вращается с угловой скоростью ω_i^P вокруг оси, перпендикулярной плоскости H_i-M_i. Из рис. 3.13 видно, что при $\Delta\alpha \ll 1$

$$\Delta H_i = H_i^0 \Delta\alpha = M_i^P \Delta t;$$

отсюда ввиду $M_i^P \perp H_i$ следует

$$H = H^0 = \text{const}, \quad \omega^P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{M^P}{H}.$$

Положив, что система координат вращается с угловой скоростью ω_i^P, получим из теоремы о кинетическом моменте зависимость между векторами H_i, M_i^P, ω_i^P в следующем виде:

$$M_i^P = \frac{dH_i}{dt} = \varepsilon_{ijk}\omega_j^P H_k. \tag{3.24}$$

Вектор ω_i^P называется вектором угловой скорости прецессии, а само движение гироскопа — *прецессией*. Согласно распространенной в настоящее время в гироскопической технике терминологии, под прецессией понимается вообще движение гироскопа под действием сил. Нутацией называется движение свободного гироскопа. Собственное движение — нутация — может накладываться на вынужденное — прецессию.

Изложенные выше под рубриками a) и b) положения относятся к вектору H_i и, следовательно, к кинетическому моменту и кинетической оси. Нередко большой интерес представляет движение оси фигуры, так как оно может быть непосредственно наблюдаемо и измерено в гироскопических устройствах. Рассмотрим это движение сначала для случая ударного внешнего момента, а затем и для более общего случая.

3.2.2. Удары по гироскопу. Если гироскоп подвергнуть действию ударной силы или ударного момента, то в течение весьма короткого времени τ удара кинетический момент изменится на величину H_i^{St}, которая, согласно (3.23), равна

$$H_i^{St} = H_i - H_i^0 = \int_0^\tau M_i\, dt. \tag{3.25}$$

Мы можем здесь, как и в предыдущем пункте, разложить момент на составляющие по направлению H_i^0 и ему перпендикулярному. В первом случае имеем $H_i^{St} \parallel H_i^0$. Удар приводит к внезапному изменению величины H_i^0, направление же вектора не изменяется. Это означает мгновенный разгон (или торможение) гироскопа. Такого рода ускорения гироскопа действительно применяются на практике: ротор либо разгоняют посредством раскручивающейся сильной пружины, либо с помощью пороховых газов доводят в течение долей секунды до очень высокой скорости вращения. С этой целью воспламеняют находящийся в роторе гироскопа пороховой заряд; газы, образующиеся при сгорании, выходят наружу через

отверстия, расположенные приблизительно по касательным к периметру ротора и, развивая реактивные силы, приводят его во вращение.

Более важен второй из названных случаев, когда $H_i^{St} \perp H_i^0$. Такое состояние может, например, наступить, если по гироскопу, вращающемуся вокруг главной оси, нанести удар в поперечном к ней направлении. На рис. 3.14 это продемонстрировано для симметричного гироскопа. Пусть гироскоп (на рисунке не показан) оперт в точке O и вращается вокруг оси симметрии 3′, до удара

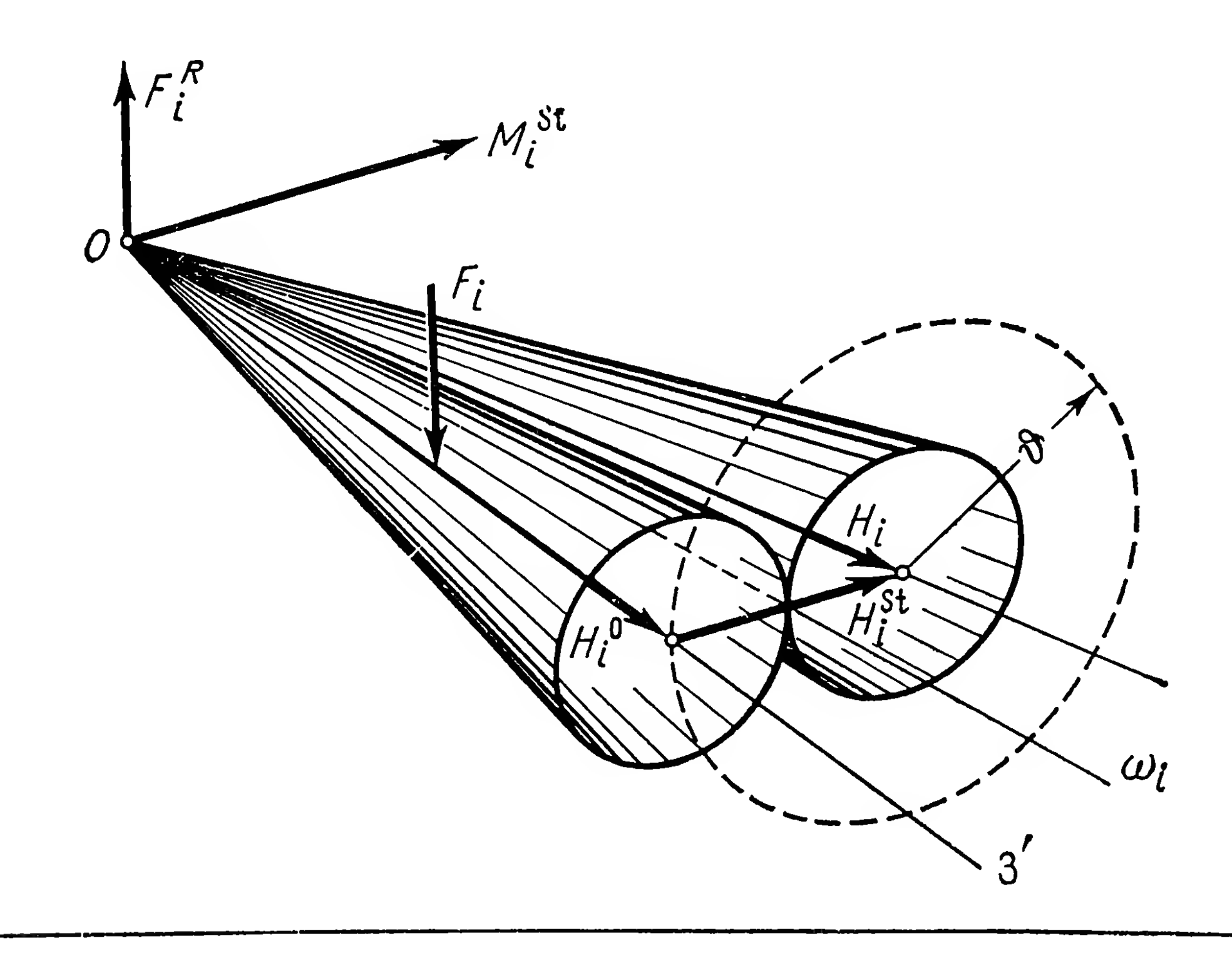


Рис. 3.14. Действие ударного момента.

неподвижной. Тогда ось фигуры, ось вращения и кинетическая ось совпадают. Приложенная к гироскопу ударная сила F_i создает совместно с силой реакции опоры F_i^R ударный момент M_i^{St}. Последний, согласно (3.25), вызывает скачкообразное изменение вектора кинетического момента от начального H_i^0 до H_i. Напротив, ось фигуры 3′ в течение короткого времени удара не меняет своего положения, так что направления оси фигуры и кинетической оси по окончании удара оказываются неодинаковыми. При этом в соответствии с нашими рассуждениями в гл. 2 возникают нутационные колебания, которые можно толковать как качение подвижного аксоида (осью которого теперь служит движущаяся ось 3′) по неподвижному (имеющему ось H_i). На рис. 3.14 последнее представлено для вытянутого гироскопа (эпициклоидальный случай). Совершенно аналогичные результаты получаются для перициклоидального случая. Наблюдаемое движение гироскопа после удара представляет собой нутацию, при которой ось фигуры 3′ вальсирует вокруг нового неподвижного направления кинетической оси,

У симметричного гироскопа — это коническое движение; половина угла при вершине конуса определяется через

$$\operatorname{tg} \vartheta = H^{St}/H^0.$$

В результате изложенного мы можем считать установленным, что удар возбуждает нутационные колебания гироскопа, при которых направление движения его оси фигуры непосредственно после удара совпадает с направлением силы F_i. Таким образом, в первый момент ось поддается силе, но, описав нутационную дугу, она возвращается в исходное положение, после чего периодически поворачивается вокруг кинетической оси в ее новом положении. Получается, что ось фигуры *в среднем* смещается на определенный угол в направлении, перпендикулярном F_i (в направлении M_i^{St}). Это среднее смещение оси фигуры соответствует смещению кинетической оси в направлении, определяемом правилом одноименного параллелизма.

В то же время можно заметить существенную разницу между поведением невращающейся инерционной массы (например, невращающегося гироскопа) и вращающегося гироскопа: удар вызывает у соответственно подвешенного тела *вращение с определенной угловой скоростью*, у гироскопа же, напротив, — *смещение* в среднем *на некоторый угол*.

У быстровращающихся гироскопов, находящих применение в технике, нутационное движение, возбужденное ударом, в общем случае настолько незаметно, что его едва ли можно уловить. В этом случае в результате серии последовательных ударов наблюдается лишь смещение оси фигуры под прямым углом к направлению удара. Это обстоятельство привело к тому часто высказываемому утверждению, что гироскоп не поддается действующей на него силе, а отклоняется в перпендикулярном направлении. Из сказанного ясно, что, строго говоря, такой тезис неверен, однако он приложим к быстровращающимся гироскопам как полезное приближение.

3.2.3. Общие приближения. Если на гироскоп действует произвольная система сил, то его движение можно приближенно определить с помощью следующего приема. Представим себе, что момент $M_i(t)$, образованный силой F_i и силой реакции F_i^R, возник благодаря большому числу последовательных малых толчков. Как было показано выше, для каждого из этих элементарных ударов может быть найдено как смещение кинетической оси, так и движение оси фигуры. Если названные смещения отложить, например, в виде отрезков на поверхности сферы с центром в точке опоры гироскопа, то путем сопряжения этих элементарных дуг мы получим перемещения кинетической оси и оси фигуры как функции времени.

На рис. 3.15 показан пример такого процесса. Пусть сначала гироскоп вращается вокруг главной оси (ось 3′), пересекающей воображаемую неподвижную сферу в точке O. Кинетическая ось и ось фигуры пока еще совпадают. В результате первого элементарного толчка кинетическая ось смещается в точку 1. Ось фигуры начинает нутационное движение, которое для симметричного гироскопа можно представить как дугу окружности, описываемую

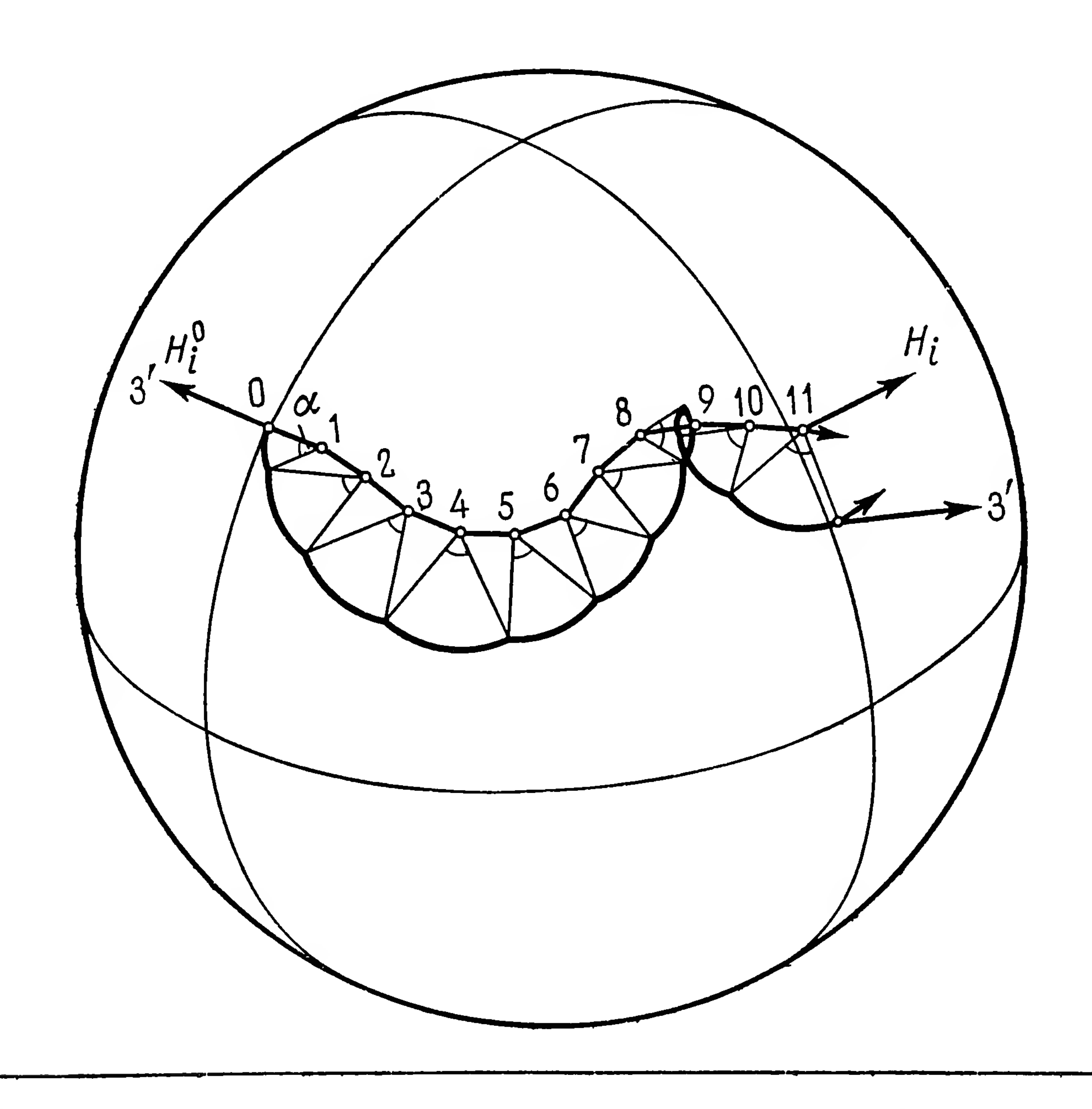


Рис. 3.15. Перемещение кинетической оси и оси фигуры под действием последовательных ударных моментов.

на сфере из точки 1. Если T_N — время полного нутационного колебания, а элементарные толчки следуют через промежутки времени T_S, то угол, соответствующий длине нутационной дуги, равен

$$\alpha = 2\pi T_S / T_N.$$

После второго толчка кинетическая ось смещается в положение 2. Перемещением оси фигуры между вторым и третьим толчками будет теперь дуга окружности, описанная из точки 2 и примыкающая к названной выше дуге. Таким способом можно построить путь кинетической оси как последовательность отрезков прямой (точнее, дуг больших кругов) и путь оси фигуры как последовательность дуг окружности.

Точность описанного построения зависит, конечно, от выбранного шага, т. е. от интервала T_S между толчками. Для того чтобы хорошо воспроизвести путь оси фигуры, надо выбрать $T_S \ll T_N$. Напротив, путь кинетической оси можно получить с достаточной точностью при более грубом разбиении по времени. Построение становится трудоемким (или неточным), если гироскоп несимметричен, если велико расхождение между кинетической осью и осью фигуры или если неравномерно собственное вращение. Последнее имеет место при наличии составляющей момента в направлении оси фигуры. В этом случае пришлось бы соответственно изменить величину угла α.

Идею, лежащую в основе приведенного построения, можно было бы сформулировать теоретически и получить таким образом метод расчета движения гироскопа. Мы вернемся еще к этому вопросу при рассмотрении специальных случаев (гироскоп с самовозбуждением).

Расчет движения гироскопа под действием сил бывает затруднен главным образом потому, что внешние силы или моменты заранее не заданы (являясь, например, неизвестными функциями времени). Они часто зависят еще и от положения ротора гироскопа, которое само по себе подлежит определению из уравнений движения. Поэтому здесь нельзя, как мы это делали, например, при исследовании свободного гироскопа, решать отдельно динамические уравнения гироскопа относительно составляющих угловой скорости, а затем находить из кинематических уравнений углы, определяющие его положение; обе системы уравнений чаще всего приходится рассматривать совместно. Исключение составляют только вопросы, относящиеся к *гироскопам с самовозбуждением*. Под этим понимаются такие гироскопы, для которых известны *связанные с телом* составляющие внешнего момента, не зависящие от текущего положения тела. Следует еще указать на то, что термин «самовозбуждение» употребляется здесь в несколько ином смысле, чем это принято в теории колебаний.

Особую роль в гироскопической технике, да, пожалуй, и в классической теории играют гироскопы, у которых точка опоры ротора не совпадает с его центром масс. Такие гироскопы обычно называют *тяжелыми*, потому что здесь внешний момент создается силой тяжести. Направление силы тяжести можно считать неизменным в пространстве, но ее точка приложения связана с телом. Поэтому выражение момента силы тяжести обусловлено выбором как неподвижной, так и подвижной систем координат. Особый вид тяжелых гироскопов представляют собой спутники, поведение которых мы разберем более обстоятельно в гл. 8.

Если составляющие наложенного на гироскоп момента в неподвижной системе являются известными функциями времени, то такой гироскоп называют *гироскопом с вынужденным возбуждением*. Чаще всего здесь приходится иметь дело с периодическими

функциями времени, однако в технических применениях гироскопов представляют интерес и квазипериодические, а также случайные возмущения (например, на кораблях из-за волнения или на самолетах из-за шквалистого ветра).

3.3. Тяжелый гироскоп

3.3.1. Уравнения движения тяжелого гироскопа, общие интегралы и обзор результатов. Гироскоп называется тяжелым, если действующий на него внешний момент создается силой тяжести. Если

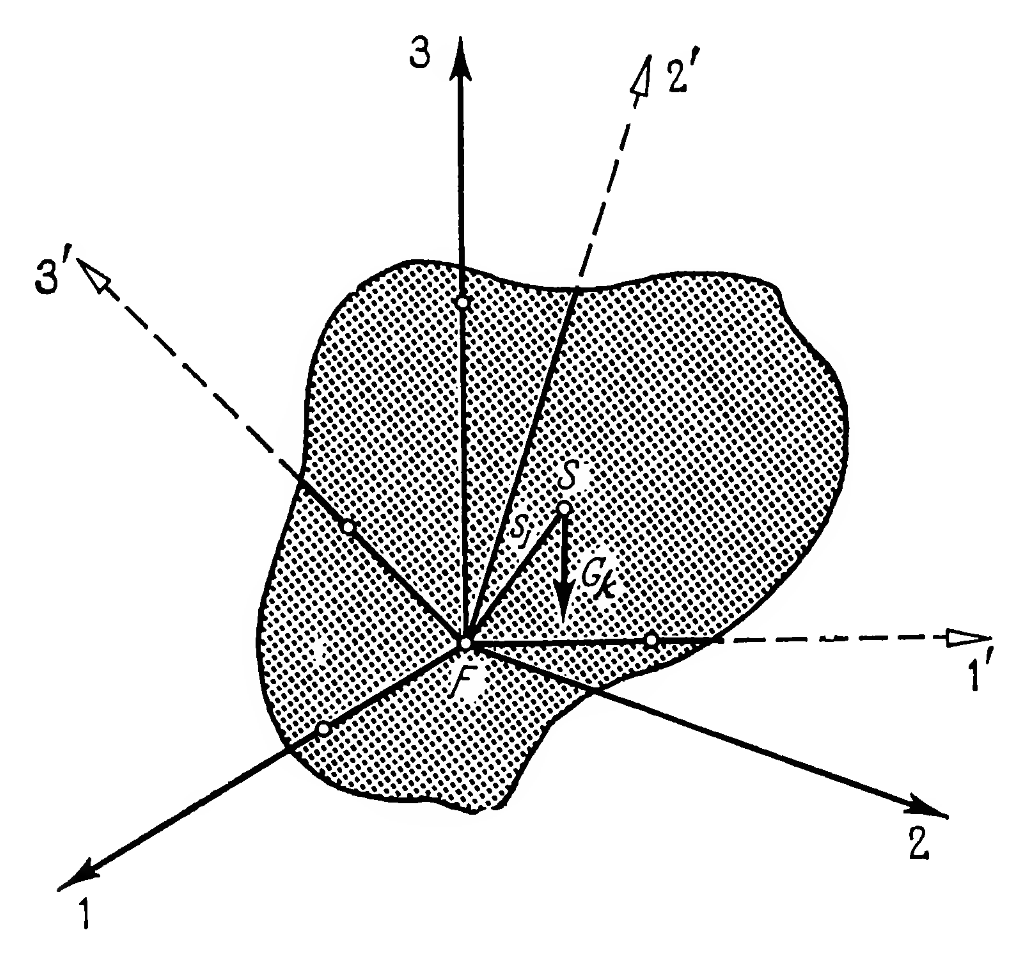


Рис. 3.16. К определению момента силы тяжести тяжелого гироскопа.

центр масс S твердого тела не совпадает с точкой опоры F (рис. 3.16), то возникает момент силы тяжести

$$M_i = \varepsilon_{ijk} s_j G_k, \tag{3.26}$$

где G_i — вектор силы тяжести, а s_i — радиус-вектор точки S. В написанном выражении надо положить $G_k = -Ga_{3k}$, где a_{3k} — единичный вектор по направленной вертикально вверх оси 3. Его координаты соответствуют элементам третьей строки матрицы преобразования a_{ij} (см. п. 1.4.3); обозначим их a_{31}, a_{32}, a_{33}. Имеем

$$a_{3i}^2 = a_{3i}a_{3i} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1. \tag{3.27}$$

Подставив (3.26) в (1.83), получим общее уравнение движения тяжелого гироскопа в векторной форме

$$\frac{d}{dt}(\Theta_{ij}\omega_j) = \Theta_{ij}\frac{d'\omega_j}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j\Theta_{kl}\omega_l = M_i = G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k. \tag{3.28}$$

Если за подвижную систему принять систему ставных осей, то уравнения движения в проекциях на эти оси становятся легко обозримыми:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= G\,(a_{32}s_3 - a_{33}s_2), \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= G\,(a_{33}s_1 - a_{31}s_3), \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= G\,(a_{31}s_2 - a_{32}s_1). \end{aligned} \tag{3.29}$$

В качестве неизвестных здесь фигурируют координаты вектора угловой скорости ω_i и вертикального единичного вектора a_{3i} — всего шесть переменных. Так как (3.27) и (3.29) образуют систему лишь четырех уравнений, то для исследования движения тяжелого гироскопа должны быть привлечены дополнительные уравнения. Последние можно получить из кинематических соображений, исходя из того, что вертикальный единичный вектор a_{3i} неподвижен в пространстве:

$$\frac{da_{3i}}{dt} = \frac{d'a_{3i}}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k} = 0, \tag{3.30}$$

или в координатах

$$\begin{aligned} \dot{a}_{31} + \omega_2 a_{33} - \omega_3 a_{32} &= 0, \\ \dot{a}_{32} + \omega_3 a_{31} - \omega_1 a_{33} &= 0, \\ \dot{a}_{33} + \omega_1 a_{32} - \omega_2 a_{31} &= 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Двух векторных уравнений ((3.28) и (3.30)) или шести скалярных ((3.29) и (3.31)) достаточно для решения задачи. Общее решение указанных уравнений движения тяжелого гироскопа до настоящего времени не найдено. Так как только пять из шести неизвестных независимы, то, согласно теории интегрирования Якоби, точное решение в квадратурах, т. е. путем вычисления интегралов, оказалось бы возможным, если бы удалось найти три так называемых первых интеграла уравнений движения. Два подобных интеграла общего характера находятся без труда, третий же пока найден только для некоторых частных случаев.

Векторное уравнение (3.28) можно проинтегрировать, предварительно умножив его скалярно на a_{3i}. Поскольку $M_i a_{3i} = 0$ и $da_{3i}/dt = 0$, имеем

$$a_{3i}\frac{d}{dt}(\Theta_{ij}\omega_j) = \frac{d}{dt}(a_{3i}H_i) = 0, \tag{3.32}$$

или

$$a_{3i}H_i = H_0 = \mathrm{const}. \tag{3.33}$$

Полученный *интеграл кинетического момента* указывает на то, что вертикальная составляющая полного кинетического момента постоянна. Этот результат становится ясным и физически, если вспомнить, что вектор момента силы тяжести (3.26) всегда лежит в горизонтальной плоскости, а, согласно теореме о кинетическом моменте (1.75), изменение H_i пропорционально внешнему моменту.

Для нахождения второго интеграла предварительно умножим скалярно (3.28) на ω_i. Принимая во внимание (1.71), получаем

$$\omega_i\Theta_{ij}\frac{d'\omega_j}{dt}=\omega_i\frac{d'H_i}{dt}=\frac{d'}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega_iH_i\right)=\frac{d'T}{dt},$$

и, далее, привлекая (3.30),

$$G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k\omega_i=G\varepsilon_{ijk}\omega_ja_{3k}s_i=-G\frac{d'a_{3i}}{dt}s_i=-G\frac{d'}{dt}(a_{3i}s_i)=-\frac{d'U}{dt},$$

где U — потенциальная энергия. Объединяя записанные выражения и выполняя интегрирование, получаем *интеграл энергии*

$$T+U={}^1/_2H_i\omega_i+Gs_ia_{3i}=E_0=\text{const},\qquad(3.34)$$

где E_0 — константа. И этот результат можно объяснить физически: так как мы предполагали отсутствие диссипативных сил, полная энергия $T+U$ тяжелого гироскопа должна оставаться неизменной.

Соотношение (3.27) можно понимать как общий интеграл кинематических уравнений (3.30) или (3.31). Однако его не удастся использовать для интегрирования уравнений движения, если мы будем пытаться сократить с его помощью число неизвестных[1]).

В таблице, приведенной на стр. 118, дан обзор частных случаев, для которых удалось найти точные решения уравнений движения. Все девять представленных в таблице проблем относятся к частным случаям тяжелого гироскопа, которые характеризуются ограничениями, наложенными либо на форму эллипсоида инерции, либо на положение центра масс, либо, наконец, на начальные условия.

Случай 1 включен в таблицу для полноты картины; он касается уже разобранного в гл. 2 свободного гироскопа. Общие решения, т. е. решения, справедливые при произвольных начальных условиях, известны лишь для случаев 2 и 3. В случаях 4—9 речь идет о движениях, осуществление которых связано с определенными, порой специальными начальными условиями. То, что приведенные в таблице случаи 1—3 занимают особое место, следует также из доказанной Ляпуновым теоремы: названные три случая — единственные, для которых составляющие векторов ω_i и a_{3i} являются однозначными функциями времени *при произвольных начальных условиях.*

Литература по классической теории гироскопов посвящена почти исключительно тяжелому гироскопу. Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение нелинейных уравнений движения (3.29) и (3.31). Как бы ни были привлекательны для математика

[1]) Следует иметь в виду, что соотношение (3.27) не входит в число необходимых трех интегралов, упомянутых выше. — *Прим. ред.*

Случай	Ограничения, наложенные на			Автор
	форму эллипсоида инерции	положение центра масс	начальные условия	
1	Произвольный	$s=0$	Произвольные	Эйлер—Пуансо
2	$A=B$	$s_1=s_2=0$ $s_3\neq 0$	Произвольные	Лагранж—Пуассон
3	$A=B=2C$	$s_1\neq 0$ $s_2=s_3=0$	Произвольные	Ковалевская
4	$A=B=4C$	$s_1\neq 0$ $s_2=s_3=0$	$(H_i a_{3i})_0=0$	Горячев—Чаплыгин
5	$A=B=4C$	$s_1\neq 0$ $s_2=s_3=0$	$(\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k})_0=0$	Мерцалов
6	$2A=C$	$s_1=s_2=0$ $s_3\neq 0$	$(\omega_i a_{i2})_0=0$	Стеклов
7	Произвольный	Произвольное	$(\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k})_0=0$	Штауде
8	Произвольный	$\frac{s_1}{s_3}=\sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}}$, $s_2=0$	$(H_i s_i)_0=0$	Гесс
9	Произвольный	$\frac{s_1}{s_3}=\sqrt{\frac{A-B}{B-C}}$ $s_2=0$	$\omega_0=\sqrt[4]{\frac{4s^2}{(A-B)(B-C)+(A-B+C)^2}}$	Гриоли

достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они почти (или даже совсем) не представляют интереса. К этому следует добавить, что с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин сведению решения к квадратурам уже нельзя больше отводить того исключительного места, которое оно по праву занимало в рамках классической механики. В настоящее время не представляет трудности проанализировать с помощью численного интегрирования возможные типы движения тяжелого гироскопа при произвольных начальных условиях с любой желаемой точностью. Мы ограничимся, однако, исследованием таких случаев, которые или представляют интерес либо с методической точки зрения, либо с точки зрения логики самого явления, или же являются важными с точки зрения приложений. Среди них, несомненно, особую роль играет случай 2 в приведенной выше таблице — тяжелый симметричный гироскоп по Лагранжу. Читатели, интересующиеся преимущественно результатами классической теории гироскопов, могут почерпнуть для себя необходимые сведения из обширной специальной литературы (например, [3, 4, 6, 7]).

3.3.2. Тяжелый симметричный гироскоп по Лагранжу. Если эллипсоид инерции рассматриваемого тела относительно точки опоры F является эллипсоидом вращения ($A = B$) и центр масс лежит на его оси симметрии (ось $3'$: $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = s \neq 0$), то уравнения движения допускают точное решение. Здесь система (3.29) переходит в следующую:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_2\omega_3 &= Ga_{32}s, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= -Ga_{31}s, \\ C\dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Из (3.35/3) как новый частный интеграл немедленно следует постоянство проекции вектора угловой скорости на ось симметрии:

$$\omega_3 = \omega_0 = \text{const}. \tag{3.36}$$

Этот результат также легко объясним: если центр масс S лежит на оси симметрии, то вектор M_i всегда перпендикулярен последней; вследствие этого конец вектора кинетического момента H_i может двигаться только в плоскости, перпендикулярной указанной оси симметрии. Тогда при постоянном H_3 в силу $H_3 = C\omega_3$ остается неизменной и ω_3.

Если для последующего анализа принять неподвижную систему координат 1, 2, 3 с вертикальной осью 3 (например, согласно рис. 3.16), то, используя эйлеровы углы ψ, ϑ, φ, можно прийти к особенно простым соотношениям.

С помощью выражений

$$a_{3l}=\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H_l=\begin{bmatrix} A\omega_1 \\ A\omega_2 \\ C\omega_0 \end{bmatrix},$$

вытекающих из (1.45) и (1.69), получаем для интеграла кинетического момента (3.33)

$$A\sin\vartheta(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)+C\omega_0\cos\vartheta=H_0.$$

Это равенство с учетом (1.53) переходит в

$$A\dot\psi\sin^2\vartheta+C\omega_0\cos\vartheta=H_0. \tag{3.37}$$

Из (1.62) для интеграла энергии (3.34) следует

$$\tfrac{1}{2}(A\dot\psi^2\sin^2\vartheta+A\dot\vartheta^2+C\omega_0^2)+Gs\cos\vartheta=E_0, \tag{3.38}$$

где, согласно (3.36) и (1.49),

$$\omega_0=\dot\varphi+\dot\psi\cos\vartheta. \tag{3.39}$$

а) Аналитическое решение. С помощью указанных трех частных интегралов (3.37), (3.38) и (3.39) полное решение может быть сведено к трем эллиптическим интегралам. Для этого сперва исключим переменную $\dot\psi$, подставив найденное из (3.37) значение

$$\dot\psi=\frac{H_0-C\omega_0\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} \tag{3.40}$$

в уравнение (3.38). Решив последнее относительно $\dot\vartheta$ с учетом (3.39), получим

$$\dot\vartheta^2=\frac{1}{A}\left[2E_0-2Gs\cos\vartheta-C\omega_0^2-\frac{(H_0-C\omega_0\cos\vartheta)^2}{A\sin^2\vartheta}\right]=f(\vartheta). \tag{3.41}$$

Отсюда может быть определено

$$t=t_0+\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{f(\vartheta)}}=t(\vartheta), \tag{3.42}$$

а затем путем построения обратной функции и $\vartheta=\vartheta(t)$. Далее на основании (3.40) и (3.39) в результате повторного интегрирования могут быть найдены остальные два угла Эйлера:

$$\psi=\psi_0+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{H_0-C\omega_0\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\,dt, \tag{3.43}$$

$$\varphi=\varphi_0+\int\limits_{t_0}^{t}\left[\omega_0-\frac{(H_0-C\omega_0\cos\vartheta)\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\right]dt, \tag{3,44}$$

Полученные интегралы могут быть приведены к нормальным эллиптическим. Проделаем это подробнее только с интегралом (3.42), тем более что сама по себе функция $\vartheta = \vartheta(t)$ дает хорошее представление о возможных видах движения тяжелого гироскопа. Если ввести обозначение

$$u = \cos\vartheta = a_{33} \tag{3.45}$$

и соответственно $\dot{u} = -\sin\vartheta\,\dot{\vartheta}$, то из (3.41) следует

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{2E_0 - C\omega_0^2}{A} - \frac{2Gs}{A}u\right)(1 - u^2) - \left(\frac{H_0}{A} - \frac{C\omega_0}{A}u\right)^2 = U(u). \tag{3.46}$$

Гироскопическая функция $U(u)$ является полиномом третьей степени относительно u. Он может быть записан также в форме

$$U(u) = \frac{2Gs}{A}(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \tag{3.47}$$

где

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \text{ — корни уравнения } U(u) = 0.$$

Нетрудно оценить, как в принципе ведет себя гироскопическая функция. Положим $s > 0$. Это означает, что при $\vartheta = 0$ центр масс S расположен на вертикали над точкой опоры (*стоячий гироскоп*), а при $\vartheta = \pi$ — под ней (*висячий гироскоп*) [1]). При $s < 0$ картина будет обратной. Таким образом, перемену знака s можно учесть путем соответствующего изменения значения ϑ, так что предположение $s > 0$ не нарушает общности рассуждений. Ввиду $2Gs/A > 0$ мы на основании (3.46) заключаем, что U обладает следующими свойствами:

$$u \to -\infty\colon\ U \to -\infty,$$
$$u = \pm 1\colon\ U \leqslant 0,$$
$$u \to +\infty\colon\ U \to +\infty.$$

Так как $U(u)$ — непрерывная функция, то по крайней мере для одного из корней справедливо $u = u_3 \geqslant 1$. С другой стороны, в интервале $-1 \leqslant u \leqslant +1$ гироскопическая функция должна принимать положительные значения или по крайней мере обращаться в нуль, потому что иначе уравнение (3.46) не даст для $\dot{u}$ действительных решений. А это как раз необходимо для того, чтобы можно было описать аналитически движение гироскопа, которое, безусловно, физически существует. Возможное поведение функции $U(u)$ показано на рис. 3.17. Согласно (3.46), значение $U(u) = 0$ влечет $\dot{u} = 0$, а следовательно, и $\dot{\vartheta} = 0$. По отношению к ϑ это

[1]) В отечественной литературе приняты термины «гироскоп с верхним расположением центра тяжести» и «гироскоп с нижним расположением центра тяжести». Мы в основном будем придерживаться их, но иногда для краткости используем термины «стоячий гироскоп» и «висячий гироскоп». — *Прим. ред.*

соответствует точке возврата. Для движения, при котором угол ϑ является переменным, $\dot{u}^2 = U(u) > 0$. Но тогда вид гироскопической функции может быть только таким, как показано на рис. 3.17. Так как $U(u) > 0$, интересующий нас интервал изменения u определяется неравенством $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Ему соответствует область

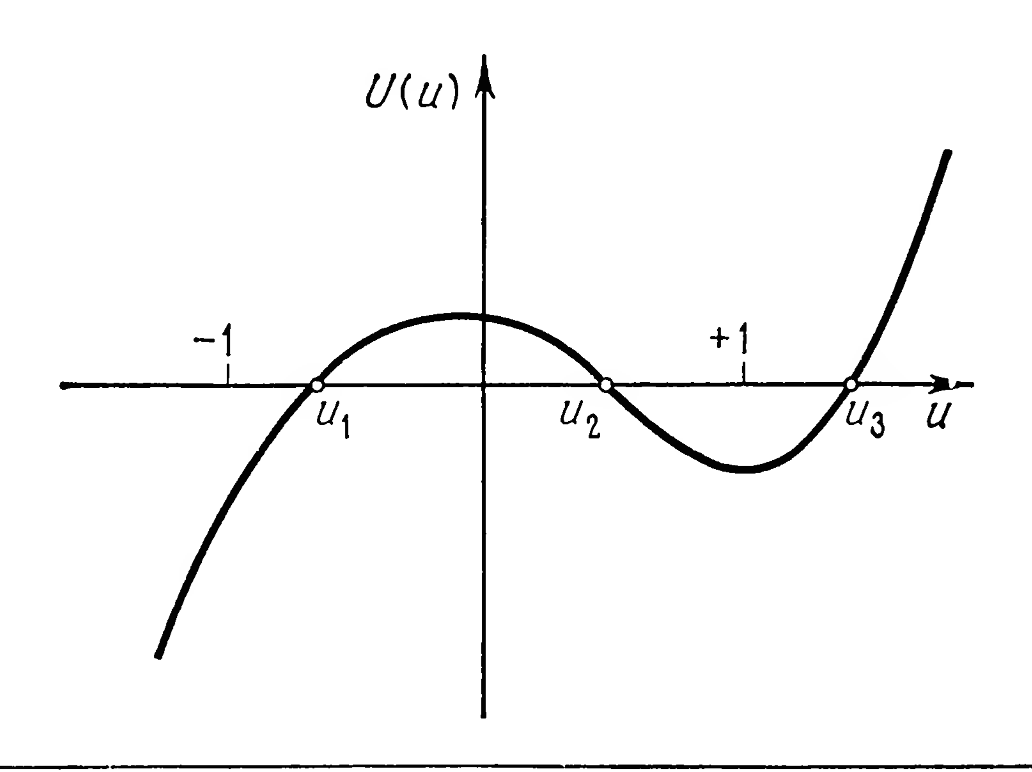


Рис. 3.17 Поведение гироскопической функции $U(u)$.

изменения угла $\vartheta_2 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_1$, в которой движение гироскопа вообще возможно.

Для интегрирования уравнения (3.46) введем новую переменную v согласно равенству

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) v^2. \tag{3.48}$$

Она выбрана так, чтобы для $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ покрывался интервал $0 \leqslant v^2 \leqslant 1$. Подставив (3.48) в (3.47), после необходимых преобразований получим дифференциальное уравнение

$$\dot{v}^2 = \frac{Gs(u_3 - u_1)}{2A}(1 - v^2)\left(1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} v^2\right). \tag{3.49}$$

Введя для сокращения записи обозначение k

$$0 \leqslant k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \leqslant 1,$$

мы можем привести (3.49) к нормальному эллиптическому интегралу первого рода

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2 v^2)}} = \sqrt{\frac{Gs(u_3 - u_1)}{2A}}(t - t_0) = \tau, \tag{3.50}$$

$$\tau = F(v, k).$$

Обратив этот интеграл, мы получим эллиптическую функцию Якоби, зависящую от параметра k: $v = \operatorname{sn} \tau = v(\tau, k)$. Тогда из (3.48) следует

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\operatorname{sn}^2 \tau. \tag{3.51}$$

Так как функция $\operatorname{sn}\tau$ имеет период 4K, где K — полный эллиптический интеграл первого рода, $\operatorname{sn}^2\tau$ имеет вдвое меньший период. Поэтому

$$\begin{aligned} u &= u_1 \quad \text{для} \quad \tau = 2nK, \\ u &= u_2 \quad \text{для} \quad \tau = (2n+1)K \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, угол наклона оси симметрии к вертикали периодически колеблется между граничными значениями ϑ_1 и ϑ_2. Время полного колебания

$$\Delta\tau = 2K(k) \quad \text{или} \quad \Delta t = T_S = \Delta\tau \sqrt{\frac{2A}{Gs(u_3 - u_1)}},$$

т. е.

$$T_S = K(k) \sqrt{\frac{8A}{Gs(u_3 - u_1)}}. \tag{3.52}$$

Из (3.40) и (3.39) видно, что $\dot\psi$ и $\dot\varphi$ имеют тот же период, что и ϑ. Таким образом, всякий раз по истечении времени T_S движение гироскопа повторяется. Траектория, описываемая при этом какой-либо точкой, лежащей на оси симметрии, составляется из отдельных участков, которые либо конгруэнтны, либо являются зеркальным отображением друг друга (вследствие зеркальной симметрии функции sn). Это станет еще более ясным ниже при исследовании различных видов движения.

b) *Анализ полученных результатов.* Рассмотрим теперь подробнее некоторые типичные виды движения. Прежде всего отметим, что гироскоп при вертикальном положении оси симметрии (оси фигуры) сохраняет равновесие как при $\vartheta = 0$ (стоячий гироскоп), так и при $\vartheta = \pi$ (висячий гироскоп). Ввиду

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0, \quad u = 1, \quad H_0 = C\omega_0, \\ \vartheta &= \pi, \quad u = -1, \quad H_0 = -C\omega_0, \end{aligned}$$

в обоих случаях, согласно (3.46), гироскопическая функция $U(u) = 0$, так что $\dot u = 0$, а значит, и $\dot\vartheta = 0$. Устойчивость этих положений равновесия мы исследуем ниже.

Далее предположим, что гироскоп, вращающийся вокруг своей оси фигуры с угловой скоростью ω_0 и отклоненный на угол ϑ_0, предоставляется в этом положении самому себе. Исследуем возникающее затем движение оси фигуры для различных значений ω_0. Выражая постоянные H_0 и E_0 через ω_0 и $u_0 = \cos\vartheta_0$:

$$H_0 = C\omega_0 u_0, \quad E_0 = {}^1\!/_2 C\omega_0^2 + Gsu_0,$$

преобразуем гироскопическую функцию (3.46) к виду

$$U(u)=\frac{2Gs}{A}(u_0-u)\left[1-u^2-\frac{C^2\omega_0^2}{2GsA}(u_0-u)\right]. \qquad (3.53)$$

Ее нули определяются постоянной u_0 и безразмерным параметром

$$a=\frac{C^2\omega_0^2}{4GsA}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 &= a-\sqrt{a^2-2au_0+1}, \\ u_2 &= u_0, \\ u_3 &= a+\sqrt{a^2-2au_0+1}. \end{aligned} \qquad (3.54)$$

Интересующий нас интервал для $U(u)>0$ соответствует условию $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. В предельном случае невращающегося гироскопа

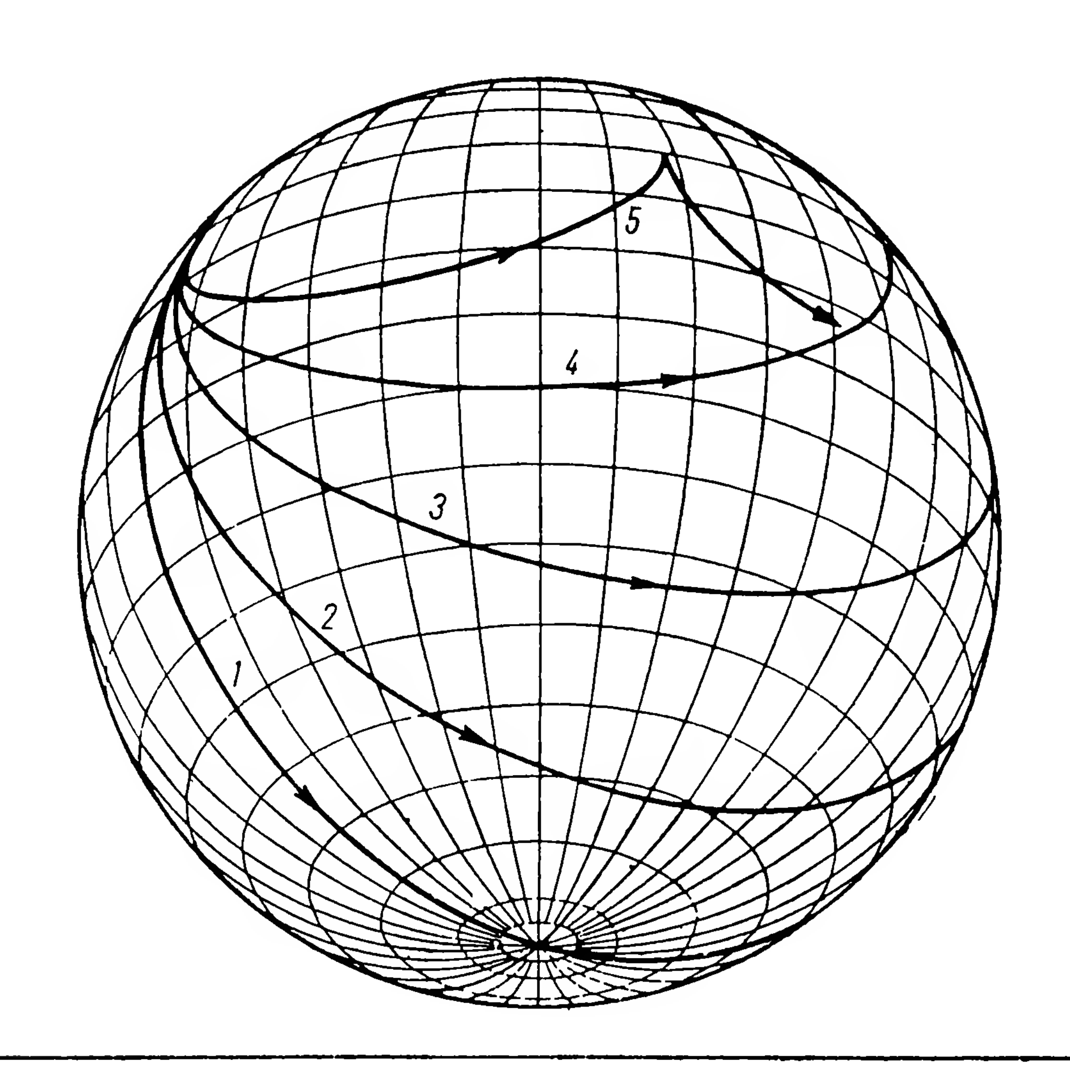


Рис. 3.18. Траектории некоторой точки оси фигуры тяжелого гироскопа, предоставленного самому себе (без толчка), для различных значений собственного кинетического момента.

($\omega_0=0$) $a=0$, т. е. $u_1=-1$, $u_2=u_0$. Гироскоп колеблется, как плоский маятник, причем ось фигуры, двигаясь из начального положения ϑ_0, проходит крайнее нижнее положение $\vartheta=\pi$ и затем достигает противоположного крайнего положения ϑ_0. На рис. 3.18 изображены траектории точки оси фигуры для различных значений a. Кривая *1* соответствует $a=0$, кривые *2*—*5* — возрастающим значениям a, т. е. нарастающей угловой скорости собственного вращения. Если $\omega_0 \neq 0$, т. е. $a>0$, то ось фигуры никогда не

достигает нижнего полюса, поскольку постоянно $u_1 > -1$. Область перемещения гироскопа, ограниченная параллелями $u_1 = \cos\vartheta_1$ и $u_2 = u_0 = \cos\vartheta_0$, становится тем уже, чем больше ω_0. При $\omega_0 \to \infty$ мы имеем $u_1 \to u_0$ или $\cos\vartheta_1 \to \cos\vartheta_0$ и траектория вершины гироскопа заключена в узкой широтной полосе, определяемой близкими друг к другу граничными значениями ϑ_0 и ϑ_1.

Все изображенные на рис. 3.18 кривые имеют то общее, что их точки возврата лежат на верхней граничной окружности ($\vartheta = \vartheta_0$), а касательные к ним в этих точках направлены вдоль меридиана. В этом можно убедиться, рассматривая полученное на основании (3.40) и (3.51) выражение

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{\dot\psi}{\dot u} = \frac{C\omega_0 \operatorname{cn}\tau}{2A\dot\tau(1-u^2)\operatorname{sn}\tau\operatorname{dn}\tau} \tag{3.55}$$

при принятых нами начальных условиях. Траектория достигает верхней граничной окружности в момент $\tau_0 = (2n+1)K$. Так как $\operatorname{cn}\tau_0 = 0$, а знаменатель (3.55) для этого значения τ в нуль не обращается, то $(d\psi/du)_0 = 0$.

В то же время из (3.55) видно, что траектории касаются нижней граничной окружности, т. е. не имеют на ней точек возврата. Действительно, так как $\operatorname{sn}2nK = 0$ и $|\operatorname{cn}2nK| = 1$, имеем $(d\psi/du)_1 \to \infty$.

Подобным образом можно исследовать и другие виды движения тяжелого гироскопа. На рис. 3.19 изображены траектории (в детали их расчета мы входить не будем), относящиеся к тому случаю, когда гироскоп начинает двигаться из исходного положения $\vartheta = \vartheta_0$ с азимутальной начальной угловой скоростью $\dot\psi_0 \neq 0$. Угловая скорость вращения вокруг оси фигуры (ω_0) принята постоянной, а начальной угловой скорости $\dot\psi_0$ придаются различные значения. В следующей таблице указаны шесть различных типов траекторий, которые соответствуют определенным интервалам изменения $\dot\psi_0$.

Тип	Интервал изменения $\dot\psi_0$	Траектория
1	$\dot\psi_0 = 0$	С точками возврата, ниже $\vartheta = \vartheta_0$
2	$0 < \dot\psi_0 < \dot\psi_{03}$	Волнистая, ниже $\vartheta = \vartheta_0$
3	$\dot\psi_0 = \dot\psi_{03}$	Совпадает с параллелью $\vartheta = \vartheta_0$
4	$\dot\psi_{03} < \dot\psi_0 < \dot\psi_{05}$	Волнистая, выше $\vartheta = \vartheta_0$
5	$\dot\psi_0 = \dot\psi_{05}$	С точками возврата, выше $\vartheta = \vartheta_0$
6	$\dot\psi_{05} < \dot\psi_0$	Петлеобразная, выше $\vartheta = \vartheta_0$

В этом случае при определенных условиях траектории могут: достигать верхнего полюса, проходить через него или

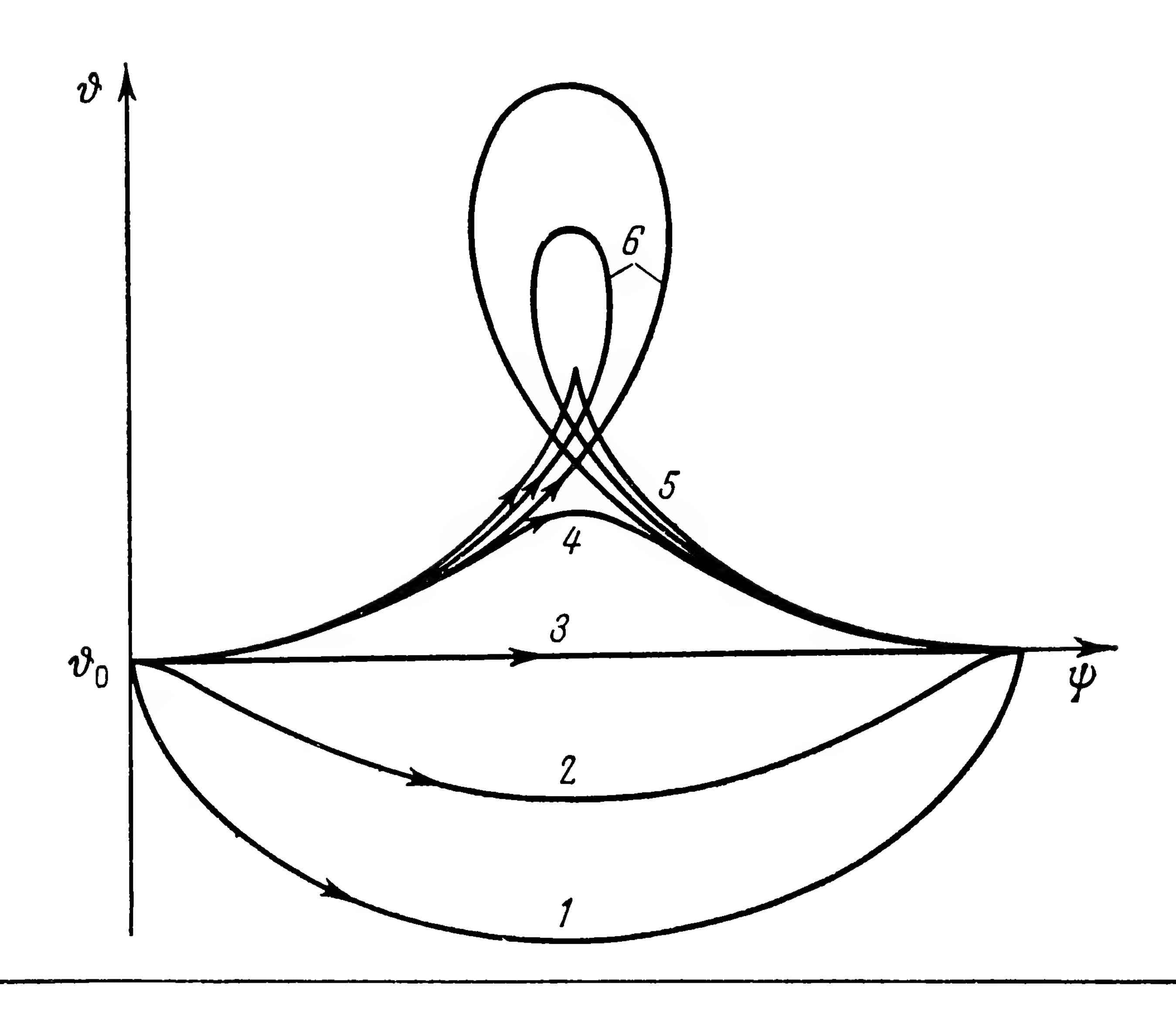


Рис. 3.19. Траектории некоторой точки оси фигуры тяжелого гироскопа при постоянном собственном кинетическом моменте и различных значениях горизонтальной начальной скорости.

окружать его. Все представленные на рис. 3.18 и 3.19 траектории могут быть периодически продолжены, так что они будут опоясывать поверхность сферы. В общем случае эти кривые не замыкаются.

На рис. 3.20 и 3.21 показаны некоторые найденные экспериментально траектории для тяжелого гироскопа. Они были получены путем фотографирования траекторий определенной точки оси

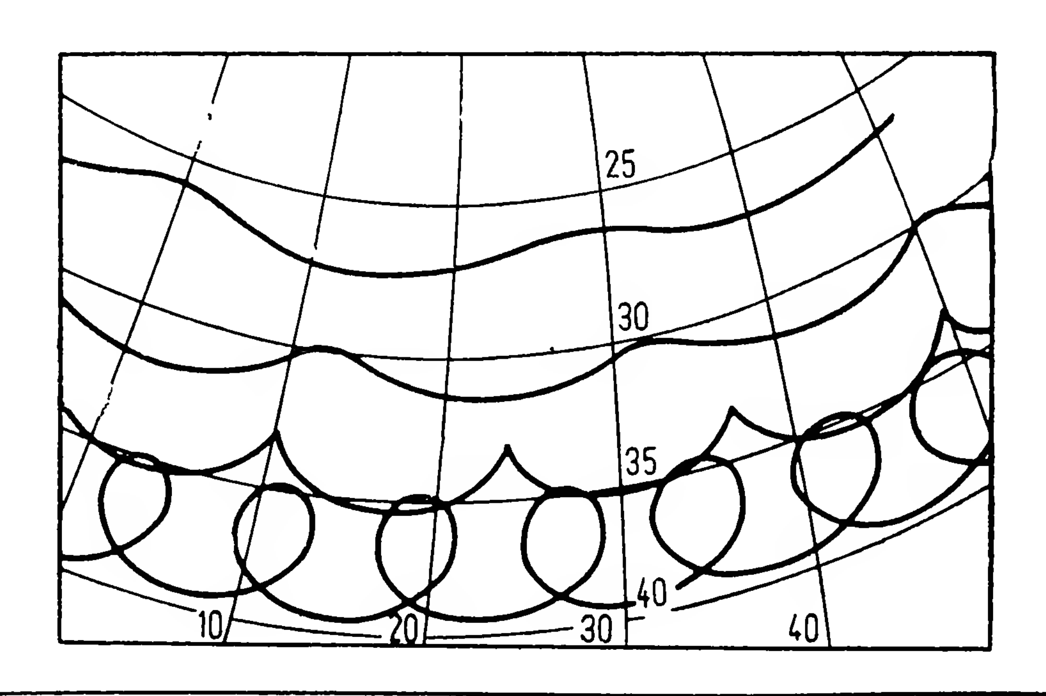


Рис. 3.20. Экспериментально найденные траектории некоторой точки оси фигуры тяжелого симметричного гироскопа (по Гебелейну).

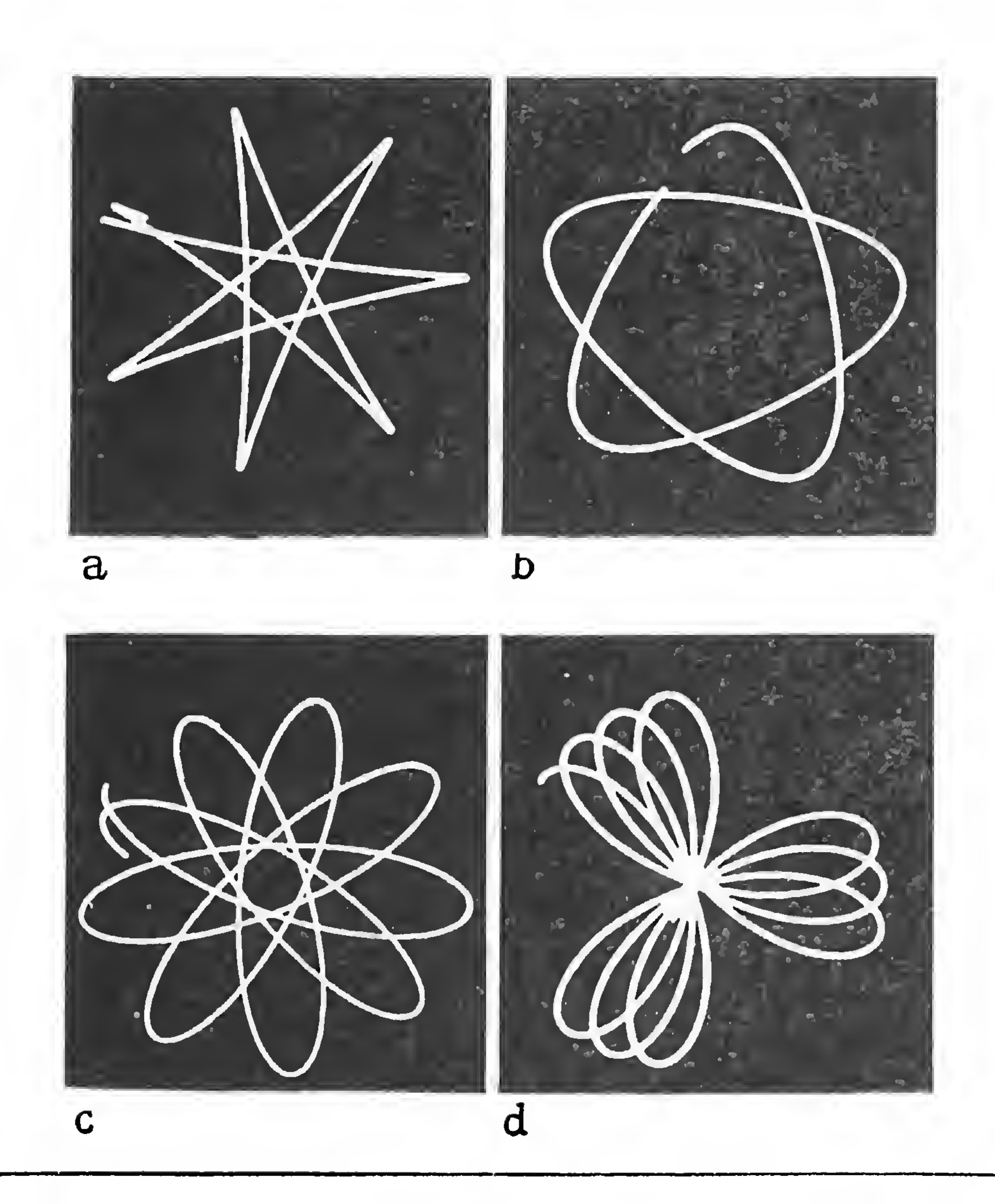


Рис. 3.21. Экспериментально найденные траектории некоторой точки оси фигуры тяжелого симметричного гироскопа (по Лойбе).

фигуры. На рис. 3.20, которым мы обязаны Гебелейну [19], видны сфотографированные заодно меридианы и параллели сферы, по поверхности которой пролегают траектории. Хорошо видны различные типы траекторий: волнистые, петлеобразные и с точками возврата. Кривыми на рис. 3.21 мы обязаны Лойбе; они сняты вертикально расположенным аппаратом сверху вниз. Точка симметрии этих снимков соответствует верхнему полюсу. Кривая a иллюстрирует движение гироскопа с нижним расположением центра тяжести. Точки возврата в этом случае лежат снаружи, так как фотографировалась точка верхней части оси фигуры. Кривые b, c и d дают представление о движении гироскопа с верхним расположением центра тяжести для различных начальных условий.

c) *Регулярная и псевдорегулярная процессия.* Рассматривая возможные виды движения тяжелого гироскопа, мы установили, что одним из них является движение оси фигуры по параллели, т. е. при $\vartheta = \vartheta_0$ (например, кривая *3* на рис. 3.19). Рассмотрим теперь подробнее, при каких обстоятельствах это возможно. С этой целью можно было бы, пользуясь выражением (3.46) гироскопической функции $U(u)$, найти условия существования кратных корней ($u_1 = u_2$). Однако в данном случае проще обратиться к уравнениям движения (3.35) и исключить из них с помощью кинематических уравнений (1.49) переменные ω_1 и ω_2. Подставив в

уравнения (3.35) и (1.49) $\omega_3 = \omega_0$ и $\vartheta = \vartheta_0$ $(\dot{\vartheta} = 0)$, получим

$$A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_0\omega_2 = Gs\sin\vartheta_0\cos\varphi,$$
$$A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_0\omega_1 = -Gs\sin\vartheta_0\sin\varphi,$$
$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\vartheta_0\sin\varphi,$$
$$\omega_2 = \dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\varphi.$$

Исключив далее из этих уравнений ω_1 и ω_2, найдем

$$\begin{aligned} &A(\ddot{\psi}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\varphi) - (A - C)\,\omega_0\dot{\psi}\cos\varphi = Gs\cos\varphi, \\ &A(\ddot{\psi}\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi) + (A - C)\,\omega_0\dot{\psi}\sin\varphi = -Gs\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Умножив первое уравнение (3.56) на $\sin\varphi$, а второе на $\cos\varphi$ и сложив их, получим

$$A\ddot{\psi} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}. \tag{3.57}$$

Отсюда на основании (3.39) следует

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \dot{\psi}_0\cos\vartheta_0 = \dot{\varphi}_0 = \text{const}. \tag{3.58}$$

Таким образом, если мы потребуем $\vartheta = \vartheta_0$, то отсюда вытекает постоянство угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$. Такого рода движение называется *регулярной прецессией.*

Подстановка $\ddot{\psi} = 0$ в (3.56/2) дает равенство

$$A\dot{\psi}\dot{\varphi} - (A - C)\,\omega_0\dot{\psi} = Gs,$$

которое после подстановки в него (3.58) приводит к квадратному уравнению относительно $\dot{\psi}$

$$A\cos\vartheta_0\,\dot{\psi}^2 - C\omega_0\dot{\psi} + Gs = 0, \tag{3.59}$$

имеющему корни

$$\left.\begin{matrix}\dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2\end{matrix}\right\} = \frac{C\omega_0}{2A\cos\vartheta_0}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4GsA\cos\vartheta_0}{C^2\omega_0^2}}\right]. \tag{3.60}$$

На рис. 3.22 представлены кривые изменения этих корней в зависимости от ω_0 для различных углов наклона ϑ_0. Здесь нужно различать следующие случаи.

1. $0 \leqslant \vartheta_0 < \pi/2$, $\cos\vartheta_0 > 0$, стоячий гироскоп:

при $\omega_0^2 < \dfrac{4GsA\cos\vartheta_0}{C^2} = \omega_0^{*2}$ — действительных корней нет,

при $\omega_0^2 = \omega_0^{*2}$ — два равных корня $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$,

при $\omega_0^2 > \omega_0^{*2}$ — два действительных корня того же знака, что и ω_0.

2. $\vartheta_0 = \pi/2$, $\cos\vartheta_0 = 0$, ось фигуры горизонтальна: уравнение (3.59) имеет действительный корень

$$\dot{\psi}_2 = \frac{Gs}{C\omega_0}. \tag{3.61}$$

3. $\pi/2 < \vartheta \leqslant \pi$, $\cos\vartheta_0 < 0$, висячий гироскоп: два действительных корня противоположных знаков.

При выбранных нами обозначениях всегда $|\dot{\psi}_1| \geqslant |\dot{\psi}_2|$. Поэтому движение с угловой скоростью $\dot{\psi}_1$ иногда называют *быстрой*

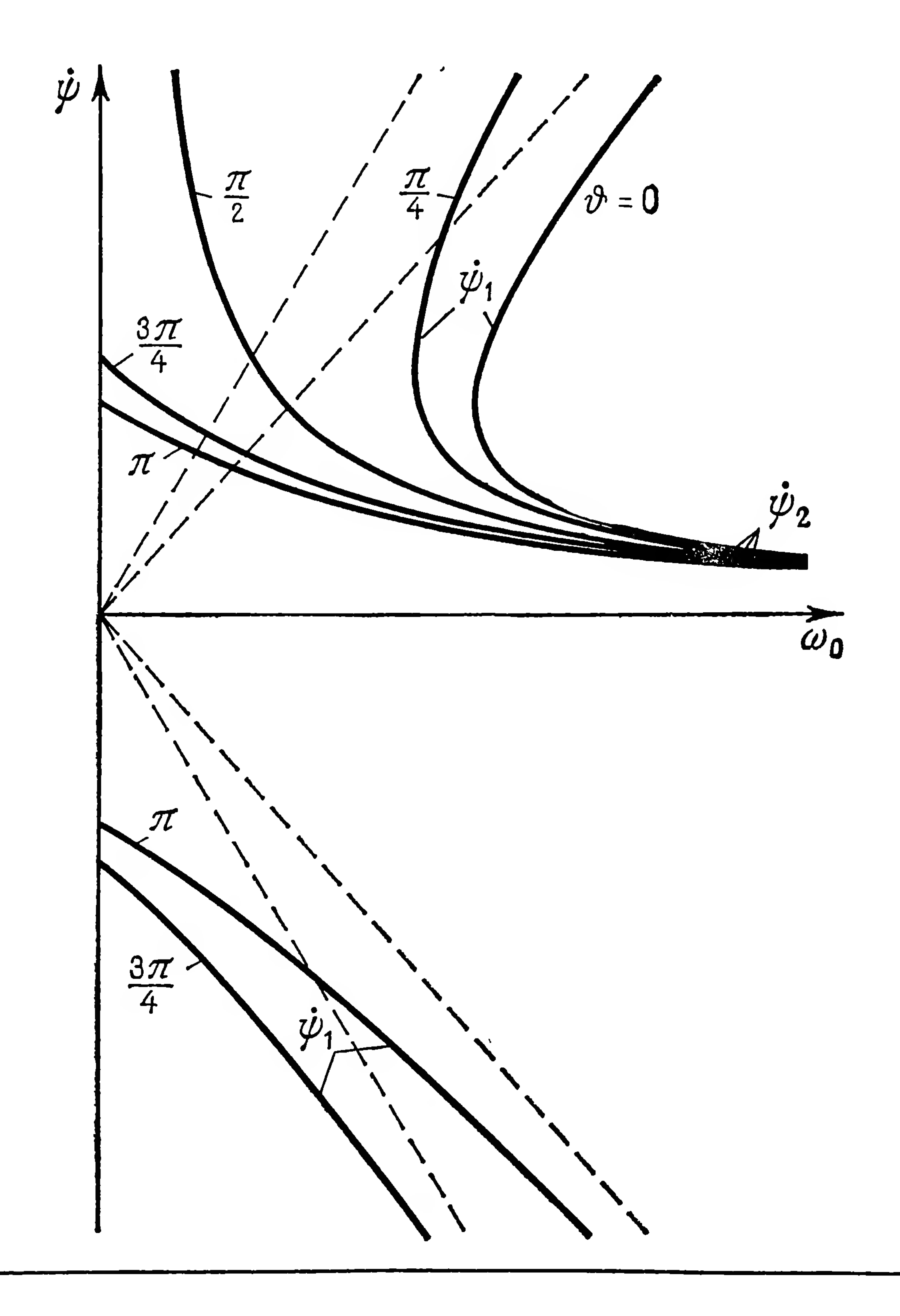


Рис. 3.22. Угловая скорость $\dot{\psi}$ регулярной прецессии тяжелого симметричного гироскопа.

прецессией, а движение с угловой скоростью $\dot{\psi}_2$ — *медленной прецессией*. Однако мы не будем пользоваться этими названиями, так как быстрая прецессия представляет собой именно то движение, которое для свободного гироскопа мы назвали нутацией. В самом

деле, при $s = 0$ корнем уравнения (3.59) будет

$$\dot{\psi}_1 = \frac{C\omega_0}{A\cos\vartheta_0}, \quad \dot{\psi}_2 = 0. \tag{3.62}$$

Полученное для $\dot{\psi}_1$ выражение полностью совпадает с формулой (2.40) для угловой скорости нутации.

Особый интерес представляет предельный случай — быстровращающийся гироскоп. Полагая $\omega_0 \gg \overset{*}{\omega}_0$, получаем, согласно (3.60), следующие приближенные выражения:

$$\dot{\psi}_1 \approx \frac{C\omega_0}{A\cos\vartheta_0}, \quad \dot{\psi}_2 \approx \frac{Gs}{C\omega_0}. \tag{3.63}$$

Первое из них совпадает с формулой (3.62) для угловой скорости нутации, а второе — с формулой (3.61) для угловой скорости прецессии. Таким образом, можно принять, что угловая скорость нутации быстровращающегося гироскопа пропорциональна ω_0, а угловая скорость прецессии пропорциональна $1/\omega_0$. С возрастанием ω_0 растет и $\dot{\psi}_1$, тогда как $\dot{\psi}_2$ убывает.

Рассматривая различные виды движения тяжелого гироскопа для некоторого начального угла отклонения ϑ_0 при отсутствии начального толчка (рис. 3.18), мы установили, что граничные параллели, между которыми заключена траектория, прилегают друг к другу тем теснее, чем больше угловая скорость собственного вращения гироскопа. У очень быстро вращающегося гироскопа практически наблюдается только движение по параллели, на которое накладывается мелкое дрожание (нутация) оси гироскопа. Если отвлечься от этих нутационных колебаний, то движение ничем не будет отличаться от рассмотренной выше регулярной прецессии. Поэтому такое движение назвали *псевдорегулярной прецессией*. Однако существенная разница между ними заключается в том, что регулярная прецессия возникает только при определенных начальных значениях ϑ_0 и $\dot{\psi}_0$, тогда как в случае псевдорегулярной прецессии начальные значения могут быть произвольными. У достаточно быстро вращающегося гироскопа амплитуда неизбежных при этом нутаций остается малой.

Теперь покажем, что частота упомянутых движений оси в точности совпадает с частотой нутации малой амплитуды свободного гироскопа. Формула (3.52) позволяет вычислить период T_S колебаний гироскопа по углу ϑ. Если гироскоп вращается быстро, то для модуля эллиптических функций мы можем написать

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \ll 1,$$

и полный элиптический интеграл $K(k) \approx \pi/2$. Далее, при $a \to \infty$ из (3.54) находим

$$u_1 \ll u_3 \approx 2a = \frac{C^2\omega_0^2}{2GsA}.$$

Подставив эти значения в (3.52), получим

$$T_S \approx 2\pi \frac{A}{C\omega_0}. \tag{3.64}$$

Но частота $\omega^N = C\omega_0/A$ как раз и есть частота нутаций (2.42) в предположении малой амплитуды.

Приближенное значение азимутальной скорости оси фигуры в случае псевдорегулярной прецессии можно получить, если подставить в (3.40) начальное значение $H_0 = C_0 u_0$:

$$\dot{\psi} = \frac{C\omega_0 (u_0 - u)}{A \sin^2 \vartheta}. \tag{3.65}$$

Сообразуясь с (3.54) и (3.51), а также учитывая, что $k^2 \ll 1$, мы получаем для быстровращающегося гироскопа при $\omega_0 \to \infty$, т. е. при $a \to \infty$, следующие приближенные формулы:

$$u_1 \approx u_0 - \frac{1 - u_0^2}{2a},$$

$$u_0 - u \approx \frac{1 - u_0^2}{2a} \cos^2 \tau.$$

Подставив этот результат, а также выражение для a в (3.65), найдем

$$\dot{\psi} \approx \frac{2Gs}{C\omega_0} \cos^2 \tau,$$

откуда средняя азимутальная угловая скорость

$$\bar{\dot{\psi}} \approx \frac{Gs}{C\omega_0}. \tag{3.66}$$

Это в точности совпадает с полученным выше выражением (3.63) угловой скорости $\dot{\psi}_2$ регулярной прецессии быстровращающегося гироскопа.

Полученный результат дает нам основание трактовать псевдорегулярную прецессию как наложение регулярной прецессии и нутации.

d) *Устойчивость тяжелого гироскопа с вертикальной осью фигуры.* В п. *b*) мы видели, что ось фигуры тяжелого гироскопа может застыть в вертикальном положении при любой угловой скорости собственного вращения. Но это положение не во всех случаях устойчиво. Для доказательства этого утверждения в данном случае проще всего обратиться к исследованию гироскопической функции $U(u)$, определяемой формулой (3.46).

Для *гироскопа с верхним расположением центра тяжести* при вертикальной оси фигуры имеем

$$H_0 = C\omega_0 \quad \text{и} \quad E_0 = {}^1/_2 C\omega_0^2 + Gs.$$

Подставив эти значения в (3.46), получим

$$U(u)=\frac{2Gs}{A}(1-u)^2(1+u-2a), \tag{3.67}$$

где по-прежнему

$$a=\frac{C^2\omega_0^2}{4GsA}. \tag{3.68}$$

Приравнивая выражение (3.67) нулю, найдем два равных корня $u=1$, а в случае $a=1$ их будет даже три. На рис. 3.23 сплошной

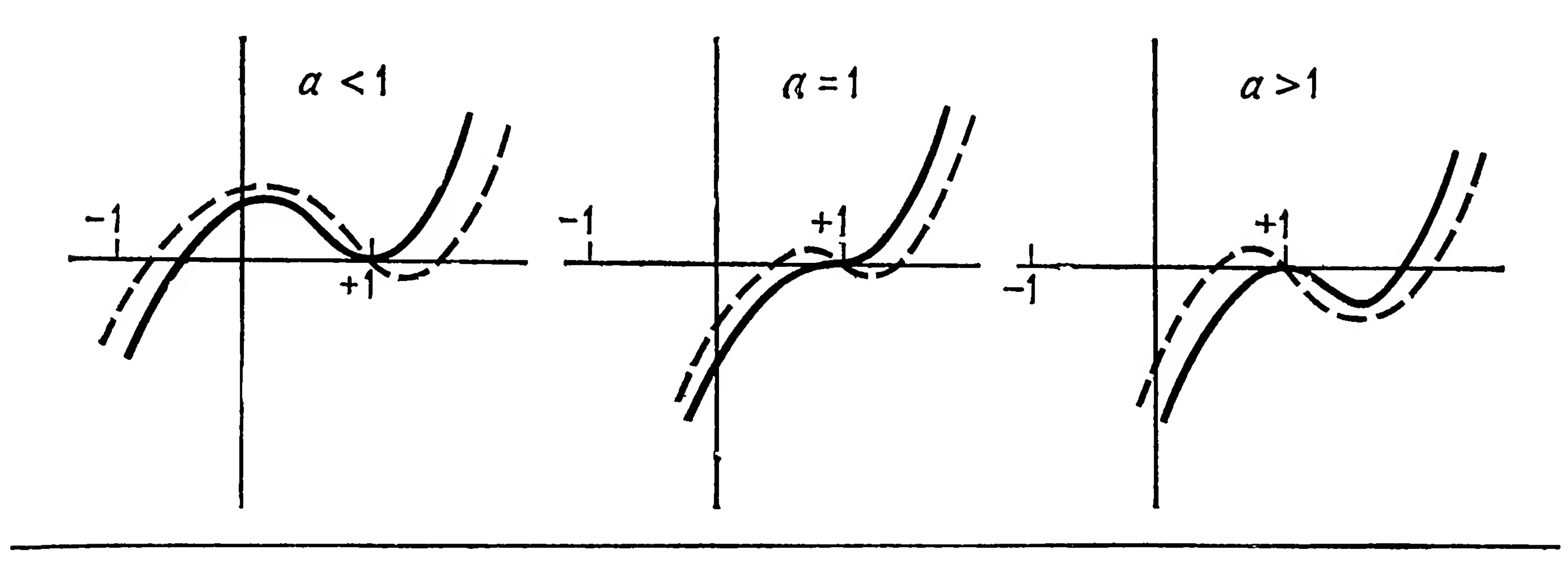


Рис. 3.23. Поведение гироскопической функции $U(u)$ гироскопа с верхним расположением центра тяжести при различных значениях собственного кинетического момента

линией представлены графики функции $U(u)$ для различных a. Функция U в интересующем нас интервале $-1\leqslant u\leqslant +1$ принимает положительные значения лишь для $a<1$. Поэтому при малых отклонениях оси фигуры от вертикали может оказаться $\dot{u}>0$. Это означает, что и $\dot{\vartheta}$ может оказаться положительной, и ось фигуры будет все дальше отклоняться от вертикали. Следовательно, этот случай мы должны расценить как неустойчивый. Более полную картину устойчивости дает исследование изменения корней для возмущенного движения. Предположим, что по гироскопу нанесен слабый удар поперек вертикальной оси фигуры. При этом константы ω_0 и H_0 не изменятся, но постоянная энергии E_0 получит некоторое малое приращение ε:

$$E_0^*=E_0+\varepsilon={}^1/_2C\omega_0^2+Gs+\varepsilon.$$

При этом гироскопическая функция (3.46) примет вид

$$U(u)=\frac{2Gs}{A}(1-u)\left[(1-u)(1+u-2a)+\frac{\varepsilon}{Gs}(1+u)\right].$$

Если считать ε малым и сохранить в разложении только члены с наиболее низкими степенями ε, то можно написать следующие приближенные значения корней уравнения $U(u)=0$:

	$a<1$	$a=1$	$a>1$
u_1	$2a-1-\dfrac{\varepsilon a}{Gs(1-a)}$	$1-\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{Gs}}$	$1-\dfrac{\varepsilon}{Gs(a-1)}$
u_2	1	1	1
u_3	$1+\dfrac{\varepsilon}{Gs(1-a)}$	$1+\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{Gs}}$	$2a-1+\dfrac{\varepsilon a}{Gs(a-1)}$

(3.69)

Теперь графики гироскопической функции имеют вид штриховых кривых на рис. 3.23, которые позволяют оценить характер возмущенного движения.

В случае $a<1$ данная точка оси фигуры совершает периодические колебания между верхним полюсом $(u_1=u_2=+1)$ и некоторой нижней границей $(u=u_1<1)$. При этом возмущенное движение расходится с исходным (невозмущенным), поскольку разность u_2-u_1 сохраняет конечное значение и в случае $\varepsilon\to 0$. Следовательно, невозможно найти такую область $\delta(\varepsilon)$, которая сокращалась бы с уменьшением ε и внутри которой были бы заключены значения u (или ϑ). Поэтому рассматриваемое движение неустойчиво в смысле Ляпунова (§ 2.4). *В случаях когда* $a=1$ *и* $a>1$, область, в которой протекает движение, при $\varepsilon\to 0$ стягивается к верхнему полюсу $(u_1\to +1)$. Таким образом, оба этих случая должны быть признаны устойчивыми в смысле Ляпунова. В рассматриваемом движении ось фигуры вальсирует вокруг верхнего полюса, оставаясь при этом вблизи него, что иллюстрирует, например, рис. 3.21, d.

В результате мы можем констатировать следующее:

Тяжелый гироскоп по Лагранжу с верхним расположением центра тяжести устойчив только при соблюдении условия

$$C^2\omega_0^2\geqslant 4GsA. \tag{3.70}$$

Чтобы превратить статически неустойчивую систему в устойчивую, требуется, следовательно, сообщить ей некоторую минимальную угловую скорость.

Таким образом, (3.70) является необходимым и достаточным условием устойчивости движения оси фигуры.

Возможное в случае $a<1$ (см. (3.69)) движение в границах $u_1=2a-1$ и $u_2=1$ является не периодическим, а асимптотическим. Об этом свидетельствует то, что в силу $u_3\approx 1$

$$k^2=\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}\approx +1,$$

поэтому $K(k)\to\infty$, и, согласно (3.52), T_s неограниченно возрастает.

Характер движения проще всего выяснить посредством интегрирования (3.50). Полагая в последней формуле $k^2=1$, находим

$$\tau=\int\frac{dv}{1-v^2}=\operatorname{Ar\,th} v$$

и вместо (3.51)

$$u=u_1+(1-u_1)\operatorname{th}^2\tau. \tag{3.71}$$

График этой функции представлен на рис. 3.24. Движение начинается из низшей точки $u=u_1$, и при $\tau\to\infty$ движущаяся точка асимптотически приближается к верхнему полюсу ($u=+1$). Она описывает при этом спираль, как показано на рис. 3.25. Описанное движение можно рассматривать как обобщение известного асимптотического движения маятника. При соответствующих начальных условиях физический маятник тоже может достигнуть верхней мертвой точки лишь по истечении бесконечно большого промежутка времени. Однако, в то время как движение маятника является плоским, движение оси фигуры тяжелого гироскопа происходит в пространстве. Полученные формулы охватывают как частный случай и движение маятника (для $a=0$, т. е. для $\omega_0=0$).

В заключение остается только исследовать *гироскоп с нижним расположением центра тяжести*. Предполагая малое возмущение, вызванное боковым ударом, мы в данном случае имеем

$$H_0=-C\omega_0 \quad \text{и} \quad E_0^*=E_0+\varepsilon={}^1\!/_2 C\omega_0^2-Gs+\varepsilon.$$

Гироскопическая функция принимает вид

$$U(u)=\frac{2Gs}{A}(1+u)\left[u^2-u\left(2a+\frac{\varepsilon}{Gs}\right)-\left(1+2a-\frac{\varepsilon}{Gs}\right)\right];$$

ее нули суть

$$\begin{aligned} u_1&=-1,\\ u_2&\approx-1+\frac{\varepsilon}{Gs(1+a)},\\ u_3&\approx 1+2a+\frac{\varepsilon a}{Gs(1+a)}.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Общее поведение функции $U(u)$ представлено на рис. 3.26 как для возмущенного ($\varepsilon\neq 0$, штриховая линия), так и для невозмущенного ($\varepsilon=0$, сплошная линия) движения. Формулы (3.72) показывают, что в результате слабого возмущения ось фигуры лишь немного отклоняется от нижнего полюса независимо от значения a; само отклонение пропорционально ε. Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Тяжелый гироскоп по Лагранжу с нижним расположением центра тяжести всегда устойчив независимо от скорости его собственного вращения.

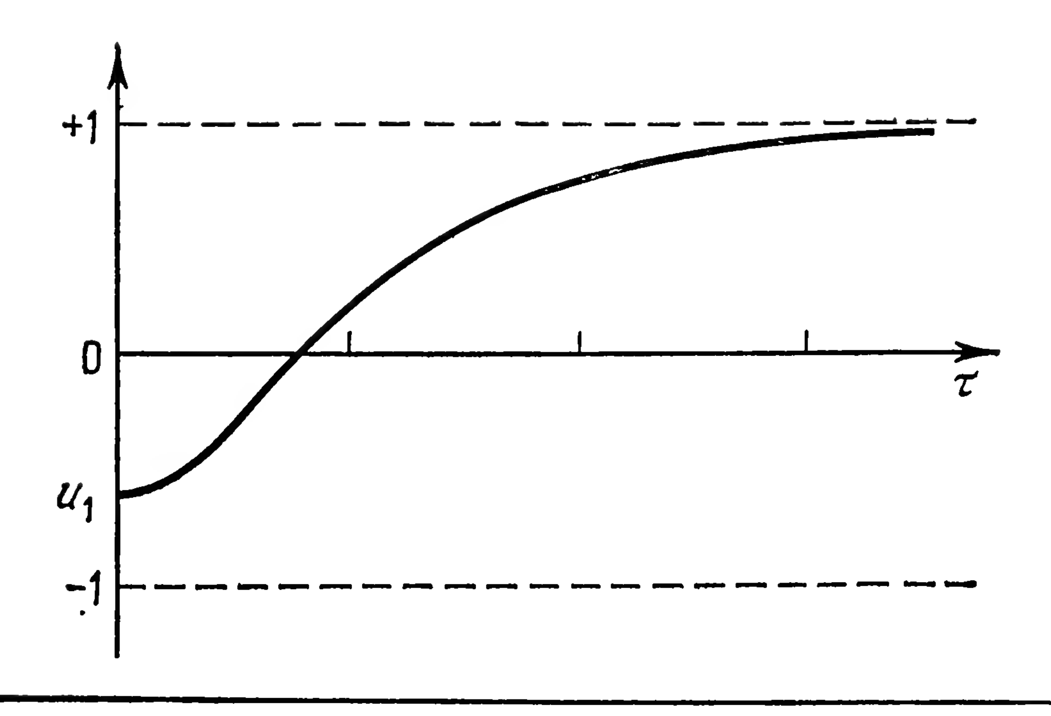


Рис. 3.24. Интегральная кривая $u(\tau)$ в предельном случае асимптотического движения.

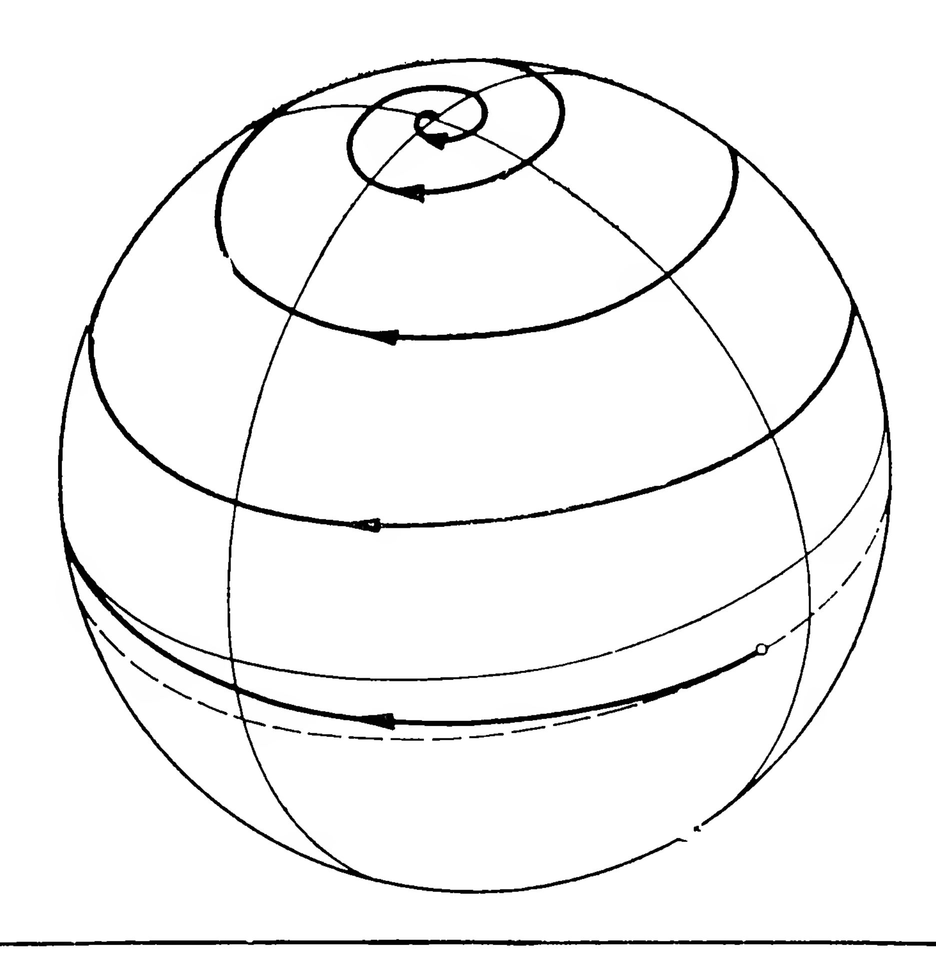


Рис. 3.25. Траектория некоторой точки оси фигуры в предельном случае асимптотического движения.

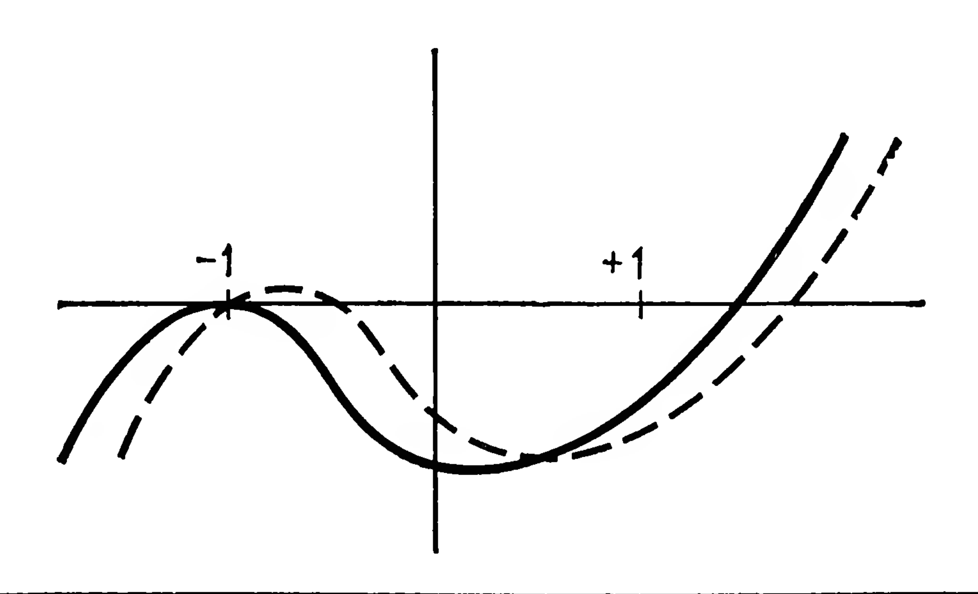


Рис. 3.26. Вид гироскопической функции тяжелого гироскопа с нижним расположением центра тяжести.

3.3.3. Тяжелый гироскоп по Ковалевской. Случай, фигурирующий в таблице п. 3.3.1 под рубрикой 3, был открыт и обстоятельно исследован Ковалевской. Правда, на первый план здесь выдвигались, скорее, математические аспекты, чем физическая интерпретация движения гироскопа.

Ковалевская положила $A = B = 2C$ и $s_1 = s \neq 0$, $s_2 = s_3 = 0$. Эллипсоид инерции гироскопа для точки опоры F остается симметричным, но центр масс расположен не на оси симметрии (ось фигуры), а в перпендикулярной к ней плоскости. Это, конечно, возможно только для тел с неоднородным распределением масс. Не нарушая общности результатов, мы можем за ось $1'$, связанную с телом, принять прямую, соединяющую точки F и S, так что $s_2 = 0$. Таким образом, гироскоп Ковалевской — это специальный симметричный вытянутый гироскоп с неравномерным распределением масс.

Уравнения движения (3.29) переходят здесь в следующие:

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 &= 0, \\ 2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3 &= ca_{33}, \\ \dot{\omega}_3 \qquad\quad &= -ca_{32}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

где

$$c = \frac{2Gs}{A}. \tag{3.74}$$

Присоединяя к ним систему (3.31), мы получаем достаточное число уравнений для определения переменных. Они допускают точное решение в смысле теории интегрирования Якоби, если, кроме интеграла кинетического момента (3.33) и интеграла энергии (3.34), будет найден еще дополнительный частный интеграл. Его можно построить следующим образом.

Выразим переменные попарно в виде комплексных функций:

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\omega_2 &= x, \\ a_{31} + ia_{32} &= y. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Умножив второе уравнение (3.73) на i и сложив его с первым, получим

$$2\dot{x} + i\omega_3 x = ica_{33}. \tag{3.76}$$

Поступая аналогично с первыми двумя уравнениями (3.31), находим

$$\dot{y} + i\omega_3 y = ia_{33}x. \tag{3.77}$$

Исключая a_{33} из уравнений (3.76) и (3.77), приходим к уравнению

$$2\dot{x}x + i\omega_3 x^2 - c\dot{y} - ic\omega_3 y = 0,$$

или после преобразований

$$\frac{d}{dt}(x^2 - cy) + i\omega_3(x^2 - cy) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\ln(x^2 - cy) = -i\omega_3. \tag{3.78}$$

В целях обратного перехода к действительным величинам повторим тот же прием по отношению к сопряженным функциям $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\ln(\bar{x}^2 - c\bar{y}) = i\omega_3. \tag{3.79}$$

Сложив оба уравнения, получим новое уравнение

$$\frac{d}{dt}\ln[(x^2 - cy)(\bar{x}^2 - c\bar{y})] = 0,$$

из которого вытекает постоянство во времени выражения, заключенного в квадратные скобки. Возвращаясь в нем к исходным переменным, приходим к искомому частному интегралу

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2 - ca_{31})^2 + (2\omega_1\omega_2 - ca_{32})^2 = \text{const}. \tag{3.80}$$

Мы не будем далее заниматься интегрированием уравнений движения с использованием трех частных интегралов (3.33), (3.34) и (3.80) (см., например, Лейманис [7]). Заметим только, что интегрирование уравнений движения гироскопа Ковалевской требует значительно более сложных математических средств, чем в случае гироскопа Лагранжа. Решение задачи приводит к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{ds}{\sqrt{P(s)}} \quad \text{и} \quad \int \frac{s\,ds}{\sqrt{P(s)}}, \tag{3.81}$$

в которых s — выбранная надлежащим образом переменная интегрирования. Функцию $P(s)$ можно рассматривать как обобщенную гироскопическую функцию. В общем случае она выражается полиномом пятой степени по s, так что оба интеграла относятся к так называемому гиперэллиптическому типу. Образуя обратные функции, мы можем отсюда найти $s = s(\tau)$. Так как все переменные исходной системы могут быть выражены через s, то с математической точки зрения задачу можно считать решенной. Однако до настоящего времени никто из многочисленных авторов, занимавшихся усовершенствованием и упрощением этого исключительно сложного математического решения, не смог дать наглядной его интерпретации.

Разберем один частный случай гироскопа Ковалевской. Из совокупности уравнений (3.73) и (3.31) нетрудно видеть, что они

допускают возможность стационарного вращения вокруг вертикальной оси 1′. При этом

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \neq 0, & \omega_2 &= \omega_3 = 0, \\ a_{31} &= 1, & a_{32} &= a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Исследуем устойчивость этого движения путем анализа возмущенного движения. С этой целью запишем переменные в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + x_1, & a_{31} &= 1 + x_4, \\ \omega_2 &= x_2, & a_{32} &= x_5, \\ \omega_3 &= x_3, & a_{33} &= x_6, \end{aligned}$$

где x_ν $(\nu = 1, \ldots, 6)$ — возмущения. Подстановка этих величин в систему уравнений движения (3.73) и (3.31) дает для возмущенного движения

$$\begin{aligned} &2\dot{x}_1 - x_2 x_3 = 0, \\ &2\dot{x}_2 + (\omega_0 + x_1) x_3 = c x_6, \\ &\dot{x}_3 = - c x_5, \\ &\dot{x}_4 - x_2 x_6 + x_3 x_5 = 0, \\ &\dot{x}_5 + x_3 (1 + x_4) - (\omega_0 + x_1) x_6 = 0, \\ &\dot{x}_6 + (\omega_0 + x_1) x_5 - x_2 (1 + x_4) = 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Ограничимся здесь выяснением необходимых условий устойчивости стационарного вращения вокруг оси 1′ и потому опустим в (3.83) все члены второго порядка относительно возмущений. Тогда характеристическое уравнение линейной системы первого приближения будет

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \omega_0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda & -\omega_0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \omega_0 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или после необходимых вычислений

$$2\lambda^2 \left(\lambda^2 + \omega_0^2 - c\right)(2\lambda^2 - c) = 0. \tag{3.84}$$

Для устойчивости необходимо $\lambda^2 < 0$, т. е. требуется выполнение условий

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - c &> 0, \\ c &< 0, \end{aligned} \tag{3.85}$$

из которых первое безусловно выполняется, если выполнено второе. Так как для гироскопа Ковалевской при $s > 0$ условие (3.85/2) не выполняется, то его движение не может быть устойчивым. Румянцев [20] показал, что условие (3.85) также достаточно для устойчивости по переменным ω_1, ω_2, ω_3, a_{31}, a_{32}, a_{33}, что позволяет сформулировать следующий результат:

Стационарное вращение гироскопа Ковалевской с нижним расположением центра тяжести устойчиво при любой скорости собственного вращения. Вращение гироскопа с верхним расположением центра тяжести всегда неустойчиво.

Занимаясь частными случаями гироскопа Ковалевской, Аппельрот в результате кропотливой работы нашел условия, при которых гироскопическая функция $P(s)$ в формулах (3.81) вырождается или имеет кратные корни. В этих случаях интегралы (3.81) могут быть приведены к обычным эллиптическим. С подобным частным случаем мы сталкиваемся при равенстве нулю постоянной в частном интеграле (3.80). Тогда непосредственно видно, что

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_2^2 &= c a_{31}, \\ 2\omega_1\omega_2 &= c a_{32}. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Если задавать определенные соотношения между постоянной энергии E_0 и постоянной кинетического момента H_0, то можно обнаружить даже такие случаи, где переменные удается выразить через элементарные тригонометрические функции.

3.3.4. Особые виды движения тяжелого гироскопа. Особые виды движения, осуществление которых связано с удовлетворением совершенно определенным начальным условиям, неоднократно подвергались исследованию с разных точек зрения. Около 1900 г. поиски новых интегрируемых случаев столь привлекательных нелинейных уравнений движения тяжелого гироскопа превратились чуть ли не в своего рода спорт для математиков. При этом исследователи зачастую уходили даже от собственно физической проблемы и посвящали свои обширные исследования и таким случаям, которые неосуществимы либо физически — вследствие нарушения связывающих A, B и C неравенств, — либо геометрически — ввиду невыполнения условия $a_{3i}a_{3i} = 1$. Мы не имеем возможности останавливаться здесь на этих работах. Сделаем лишь несколько замечаний по поводу приведенных в п. 3.3.1 случаев, которые могут представить интерес с точки зрения понимания общих принципов поведения гироскопа.

а) Гироскоп по Горячеву и Чаплыгину. Случай, фигурирующий в таблице под рубрикой 4, родствен случаю Ковалевской. Положение центра масс определяется теми же условиями $s_1 = s \neq 0$, $s_2 = s_3 = 0$, но характеристика эллипсоида инерции несколько иная: $A = B = 4C$.

Таким образом, гироскоп Горячева — Чаплыгина более вытянут, чем гироскоп Ковалевской, но и он имеет неоднородное распределение масс и симметричный эллипсоид инерции для точки опоры. Существенное отличие этого случая от предыдущего состоит в том, что здесь вводится еще ограничение, касающееся начальных условий: постоянная H_0 кинетического момента (3.33) должна быть равна нулю. При этой посылке можно найти еще один интеграл уравнений движения и свести математическое решение к квадратурам.

В разбираемом случае, пользуясь (3.29), приходим к системе

$$\begin{aligned} 4\dot{\omega}_1 - 3\omega_2\omega_3 &= 0, \\ 4\dot{\omega}_2 + 3\omega_1\omega_3 &= 2ca_{33}, \\ \dot{\omega}_3 &= -2ca_{32}, \end{aligned} \tag{3.87}$$

где c имеет прежнее значение (3.74). Новый интеграл в предположении $H_0 = 0$ можно найти в виде

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\omega_3 - 2c\omega_1 a_{33} = \text{const}. \tag{3.88}$$

В самом деле, дифференцируя (3.88) по времени, получаем

$$2\omega_3(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2) + \dot{\omega}_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2c\dot{\omega}_1 a_{33} - 2c\omega_1\dot{a}_{33} = 0.$$

Подставляя сюда значения $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$, $\dot{\omega}_3$ из (3.87), а также $\dot{a}_{33}$ из (3.31), находим

$$\frac{c\omega_2}{2}[4a_{31}\omega_1 + 4a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3] = 0.$$

Но это условие вследствие предположения $H_0 = 0$ выполняется всегда. Именно в силу $A = B = 4C$ имеем

$$H_0 = H_i a_{3i} = \frac{A}{4}[4\omega_1 a_{31} + 4\omega_2 a_{32} + \omega_3 a_{33}] = 0.$$

Мы не станем определять переменные, используя новый интеграл (3.88). Это привело бы к гиперэллиптическим интегралам, вычисление которых требует значительно большего объема расчетных работ, чем, например, в случае гироскопа Лагранжа.

Легко поддаются анализу частные случаи, когда гироскоп вращается вокруг горизонтальной оси 2′ или 3′. Тогда либо

α) $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $a_{32} = 0$ (вращение вокруг оси 2′),

либо

β) $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $a_{33} = 0$ (вращение вокруг оси 3′).

Обозначая угол, образованный осью 1′ с вертикалью, через ϑ, имеем

для случая α) $a_{31} = \cos\vartheta$, $a_{33} = \sin\vartheta$,

для случая β) $a_{31} = \cos\vartheta$, $a_{32} = -\sin\vartheta$.

Подставив указанные величины в (3.87), получим следующие уравнения, описывающие вращение:

α) $\ddot{\vartheta} - {}^1/_2 c \sin\vartheta = 0$,

β) $\ddot{\vartheta} - 2c \sin\vartheta = 0$.

Оба дифференциальных уравнения аналогичны уравнению плоского физического маятника. Их можно решить с помощью эллиптических функций. Здесь возможно движение колебательного характера и движение, при котором происходит опрокидывание маятника, но и то, и другое в любом случае отличается непостоянством угловой скорости.

b) *Частные случаи Мерцалова и Стеклова.* Под рубриками 5 и 6 таблицы фигурируют два случая, подобные уже рассмотренному случаю 4. Во всех трех случаях приняты ограничения, касающиеся как формы эллипсоида инерции и положения центра масс, так и начальных условий.

Мерцалов рассматривает тот же гироскоп, что и Горячев и Чаплыгин, но требует других начальных условий. Он принимает $H_0 \neq 0$, но считает, что начальный вектор угловой скорости $(\omega_i)_0$ не имеет составляющей по оси симметрии 3′. При этом предположении можно отыскать дополнительный интеграл уравнений движения. В случае $H_0 = 0$ он переходит в (3.88).

Уравнения движения сохраняют вид уравнений (3.87) в случае *a*). Они допускают два простых частных решения. Как и в случае *a*), возможно вращение вокруг горизонтальной оси 2′

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad a_{32} = 0,$$

которое удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\vartheta} - {}^1/_2 c \sin\vartheta = 0.$$

Кроме того, возможно стационарное вращение вокруг вертикальной оси 1′, для которого

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$$
$$a_{31} = 1, \quad a_{32} = a_{33} = 0.$$

Укажем без доказательства, что в отношении устойчивости этого движения справедливо все, касающееся стационарного вращения гироскопа Ковалевской: только вращение гироскопа Мерцалова с нижним расположением центра тяжести устойчиво; гироскоп с верхним расположением центра тяжести всегда неустойчив.

В случае под рубрикой 6 таблицы, рассмотренном Стекловым, центр масс также расположен на главной оси (ось 3′). Но симметричность эллипсоида инерции для точки *F* не обязательна, так как предполагается лишь $2A = C$. Ограничение в отношении начальных условий сводится к тому, что вектор начальной угловой

скорости $(\omega_i)_0$ должен лежать в плоскости $1'$-$3'$. Эти предположения позволяют произвести точное интегрирование уравнений, на чем мы, однако, останавливаться не будем.

Устойчивость стационарных вращений гироскопа Стеклова также неоднократно подвергалась исследованию. Но при этом все сводится к частным случаям вращений общего вида, найденных Штауде, которые мы исследуем ниже более подробно.

c) *Перманентные вращения Штауде.* Займемся исследованием того, при каких условиях тяжелый гироскоп может вращаться вокруг осей, одновременно неподвижных относительно тела и в пространстве. При этом не будем накладывать никаких ограничений ни на форму тела, ни на положение центра тяжести. Штауде [21] показал, что такого рода *вращения вокруг вертикальных осей* возможны и что гироскоп вращается при этом равномерно. Вертикальный единичный вектор a_{3i} сохраняет в этом случае неизменное положение также и по отношению к телу, так что $d'a_{3i}/dt = 0$. Тогда из (3.30) следует $\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k} = 0$. Отсюда можно заключить, что вектор угловой скорости ω_i вертикален. Таким образом, можно написать

$$\omega_i = \pm\, \omega a_{3i}, \tag{3.89}$$

причем вопрос о выборе того или иного знака остается пока открытым.

В данном случае из интеграла энергии (3.34) следует, что как потенциальная, так и кинетическая энергия постоянна. Так как s_i — вектор, связанный с телом, то остается постоянным $s_i a_{3i}$, а вместе с тем и потенциальная энергия. Это легко объяснимо физически, так как при вращении вокруг вертикальной оси центр тяжести S не смещается по вертикали. Постоянство кинетической энергии означает

$$T = {}^1\!/_2 H_i\omega_i = {}^1\!/_2 \Theta_{ij}\omega_j\omega_i = {}^1\!/_2 \omega^2 \Theta_{ij} a_{3j} a_{3i} = \text{const}. \tag{3.90}$$

Так как a_{3i} — вектор, постоянный в системе осей, связанной с телом, то сохраняется постоянство квадратичной формы $\Theta_{ij}a_{3j}a_{3i}$, и ω тоже должна быть постоянной. Таким образом, вращение вокруг вертикальной оси, связанной с телом, должно происходить с постоянной угловой скоростью.

Далее, при $\omega_i = \text{const}$ из (3.90) следует, что и H_i — это связанный с телом вектор постоянной величины. Ввиду $d'\omega_i/dt = 0$ из (3.28) следует

$$\varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = G\varepsilon_{ijk} a_{3j} s_k. \tag{3.91}$$

Это означает, что в случае вращений Штауде гироскопический момент и момент силы тяжести сбалансированы. Равенство (3.91) показывает, что это возможно только при компланарности векторов a_{3i}, ω_i, H_i и s_i. В самом деле, из равенства (3.91) следует, что плоскость, содержащая векторы ω_j и H_k, параллельна плоскости векторов a_{3j} и s_k. Кроме того, требование, чтобы левая и правая

части (3.91) имели одинаковые знаки, позволяет установить знак ω_i в (3.89). Знак плюс следует брать в том случае, когда векторы s_i и H_i лежат в одной и той же полуплоскости, если смотреть сверху; в противном случае надо брать знак минус (рис. 3.27). Воспользовавшись равенством (3.89), мы можем придать (3.91) следующий вид:

$$\varepsilon_{ijk}a_{3j}(\pm\,\omega H_k - Gs_k) = 0. \tag{3.92}$$

Это уравнение всегда удовлетворяется, если суммарный вектор, заключенный в скобки, вертикален. Чисто геометрическое необхо-

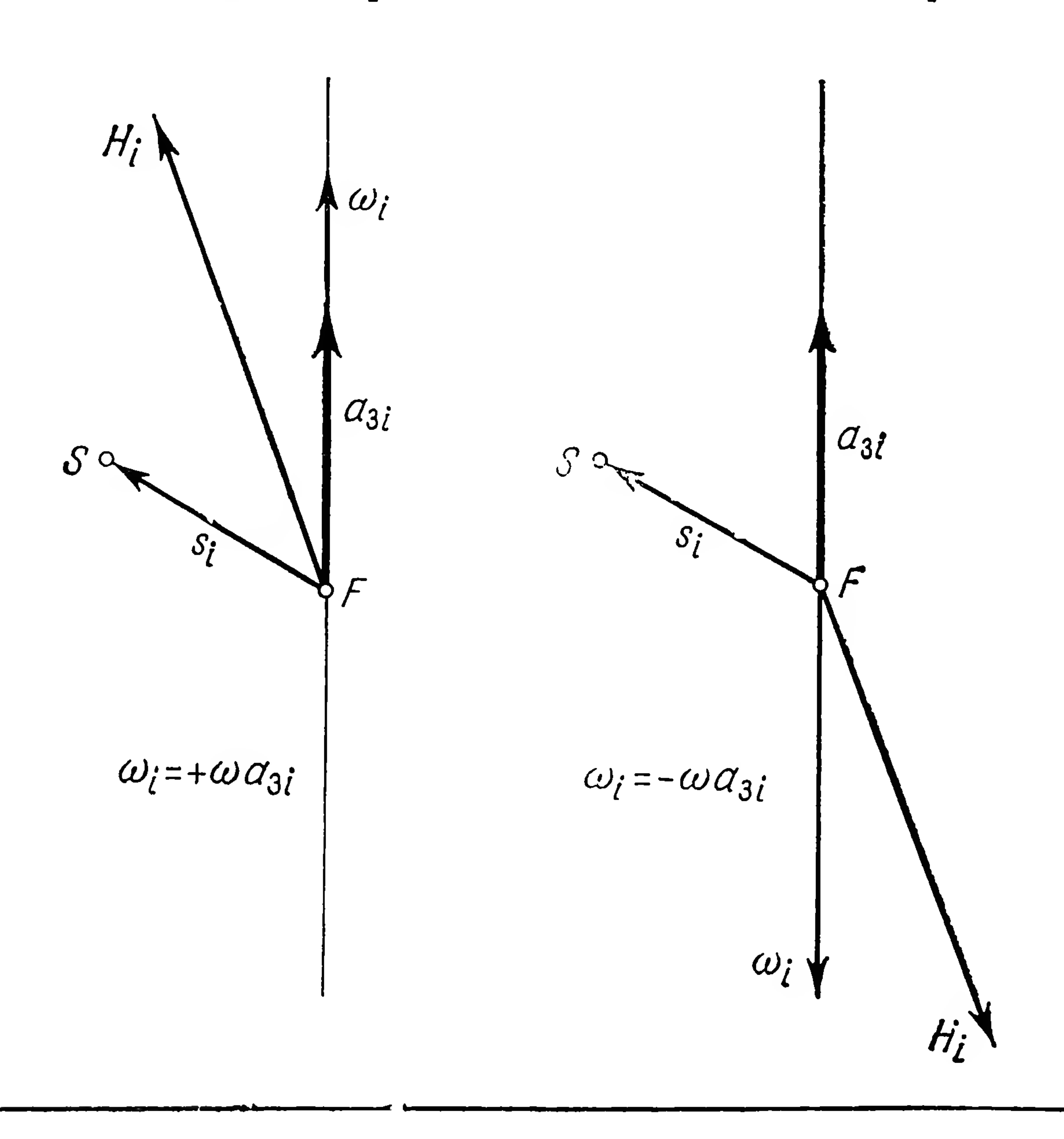


Рис. 3.27. Возможные расположения векторов a_{3i}, ω_i, H_i и s_i при перманентных вращениях тяжелого несимметричного гироскопа.

димое, хотя и не достаточное, условие, при котором удовлетворяется равенство (3.91), удается получить путем скалярного умножения последнего на s_i. Учитывая (3.89), получаем

$$s_i\varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = \omega^2 s_i \varepsilon_{ijk} a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l} = 0,$$

или для $\omega \neq 0$

$$s_i\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l} = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ Aa_{31} & Ba_{32} & Ca_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(C-B)\,s_1a_{32}a_{33} + (A-C)\,s_2a_{33}a_{31} + (B-A)\,s_3a_{31}a_{32} = 0. \tag{3.93}$$

В силу $a_{3i}a_{3i} = 1$ это соотношение определяет кривую на неподвижной единичной сфере с центром в точке опоры F. Уравнение этой кривой зависит исключительно от распределения масс гироскопа, т. е. от моментов инерции и положения центра тяжести. Прямые, соединяющие точки названной кривой с точкой опоры F, служат возможными *осями вращений Штауде*. Они являются образующими так называемого *конуса Штауде* с вершиной в точке опоры. Уравнение конуса Штауде следует из (3.93), если в последнем рассматривать координаты вектора a_{3i} как переменные. Не вдаваясь в разбор этого соотношения (см., например, Граммель [3] или Лейманис [7]), заметим лишь, что и три главные оси, и прямая FS сами служат образующими конуса Штауде. Уравнение (3.93), действительно, всегда удовлетворяется, если вертикальной осью вращения является главная ось. Именно при этом две из координат a_{3i} равны нулю. Если же прямая FS вертикальна, то мы можем записать вектор s_i в форме $s_i = sa_{3i}$, т. е.

$$s_1 = sa_{31}, \quad s_2 = sa_{32}, \quad s_3 = sa_{33}. \tag{3.94}$$

Выражения (3.94) тоже удовлетворяют уравнению (3.93).

Покажем еще на примере простого частного случая гироскопа с симметричным эллипсоидом инерции ($A = B$), каким образом можно определить конус Штауде и как выбрать из его образующих *динамически возможные* оси.

Если $A = B$, то (3.93) удовлетворяется для

$$s_2a_{31} = s_1a_{32}, \quad a_{33} = 0.$$

Конус Штауде вырождается при этом в две плоскости, изображенные на рис. 3.28. Это экваториальная плоскость (плоскость $1'$-$2'$) и перпендикулярная к ней меридиональная плоскость, проходящая через точки F и S. Из (3.91) вытекает, что оси, лежащие в экваториальной плоскости, динамически не возможны, если только точка S не лежит на оси вращения. В силу $A = B$ вращению вокруг экваториальных осей всегда соответствует $H_i \| \omega_i$. Следовательно, согласно (3.91), гироскопический момент равен нулю. Что касается момента силы тяжести в правой части (3.91), то он обращается в нуль только тогда, когда $s_i \| a_{3i}$, т. е. когда центр тяжести расположен на оси вращения.

Для дальнейшего анализа повернем систему координат, связанную с телом, так, чтобы точка S оказалась в плоскости $2'$-$3'$. Это можно сделать, не нарушая общности, так как все экваториальные оси, проходящие через точку F, равноправны. Тогда в меридиональной плоскости, проходящей через точки F и S, мы получим картину, представленную на рис. 3.29. Определим положение оси FS, проходящей через центр тяжести, углом ψ, а угол наклона к оси $2'$ любой другой оси, проходящей через точку F, пусть

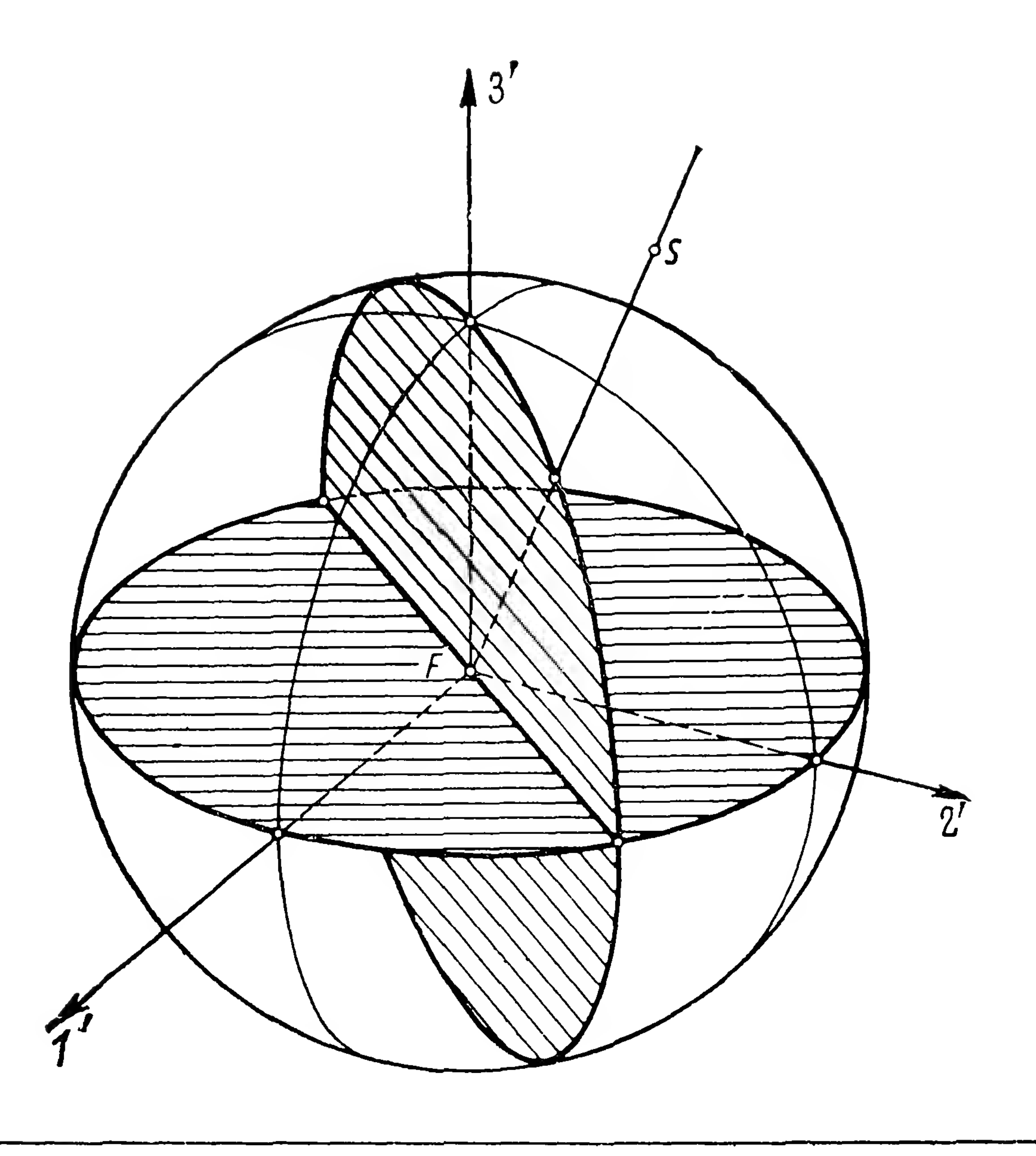


Рис. 3.28. Конус Штауде, выродившийся в две плоскости.

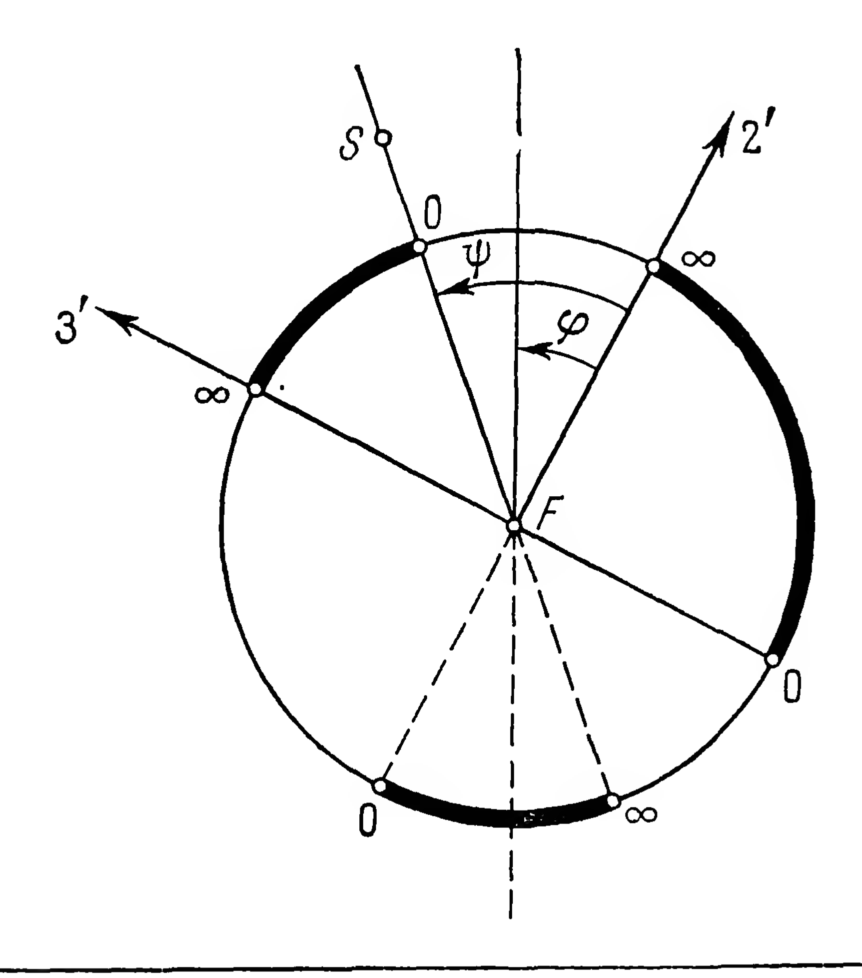


Рис. 3.29. Области динамически возможных осей при вращениях Штауде.

будет φ. Если рассматривать ось $2'$ как вертикальную ось вращения, то будет

$$\begin{aligned} a_{32} &= \cos\varphi, \quad \omega_2 = \omega\cos\varphi, \quad s_2 = s\cos\psi, \\ a_{33} &= \sin\varphi, \quad \omega_3 = \omega\sin\varphi, \quad s_3 = s\sin\psi. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Подставив эти величины в (3.91), мы получим из этого векторного уравнения в качестве первого уравнения в проекциях следующее соотношение:

$$(C - A)\,\omega_2\omega_3 = G\,(a_{32}s_3 - a_{33}s_2),$$

или

$$\omega^2 (C - A)\sin\varphi\cos\varphi = Gs\sin(\psi - \varphi); \tag{3.96}$$

отсюда

$$\omega^2 = \frac{2Gs}{A - C}\,\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin 2\varphi}. \tag{3.97}$$

Если имеются в виду действительные значения ω, то полученное выражение должно быть положительным. Из рис. 3.30 видно, что

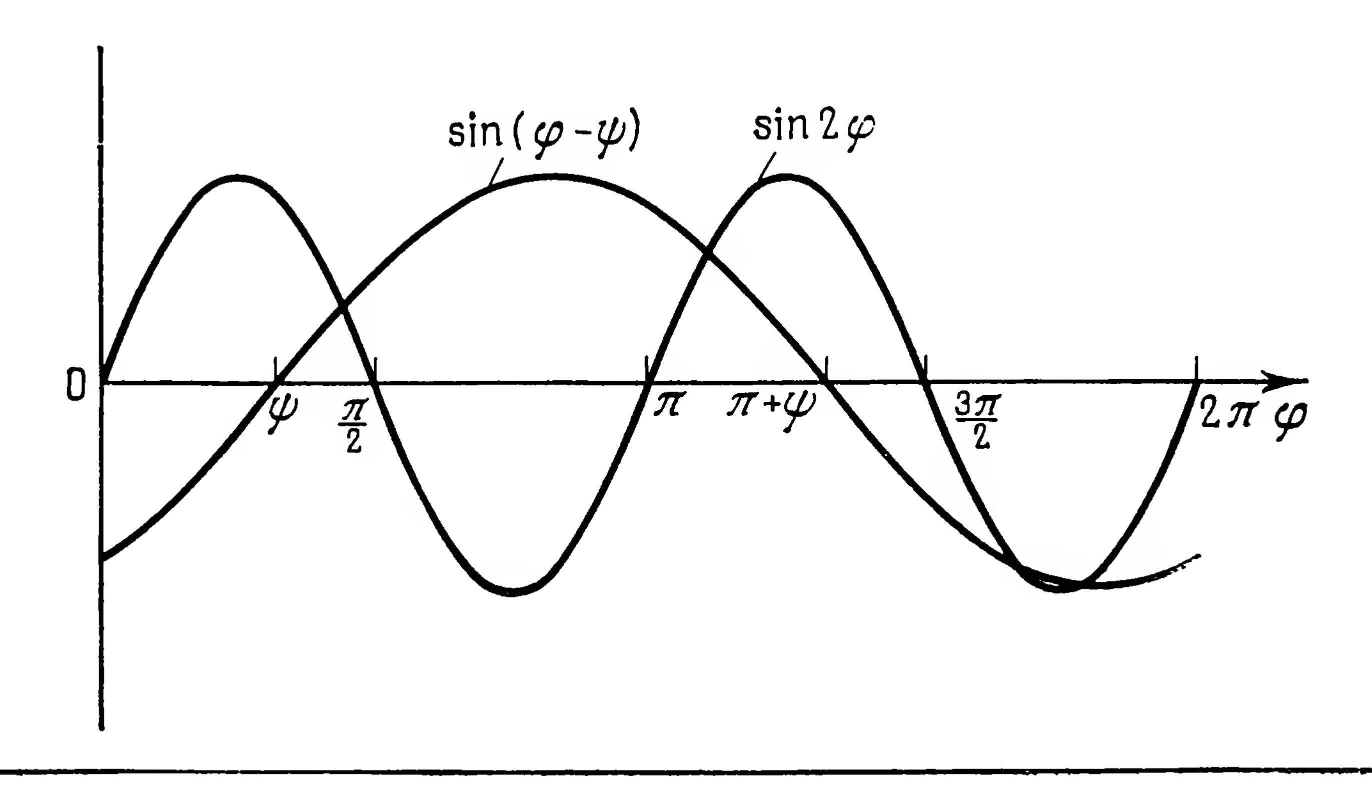


Рис. 3.30. К определению возможных осей Штауде.

это требование выполняется при предположении $A > C$ (сплющенный гироскоп) для

$$\psi < \varphi < \pi/2, \quad \pi < \varphi < \pi + \psi, \quad 3\pi/2 < \varphi < 2\pi. \tag{3.98}$$

Эти области отмечены на рис. 3.29 жирными линиями. При предположении $A < C$ (вытянутый гироскоп) мы получим дополнительные условия; возможные оси заключены теперь в интервалах

$$0 < \varphi < \psi, \quad \pi/2 < \varphi < \pi, \quad \pi + \psi < \varphi < 3\pi/2. \tag{3.99}$$

Угловую скорость ω, при которой обеспечивается взаимная компенсация гироскопического момента и момента силы тяжести, можно определить по формуле (3.97). Она показывает, что при

вращении вокруг главных осей $\omega \to \infty$. Последнее ясно физически, ибо при вращении вокруг этих осей гироскопический момент обращается в нуль и при конечной угловой скорости невозможна компенсация момента силы тяжести.

Устойчивость вращений Штауде следует рассмотреть отдельно. Мы не будем разбирать во всей полноте эту специальную область, которая охватывает обширное многообразие случаев вращения. Ограничимся исследованием одного важного частного случая, отослав читателя за дальнейшими подробностями к Граммелю [3] и Лейманису [7].

Определенный практический интерес представляет поведение несимметричного гироскопа, вращающегося вокруг вертикальной главной оси, причем центр тяжести S расположен на этой же оси и отстоит от точки F на расстояние s. Расстояние $s > 0$ соответствует гироскопу с верхним расположением центра тяжести, а $s < 0$ — гироскопу с нижним расположением центра тяжести. Предположим, что гироскоп вращается вокруг оси 1′. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_i &= (\omega_0, 0, 0), \\ a_{3i} &= (1, 0, 0), \\ s_i &= (s, 0, 0). \end{aligned} \tag{3.100}$$

Это возможное частное решение исходных уравнений движения (3.29) и (3.31) тяжелого гироскопа. Для исследования возмущенного движения примем для наших шести переменных следующие выражения:

$$\begin{aligned} \omega_i &= (\omega_0 + x_1, x_2, x_3), \\ a_{3i} &= (1 + x_4, x_5, x_6), \end{aligned} \tag{3.101}$$

где x_i $(i = 1, \ldots, 6)$ — возмущения. Подставив их в (3.29) и (3.31), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &A\dot{x}_1 - (B - C)\, x_2 x_3 = 0, \\ &B\dot{x}_2 - (C - A)(\omega_0 + x_1)\, x_3 = Gsx_6, \\ &C\dot{x}_3 - (A - B)(\omega_0 + x_1)\, x_2 = -Gsx_5, \\ &\dot{x}_4 - x_2 x_6 + x_3 x_5 = 0, \\ &\dot{x}_5 + (1 + x_4)\, x_3 - (\omega_0 + x_1)\, x_6 = 0, \\ &\dot{x}_6 + (\omega_0 + x_1)\, x_5 - (1 + x_4)\, x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Если ограничиться нахождением необходимых условий устойчивости системы, то, согласно теории первого приближения, мы можем пренебречь квадратичными относительно x членами уравнений (3.102). Отсюда следует, что при таком приближении возмущения

x_1 и x_4 оказываются малыми второго порядка. Поэтому в дальнейших рассуждениях уравнения (3.102/1) и (3.102/4) можно отбросить. Остается система уравнений

$$\begin{aligned} B\dot{x}_2 - (C-A)\,\omega_0 x_3 - Gsx_6 &= 0,\\ C\dot{x}_3 - (A-B)\,\omega_0 x_2 + Gsx_5 &= 0,\\ \dot{x}_5 + x_3 - \omega_0 x_6 &= 0,\\ \dot{x}_6 - x_2 + \omega_0 x_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Ее характеристическое уравнение будет

$$\begin{vmatrix} B\lambda & -(C-A)\,\omega_0 & 0 & -Gs \\ -(A-B)\,\omega_0 & C\lambda & Gs & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -\omega_0 \\ -1 & 0 & \omega_0 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или после необходимых вычислений и преобразований

$$\lambda^4 BC + \lambda^2\left[\omega_0^2(2BC - AB - AC + A^2) - Gs(B+C)\right] + \\ + \left[(B-A)\,\omega_0^2 + Gs\right]\left[(C-A)\,\omega_0^2 + Gs\right] = 0. \tag{3.104}$$

Система устойчива лишь тогда, когда удовлетворяющие этому уравнению значения λ^2 действительны и отрицательны. Для этого необходимо соблюдение следующих условий:

$$\left[\omega_0^2(2BC - AB - AC + A^2) - Gs(B+C)\right] > 0, \tag{3.105}$$

$$\left[(B-A)\,\omega_0^2 + Gs\right]\left[(C-A)\,\omega_0^2 + Gs\right] > 0, \tag{3.106}$$

$$\left[\omega_0^2(2BC - AB - AC + A^2) - Gs(B+C)\right]^2 - \\ - 4BC\left[(B-A)\,\omega_0^2 + Gs\right]\left[(C-A)\,\omega_0^2 + Gs\right] > 0. \tag{3.107}$$

Прежде чем приступить к более подробному анализу этих неравенств, удостоверимся в том, что они позволяют легко вывести три уже известных нам частных случая: свободный гироскоп, сферический маятник и симметричный тяжелый гироскоп.

α) Для *свободного гироскопа* $s = 0$. Поэтому (3.105) и (3.107) всегда удовлетворяются. В этом можно убедиться, если перемножить следующие, вытекающие из (1.10) соотношения:

$$B > C - A, \quad C > A - B.$$

Получаем

$$BC > AC + AB - BC - A^2,$$

или

$$2BC - AB - AC + A^2 > 0. \tag{3.108}$$

Следовательно, при $s = 0$ неравенство (3.105) удовлетворяется. Условие (3.107) можно привести к виду

$$A^2(B + C - A)^2 > 0;$$

значит, оно тоже удовлетворяется. Остается неравенство (3.106), которое при $s = 0$ переходит в

$$(B - A)(C - A) > 0.$$

Оно подтверждает уже полученный нами выше (§ 2.4) результат, что устойчивость обеспечена лишь тогда, когда A является либо наибольшим, либо наименьшим из главных моментов инерции.

β) *Сферический маятник* представляет собою гироскоп, у которого нет собственного вращения, т. е. $\omega_0 = 0$. Поэтому (3.106) и (3.107) всегда удовлетворяются. Из (3.105) следует, что для обеспечения устойчивости требуется $s < 0$. Это физически очевидно, так как в устойчивом равновесии может находиться только сферический маятник с нижним расположением центра тяжести.

γ) *Симметричному гироскопу*, вращающемуся вокруг оси 1′, соответствует $B = C$. Следовательно, (3.106) всегда удовлетворяется. Преобразуем неравенство (3.107) к виду

$$\left(A^2\omega_0^2 - 4GsB\right)(A - B)^2 > 0. \qquad (3.109)$$

Для гироскопа, у которого $s < 0$, оно удовлетворяется всегда, а для гироскопа, у которого $s > 0$, — только при условии

$$A^2\omega_0^2 > 4GsB. \qquad (3.110)$$

В силу (3.108) неравенство (3.105) для $s < 0$ тоже удовлетворяется. Оно удовлетворяется также и в случае $s > 0$, поскольку в него нужно подставить значение ω_0^2 согласно (3.110), которое следует из теперь уже более сильного неравенства (3.107). Следовательно, все три условия выполняются, если выполняется (3.110). Последнее же совпадает с прежним результатом (3.70). Следует лишь помнить, что там в качестве оси симметрии была выбрана ось 3′, а здесь — ось 1′.

Для исследования условий (3.105)—(3.107) в общем виде введем следующие безразмерные величины:

$$A/B = x, \quad A/C = y, \quad Gs/\left(A\omega_0^2\right) = k. \qquad (3.111)$$

Кроме величин x и y, характеризующих форму тела, поведение гироскопа зависит прежде всего от гироскопической постоянной k, характеризующей соотношение параметров гироскопа: малые значения k свидетельствуют о преобладании гироскопического момента, а большие — о преобладании момента силы тяжести. Значения $k < 0$ относятся к гироскопу с нижним расположением центра тяжести, а $k > 0$ — к гироскопу с верхним расположением центра тяжести. Для $k \to \infty$ получаем сферический маятник, для

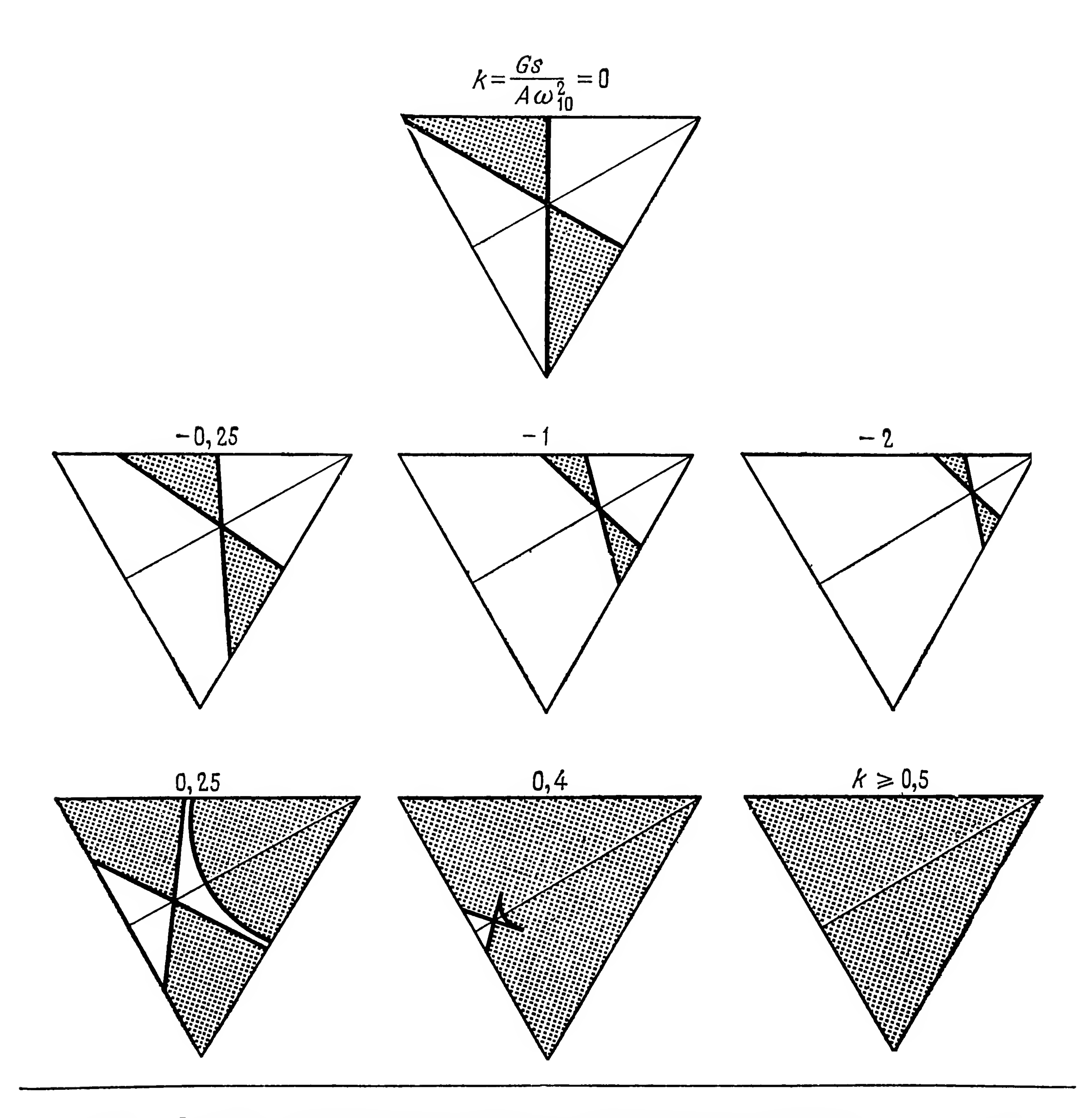


Рис. 3.31. Области устойчивости вращения несимметричного гироскопа для различных значений безразмерной гироскопической постоянной k.

$k=0$ — свободный гироскоп. При выбранных обозначениях необходимые условия устойчивости принимают вид

$$\begin{aligned} S_1 &= (2-y-x+xy)-k(x+y)>0, \\ S_2 &= (1-x+kx)(1-y+ky)>0, \\ S_3 &= [(2-y-x+xy)-k(x+y)]^2- \\ &\quad -4(1-x+kx)(1-y+ky)>0. \end{aligned} \tag{3.112}$$

На диаграммах рис. 3.31 указаны числовые оценки S_i ($i=1, 2, 3$) для различных значений гироскопической постоянной k. На них областям неустойчивости соответствуют затененные площадки треугольника формы твердого тела (см. п. 1.3.6). Отчетливо видно

изменение областей неустойчивости: при верхнем расположении центра тяжести они с ростом $|k|$ увеличиваются, а при нижнем — уменьшаются. Примечательно прежде всего то, что тело, вращающееся с неизменной угловой скоростью, подобно свободному гироскопу, может в определенном интервале угловых скоростей оказаться неустойчивым даже тогда, когда его центр тяжести лежит ниже точки опоры, т. е. когда оно статически устойчиво. И наоборот, гироскоп, вращающийся вокруг средней оси, — всегда неустойчивый, если он свободен, — при определенной скорости вращения может стать устойчивым даже тогда, когда центр тяжести находится выше точки опоры, т. е. когда гироскоп статически неустойчив. Оба этих эффекта могут быть продемонстрированы на соответствующих моделях.

Если условие устойчивости $S_2 > 0$ (3.112) удовлетворяется, то неравенство $S_3 > 0$ в любом случае оказывается сильнее, чем условие $S_1 > 0$. Поэтому, вообще говоря, достаточно исследовать условия (3.112/2) и (3.112/3). Неравенство (3.112/2) удовлетворяется, если знаки выражений в обеих содержащихся в нем скобках одинаковы. Если у них отрицательные знаки, то, как показал Румянцев [22], уже одно это является достаточным условием устойчивости в смысле Ляпунова. Названные достаточные условия можно записать в форме

$$\begin{aligned} (A - B)\,\omega_0^2 &> Gs, \\ (A - C)\,\omega_0^2 &> Gs. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Определенные ими области гарантированной устойчивости представлены на рис. 3.31 незатененными площадками треугольников формы.

Условие $S_3 > 0$ можно рассматривать как квадратичное неравенство относительно k и привести к виду

$$k^2 (x - y)^2 - 2k (x + y - 4)(xy - x - y) + (xy - x - y)^2 > 0. \tag{3.114}$$

Критическое значение k^*, при котором полученное выражение обращается в нуль и условие устойчивости нарушается, будет равно

$$k^* = \frac{xy - x - y}{(x - y)^2} \left[x + y - 4 \pm 2\sqrt{(2 - x)(2 - y)} \right]. \tag{3.115}$$

Отсюда видно, что действительные значения k^*, а значит, и границы устойчивости возможны лишь при $(2 - x)(2 - y) > 0$, т. е. одновременно должны удовлетворяться неравенства

$$2B > A \quad \text{и} \quad 2C > A. \tag{3.116}$$

Другая математическая возможность, выражающаяся в перемене знаков полученных неравенств, неосуществима физически, так как влечет за собой нарушение неравенств (1.10). Требование (3.116) означает, что момент инерции относительно главной оси, вокруг которой вращается гироскоп, не должен быть слишком большим

d) *Маятниковые движения по Гессу и Гриоли.* В этих случаях, фигурирующих в таблице п. 3.3.1 под рубриками 8 и 9, допускается произвольный эллипсоид инерции, как и у рассмотренных выше вращений Штауде. Но при этом наряду с наложением ограничений на начальные условия предполагается весьма специальное положение центра тяжести. Оно может быть описано следующим образом. Будем отправляться от эллипсоида, взаимного с эллипсоидом инерции тела (1.27) и определяемого уравнением

$$\frac{x_1^2}{A}+\frac{x_2^2}{B}+\frac{x_3^2}{C}=K. \tag{3.117}$$

Положим в дальнейшем $A > B > C$. Тогда средней осью эллипсоида окажется ось $2'$. Будем теперь искать такие содержащие

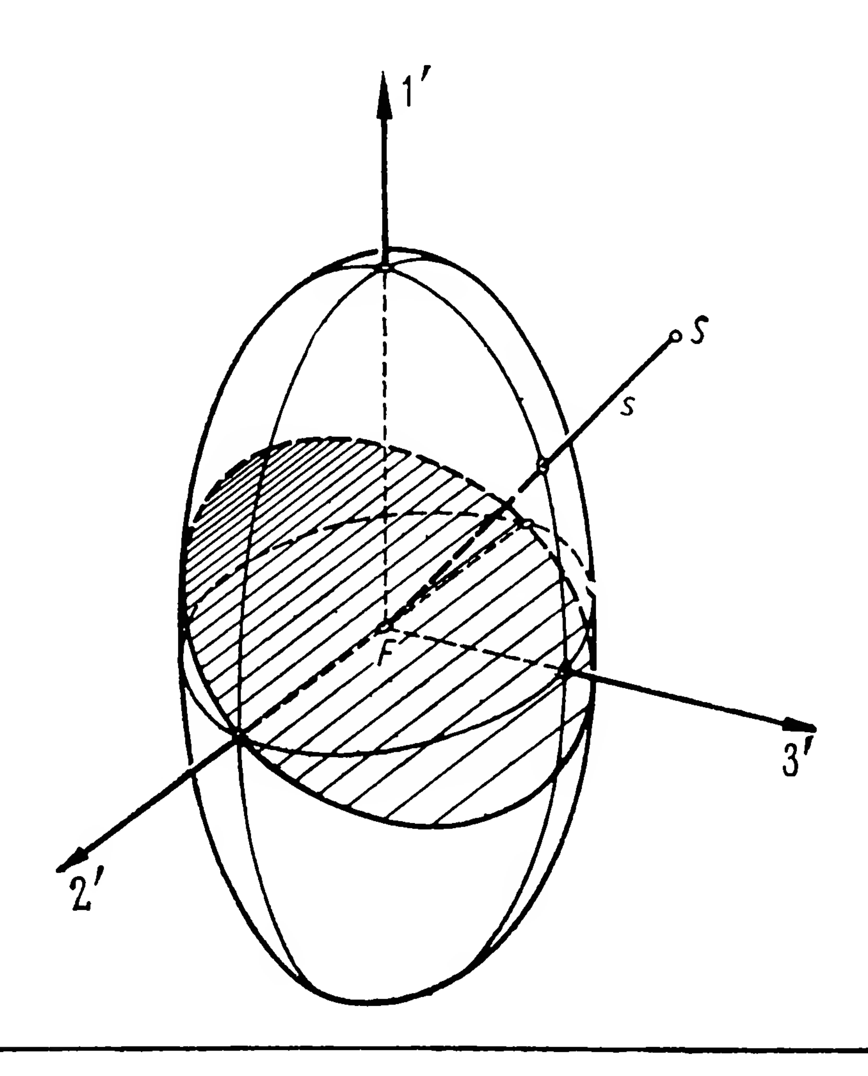


Рис. 3.32. Положение центра тяжести при маятниковых колебаниях Гесса.

ось $2'$ плоскости, линиями пересечения которых с эллипсоидом служат окружности (рис. 3.32). Эти окружности можно также найти как линии пересечения эллипсоида (3.117) со сферой

$$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)/B=K.$$

Вычитая это уравнение из предыдущего, получаем уравнение проекции линии пересечения на плоскость $1'$-$3'$:

$$x_1^2\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)+x_3^2\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)=0,$$

или

$$x_1^2C\,(A-B)-x_3^2A\,(B-C)=0.$$

Тогда уравнение одной из двух кривых пересечения будет таково:

$$x_1 \sqrt{C(A-B)} + x_3 \sqrt{A(B-C)} = 0.$$

Это уравнение прямой в плоскости 1′-3′. Так вот, прямая FS, проходящая через центр тяжести, должна быть перпендикулярна плоскости кругового сечения, т. е. перпендикулярна упомянутой прямой. Таким образом, мы получаем условие

$$s_i x_i = s_1 x_1 + s_3 x_3 = 0,$$

или

$$s_1 \sqrt{A(B-C)} - s_3 \sqrt{C(A-B)} = 0, \quad s_2 = 0. \tag{3.118}$$

Согласно Гессу, далее требуется, чтобы вектор начального кинетического момента $(H_i)_0$ лежал в плоскости кругового сечения, т. е. чтобы

$$(H_i s_i)_0 = 0. \tag{3.119}$$

Можно показать, что при изложенных выше предположениях вектор кинетического момента H_i остается в упомянутой плоскости кругового сечения и в процессе всего дальнейшего движения. Таким образом, мы находим новый интеграл уравнений движения

$$H_i s_i = A\omega_1 s_1 + C\omega_3 s_3 = 0. \tag{3.120}$$

Это позволяет довести до конца интегрирование уравнений движения. Приведем лишь следующий результат этого интегрирования. Центр тяжести S движется, как сферический маятник, подвешенный в точке F; только в случае Гесса ускорение силы тяжести g должно быть заменено на ms^2g/B.

Вращение гироскопа при этом таково, что некоторая точка средней оси описывает локсодромию. Поэтому в разобранном случае говорят также о *локсодромическом маятнике.*

Путь, которым шел Гриоли к открытому им интегрируемому случаю уравнений гироскопа, подобен пути Гесса, но за основу был принят не эллипсоид, взаимный к эллипсоиду инерции (3.117), а сам эллипсоид инерции (1.27). Совершенно так же, как выше в случае Гесса, Гриоли накладывает на положение центра тяжести S следующие требования:

$$s_1 \sqrt{B-C} - s_3 \sqrt{A-B} = 0, \quad s_2 = 0. \tag{3.121}$$

Следовательно, центр тяжести расположен на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции, восстановленном из точки F. Можно показать, что при удовлетворении приведенным в таблице п. 3.3.1 начальным условиям этот специальный гироскоп может совершать регулярную прецессию, при которой проекция вектора угловой скорости ω_i на ось FS, проходящую через центр тяжести, постоянна:

$$\omega_i s_i = \omega_1 s_1 + \omega_3 s_3 = k. \tag{3.122}$$

Интересно отметить, что в данном случае ось прецессии, вообще говоря, не вертикальна. Напротив, она отклонена от вертикали на некоторый угол δ, зависящий от формы эллипсоида инерции:

$$\cos\delta = (k^2/s)(A - B + C). \tag{3.123}$$

Ось прецессии перпендикулярна прямой FS. Как показал Гуляев [23], это является единственной механически возможной прецессией несимметричного гироскопа общего вида.

3.4. Гироскоп с самовозбуждением

Следуя Граммелю [24], *гироскопом с самовозбуждением* мы назовем гироскоп, движение которого вызывается или поддерживается моментом M_i с известными в системе координат, связанной с телом, составляющими. Момент M_i может быть постоянным и может быть функцией времени или угловой скорости. Во всяком случае, он не должен зависеть от текущего положения тела. Вследствие этого состояние движения гироскопа возможно определить только из динамических уравнений Эйлера, не прибегая параллельно к нередко трудоемкому интегрированию кинематических уравнений.

От времени может зависеть как величина, так и направление вектора момента M_i. И то и другое представляет интерес, например, при регулировании положения космических кораблей, когда сервомоменты создаются при помощи поворотных сопел с регулируемой тягой. В этих рассуждениях, как обычно, пренебрегают обусловленной реактивным движителем потерей массы тела. В случае регулирования положения такой подход вполне допустим, однако он становится проблематичным при исследовании конического движения стартующих ракет.

3.4.1. Общее решение уравнений движения симметричного гироскопа с самовозбуждением. При $A = B$ уравнения движения гироскопа с самовозбуждением при наличии возбуждающих моментов, зависящих от времени, имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot\omega_1 - (A - C)\,\omega_2\omega_3 &= M_1(t), \\ A\dot\omega_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= M_2(t), \\ C\dot\omega_3 \qquad\qquad\qquad &= M_3(t). \end{aligned} \tag{3.124}$$

Из третьего уравнения (3.124) следует, что

$$\omega_3 = \omega_{30} + (1/C)\int M_3(t)\,dt. \tag{3.125}$$

Вводя новую переменную α

$$d\alpha = \omega_3\,dt, \tag{3.126}$$

можно привести первые два уравнения (3.124) к линейной легко интегрируемой форме. Имеем

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \omega'\omega_3,$$

где штрихом обозначена производная по переменной α. Подставляя это выражение в (3.124), получаем

$$\begin{aligned} \omega_1' - a\omega_2 &= m_1, \\ \omega_2' + a\omega_1 &= m_2, \end{aligned} \tag{3.127}$$

где

$$m_1 = \frac{M_1}{A\omega_3}, \quad m_2 = \frac{M_2}{A\omega_3}, \quad a = \frac{A-C}{A}.$$

В силу неравенств (1.10) a всегда лежит в интервале $-1 \leqslant \leqslant a \leqslant +1$. Случай шарового гироскопа ($a = 0$) мы можем из наших рассуждений исключить, потому что для него система (3.124) решается элементарным образом.

Введем комплексные величины

$$\omega_1 + i\omega_2 = \omega^*, \quad m_1 + im_2 = m^*,$$

которые позволяют привести уравнения (3.127) к следующему виду:

$$\omega^{*\prime} + ia\omega^* = m^*, \tag{3.128}$$

причем вследствие подстановки (3.126) комплексное возбуждение $m^* = m^*(t)$ надо представить как функцию новой переменной α.

Общее решение уравнения (3.128) имеет вид

$$\omega^* = e^{-ia\alpha}\left[\omega_0^* + \int_0^\alpha m^*(\beta)\, e^{ia\beta}\, d\beta\right], \tag{3.129}$$

где $\omega_0^* = \omega^*(0)$ — произвольная постоянная, или в вещественной форме

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10}\cos a\alpha + \omega_{20}\sin a\alpha + \int_0^\alpha [m_1\cos a(\alpha-\beta) + m_2\sin a(\alpha-\beta)]\,d\beta, \\ \omega_2 &= \omega_{20}\cos a\alpha - \omega_{10}\sin a\alpha + \int_0^\alpha [m_2\cos a(\alpha-\beta) - m_1\sin a(\alpha-\beta)]\,d\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3.130}$$

Присоединяя сюда уравнение (3.125), получаем систему, описывающую движение при произвольных функциях самовозбуждения.

3.4.2. Приложение к случаю постоянных возбуждающих моментов. Поведение гироскопа под действием постоянных связанных с телом моментов произвольного направления впервые было объяснено и исследовано Бёдевадтом [25]. Представляется целесообразным рассмотреть по отдельности два случая.

а) *Вектор момента перпендикулярен оси симметрии.* В этом случае $M_3 = 0$ и из (3.125) непосредственно следует $\omega_3 = \omega_{30}$. Если

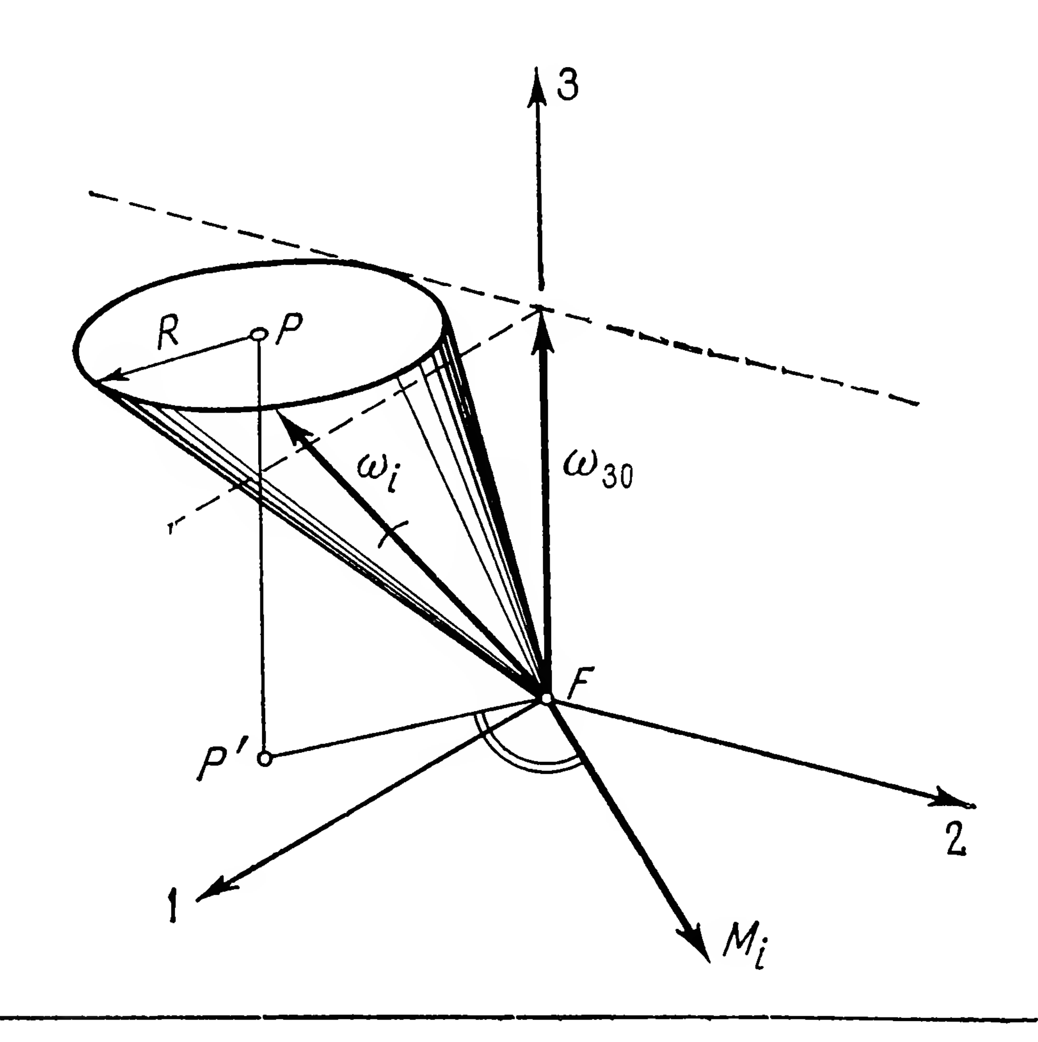


Рис. 3.33. Конус полодии симметричного гироскопа с самовозбуждением постоянным моментом M_i.

постоянная ω_{30} обращается в нуль, то анализ становится совсем элементарным, так как исходные уравнения (3.124) разделяются. Этот частный случай представляет определенный интерес, когда речь идет о космическом корабле, кинетический момент которого равен нулю. Более важен, однако, случай $\omega_{30} \neq 0$.

Из (3.126) мы теперь находим $\alpha = \omega_{30} t$, так что при дальнейшем анализе мы можем снова перейти к временно́й переменной t. Решение (3.129) принимает вид

$$\omega^* = \omega_0^* e^{-ia\omega_{30}t} + m_0^* \omega_{30} \int_0^t e^{-ia\omega_{30}(t-\tau)} d\tau,$$

или

$$\omega^* = -i \frac{m_0^*}{a} + \left(\omega_0^* + i \frac{m_0^*}{a}\right) e^{-ia\omega_{30}t}, \qquad (3.131)$$

где $m_0^* = m^*(0)$ — постоянная интегрирования. Этот результат означает, что при таком движении конус полодии представляет собой наклонный круговой конус (рис. 3.33). Его вершиной слу-

жит точка опоры F, а основанием является круг с центром в точке P, лежащий в плоскости, параллельной плоскости 1-2 и отстоящей на расстояние ω_{30} от точки F. Координаты центра P таковы:

$$\omega_{1P} = \frac{M_{20}}{(A-C)\,\omega_{30}}, \quad \omega_{2P} = -\frac{M_{10}}{(A-C)\,\omega_{30}}, \quad \omega_{3P} = \omega_{30}.$$

Зависимость между векторами угловой скорости ω_i и момента M_i можно проследить непосредственно на рис. 3.33: в то время как ω_i непрерывно скользит по наружной поверхности конуса полодии, обходя ее в течение промежутка времени

$$T_u = \frac{2\pi}{a\omega_{30}} = \frac{2\pi A}{(A-C)\,\omega_{30}}, \tag{3.132}$$

вектор M_i привязан к плоскости 1-2, сохраняя перпендикулярность к отрезку FP', где P' — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на ту же плоскость. В зависимости от начальных условий конус полодии может принимать различную форму. В случае

$$\omega_0^* = -i\,\frac{\overset{*}{m_0}}{a} = \frac{M_{20}}{(A-C)\,\omega_{30}} - i\,\frac{M_{10}}{(A-C)\,\omega_{30}}$$

он стягивается в отрезок FP, что соответствует стационарному вращению вокруг оси, неподвижной как в теле, так и в пространстве. Если эту ось принять за ось 3 неподвижной системы, то для данного частного случая нетрудно найти зависимость положения тела от эйлеровых углов. Имеем $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$, $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$, т. е. $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$. В силу

$$\omega_1 = \omega_{10} = \dot{\psi}_0 \sin\vartheta_0 \sin\varphi_0,$$

$$\omega_2 = \omega_{20} = \dot{\psi}_0 \sin\vartheta_0 \cos\varphi_0,$$

$$\omega_3 = \omega_{30} = \dot{\psi}_0 \cos\vartheta_0$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\vartheta_0 &= \frac{1}{\omega_{30}}\sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} = \frac{M}{(A-C)\,\omega_{30}^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi_0 &= \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = -\frac{M_{20}}{M_{10}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.133}$$

Выражение для φ_0 свидетельствует о том, что направление вектора момента M_i совпадает с направлением линии узлов.

Возмущенное движение относительно разбираемого стационарного вращения можно толковать как взаимное наложение вынужденного вращения, вызываемого моментом M_i, и собственного движения (нутации). Указанное стационарное вращение мало отличается от результирующего движения, поэтому последнее можно считать устойчивым. Но это ни в какой мере не влечет за собой устойчивости по угловым координатам. Однако расчет этих углов для возмущенного движения сопряжен с значительными

трудностями, и мы на нем останавливаться не будем (см., например, Бёдевадт [25]).

b) *Постоянный вектор момента произвольного направления.* В этом более сложном случае также возможно полное и явное решение исходных уравнений. Для $M_3 = M_{30} \neq 0$ из (3.125) следует

$$\omega_3 = \omega_{30} + \frac{M_{30}}{C} t = \frac{M_{30}}{C} (t + t_0), \qquad (3.134)$$

где константу $t_0 = C\omega_{30}/M_{30}$ можно трактовать как время разгона. Приняв во внимание (3.134), для $\alpha_0 = 0$ из (3.126) получим

$$\alpha = \int_{-t_0}^{t} \omega_3\, dt = [M_{30}/(2C)]\,(t + t_0)^2.$$

Эта зависимость позволяет выразить ω_3, m_1 и m_2 как функции от α. Комбинируя (3.127) и (3.134), находим

$$m_1 = \sqrt{\frac{C}{2M_{30}}}\, \frac{M_{10}}{A\sqrt{\alpha}}, \qquad m_2 = \sqrt{\frac{C}{2M_{30}}}\, \frac{M_{20}}{A\sqrt{\alpha}}.$$

Подставляя далее эти значения в (3.130), получаем составляющие ω_1 и ω_2 угловой скорости. Получающиеся при этом интегралы можно выразить через интегралы Френеля

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy, \qquad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy.$$

Полагая $x = a\alpha$ и $y = a\beta$, имеем

$$\int_0^\alpha \frac{\cos a(\alpha - \beta)}{\sqrt{\beta}}\, d\beta = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{x/a} \frac{\cos(x - y)}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left[\cos x\, C\left(\frac{x}{a}\right) + \sin x\, S\left(\frac{x}{a}\right)\right],$$

$$\int_0^\alpha \frac{\sin a(\alpha - \beta)}{\sqrt{\beta}}\, d\beta = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{x/a} \frac{\sin(x - y)}{\sqrt{y}}\, dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left[\sin x\, C\left(\frac{x}{a}\right) - \cos x\, S\left(\frac{x}{a}\right)\right].$$

Принимая во внимание полученные интегралы, из (3.130) выводим составляющие угловой скорости

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{10}\cos x + \omega_{20}\sin x + \sqrt{\frac{\pi C}{A(A - C)M_{30}}} \Big[S\left(\frac{x}{a}\right)(M_{10}\sin x - \\ &\quad - M_{20}\cos x) + C\left(\frac{x}{a}\right)(M_{10}\cos x + M_{20}\sin x)\Big], \\ \omega_2 &= \omega_{20}\cos x - \omega_{10}\sin x + \sqrt{\frac{\pi C}{A(A - C)M_{30}}} \Big[S\left(\frac{x}{a}\right)(M_{10}\cos x + \\ &\quad + M_{20}\sin x) - C\left(\frac{x}{a}\right)(M_{10}\sin x - M_{20}\cos x)\Big]. \end{aligned} \qquad (3.135)$$

Здесь

$$x = a\alpha = \frac{M_{30}(A-C)}{2AC}(t+t_0)^2,$$

т. е. аргумент интегралов Френеля и тригонометрических функций растет пропорционально квадрату времени. Формулы (3.135) совместно с выражением (3.134) для ω_3 представляют собой решение исходных уравнений (3.124). Таким образом, движение определено.

3.4.3. Возбуждение симметричного гироскопа ударными моментами. В связи с практическим применением гироскопов с самовозбуждением в космонавтике представляет также интерес возбуждение кратковременными ударными моментами. Предположим, что составляющая момента по оси симметрии отсутствует. Тогда ввиду $M_3 = 0$ сразу получаем $\omega_3 = \omega_{30} = \mathrm{const}$. Предположим далее, что время удара мало по сравнению с продолжительностью $2\pi/\omega_{30}$ одного оборота. Тогда последовательность кратковременных ударных моментов можно представить с помощью функции Дирака $\delta(t)$ в виде

$$M(t) = \sum_{\nu} M_\nu \delta(t - t_\nu). \tag{3.136}$$

Здесь t_ν — время ν-го удара, а M_ν — мера его величины. Соответствующие выражения получаются и для величин $m(t)$, так что общее решение (3.129) мы можем теперь записать в следующей форме:

$$\omega^* = \omega_0^* e^{-ia\omega_{30}t} + \omega_{30}\int_0^t e^{-ia\omega_{30}(t-\tau)} \sum_{\nu} m_\nu^* \delta(\tau - t_\nu)\, d\tau. \tag{3.137}$$

Каждый отдельный удар приводит к скачкообразному изменению мгновенной угловой скорости на величину

$$\Delta\omega_\nu = \omega_{30} m_\nu \int_{t_\nu - \varepsilon}^{t_\nu + \varepsilon} \delta(\tau - t_\nu)\, d\tau.$$

Введя единичную ступенчатую функцию

$$\mathbf{1}(t - t_\nu) = \int_0^t \delta(\tau - t_\nu)\, d\tau = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t < t_\nu, \\ 1 & \text{для} \quad t > t_\nu, \end{cases}$$

приведем общее решение (3.137) к такому виду:

$$\omega^* = \omega_0^* e^{-ia\omega_{30}t} + \omega_{30} \sum_{\nu} m_\nu^* \mathbf{1}(t - t_\nu)\, e^{-ia\omega_{30}(t - t_\nu)}. \tag{3.138}$$

Его можно трактовать как взаимное наложение собственных колебаний (нутаций), возбуждаемых отдельными толчками. Между каждыми двумя последовательными ударами вектор ω_i обходит часть конуса полодии, который в силу $M = 0$ представляет собой

круговой прямой конус, осью которого служит ось симметрии гироскопа. Каждый толчок может изменить угол при вершине конуса. Если эти изменения $\Delta\omega_\nu$ известны, то полодия (основание конуса полодии) может быть построена путем последовательного сопряжения дуг окружности. Вспомнив, кроме того, зависимость между углами при вершине подвижного и неподвижного аксоидов, мы можем построить также пространственную траекторию оси симметрии. Покажем это на одном примере.

Пусть поставлена задача погасить нутационные колебания жесткого космического корабля. Пусть в качестве источника момента имеются связанные с осями корабля реактивные сопла, которые создают ударные моменты того или иного направления относительно осей 1 и 2, перпендикулярных оси симметрии. Нутационные колебания будут ослабевать, если угол при вершине подвижного аксоида будет под действием толчков уменьшаться. Наиболее эффективно можно этого добиться, если ударные моменты будут прикладываться в те мгновения, когда вектор ω_i оказывается в главной плоскости 1-3 или 2-3. Эти моменты времени можно однозначно определить, используя сигнал измерителя угловой скорости, жестко связанного с корпусом (например, гиротахометра). К разбираемому случаю приложима следующая схема:

	ω_1	$\dot\omega_1$	ω_2	ω_2
$+M_1$			0	>0
$-M_1$			0	<0
$+M_2$	0	<0		
$-M_2$	0	>0		

В предположении одинаковых ударных моментов мы таким способом получим изображенную на рис. 3.34 полодию. При этом угол при вершине подвижного аксоида скачкообразно уменьшается до некоторого предельного значения, обусловленного величиной ударного момента. Промежутки времени между двумя последовательными ударами равны

$$\Delta t_s = \frac{\pi}{2a\omega_{30}} = \frac{\pi A}{2(A-C)\,\omega_{30}}. \qquad (3.139)$$

Для тел с эллипсоидом инерции, близким к сфере, они могут оказаться очень большими, во много раз превышая время одного оборота $2\pi/\omega_{30}$. Уже из этого видно, что при описанном нами способе гашения колебаний процесс демпфирования для тел, у которых $A \approx C$, значительно более продолжителен, чем для сильно вытянутых $(a \approx +1)$ или сильно сплюснутых $(a \approx -1)$ тел.

Движение оси симметрии тела (оси фигуры) в процессе гашения колебаний можно построить, используя зависимости для

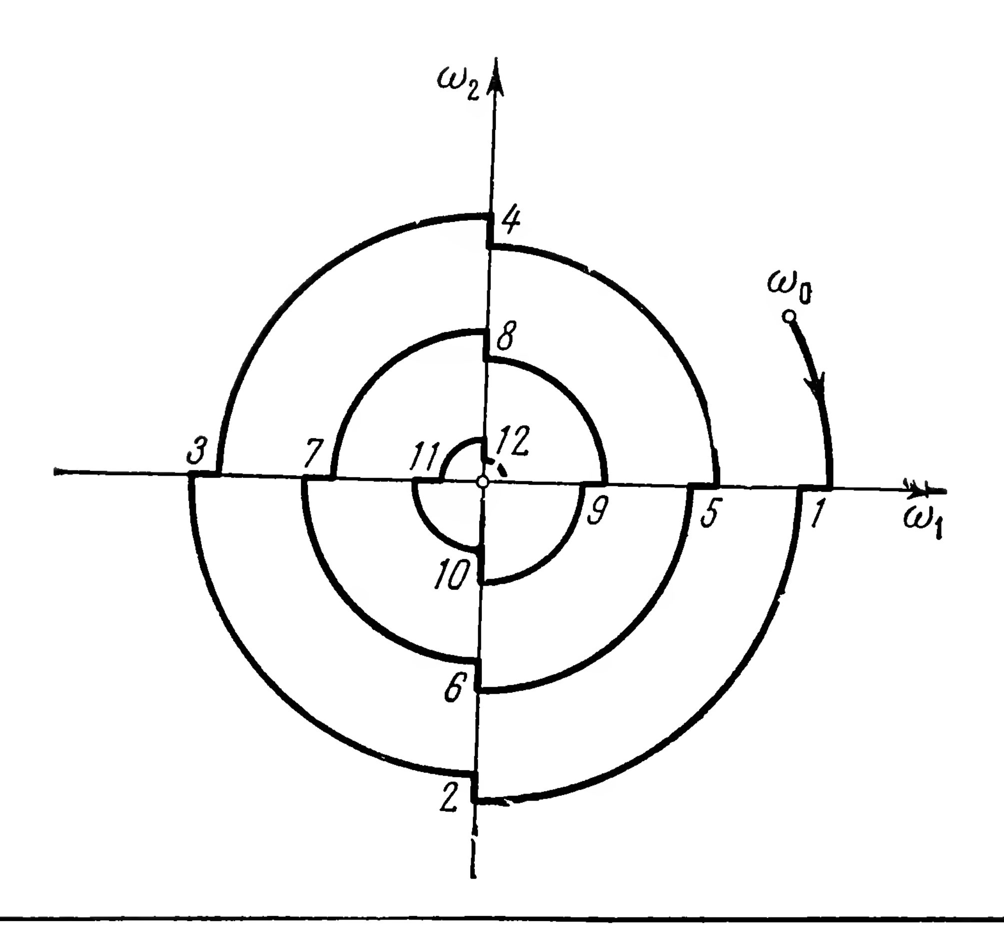


Рис. 3.34. Полодия при гашении нутационных колебаний с помощью ударных моментов.

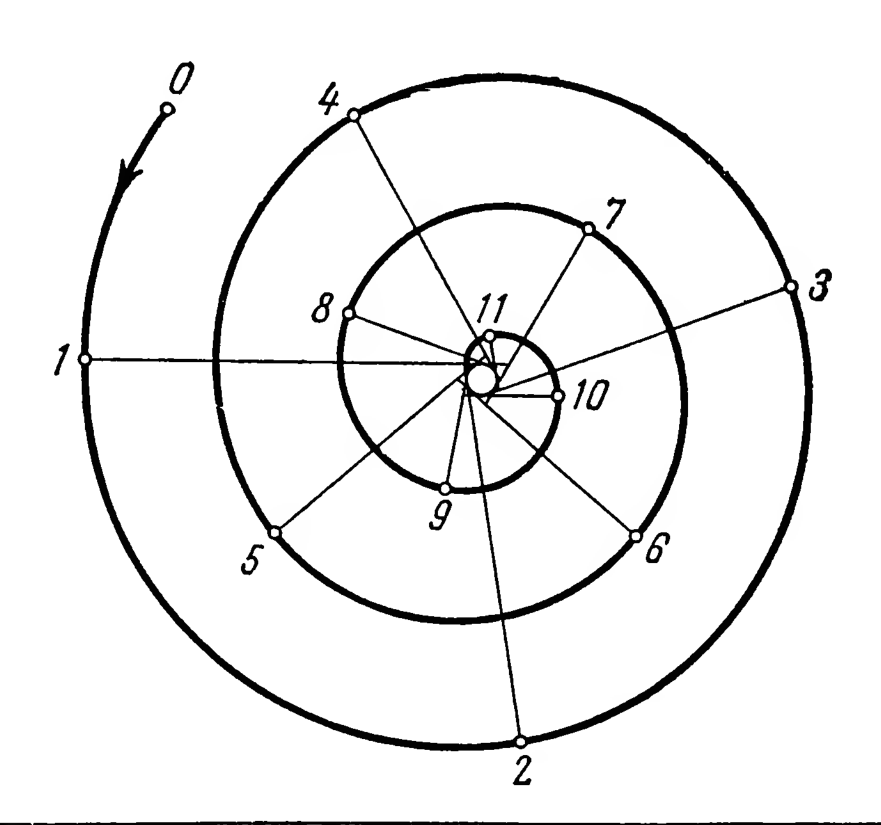


Рис. 3.35. Траектория оси фигуры при гашении нутационных колебаний с помощью ударных моментов при $a=0,9$.

углов μ и λ соответственно подвижного и неподвижного аксоидов (рис. 2.18 и 2.19).

Если иметь в виду мгновение, в которое $\omega_1 = \omega_{10}$ и $\omega_2 = 0$, то

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\omega_{10}}{\omega_{30}},$$

$$\operatorname{tg}(\mu+\lambda) = \frac{H_1}{H_{30}} = \frac{A\omega_{10}}{C\omega_{30}} = \frac{A}{C}\operatorname{tg}\mu,$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{(A-C)\,\omega_{10}\omega_{30}}{A\omega_{10}^2 + C\omega_{30}^2}.$$

На рис. 3.35 и 3.36 представлены построенные на основании этих формул траектории некоторой точки оси фигуры для различных a, соответствующие полодии рис. 3.34. Эти рисунки вновь подтверждают, что гашение колебаний тем действеннее, чем больше эллипсоид инерции отличается от сферы. Это в равной мере относится как к вытянутым, так и к сплюснутым телам. Слабый демпфирующий эффект для тел, эллипсоид инерции которых близок к сфере,

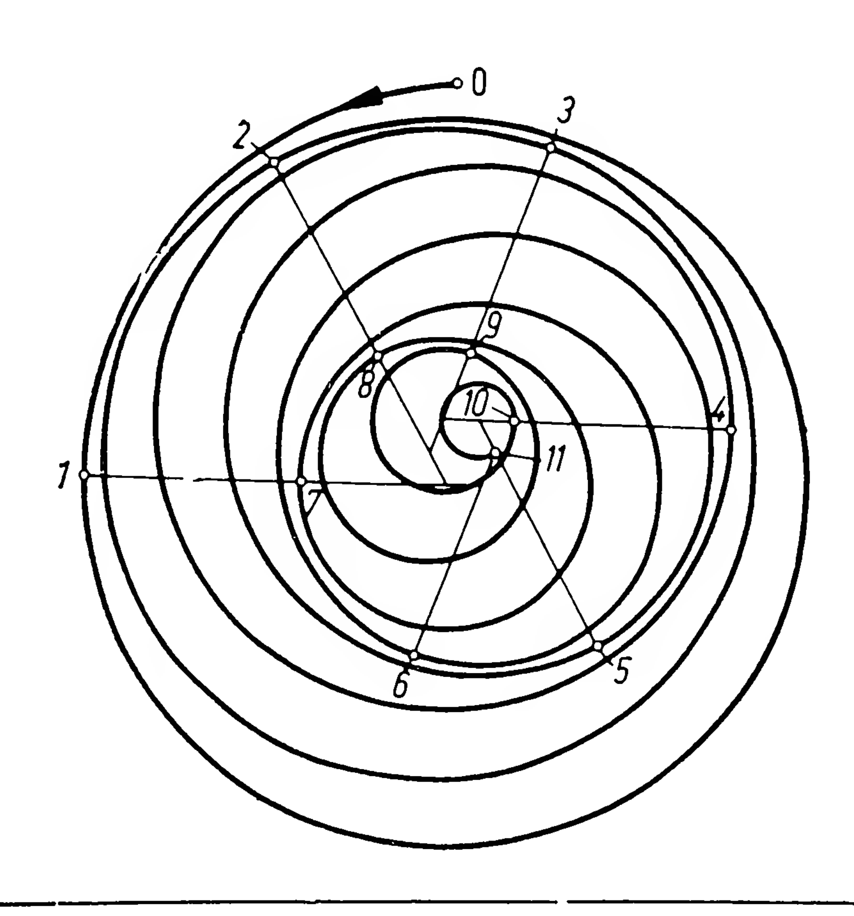


Рис. 3.36. Траектория оси фигуры при гашении нутационных колебаний с помощью ударных моментов при $a=0{,}3$.

можно объяснить тем, что в этом случае вследствие медленного движения по полодии связанные с телом генераторы момента лишь через значительные интервалы времени оказываются в положении, благоприятном для демпфирования.

Аналогично тому, как это было сделано выше при исследовании гашения нутационных колебаний, можно решить весьма важный для космонавтики вопрос о повороте оси фигуры на заданный угол. И в этом случае оптимальное решение может быть найдено на основе разумного использования нутационных колебаний, возбуждаемых ударными моментами.

3.4.4. Несимметричный гироскоп с самовозбуждением. Решение, полностью охватывающее движение несимметричного гироскопа с самовозбуждением, до сих пор найти не удалось. Но уже исследовано настолько большое число частных вопросов, что это позволяет получить хорошее представление о возможных видах его движения. Некоторые из этих результатов мы рассмотрим ниже.

a) *Перманентное вращение.* Прежде всего представляет интерес вопрос о возможности стационарного вращения, т. е. вращения с постоянной угловой скоростью вокруг оси, равно неподвижной

как в теле, так и в пространстве. В данном случае в уравнении движения

$$\frac{d'H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = \Theta_{ij}\frac{d'\omega_j}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j\Theta_{kl}\omega_l = M_i \qquad (3.140)$$

надо положить $d'\omega_j/dt = 0$. Остается уравнение

$$M_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = \varepsilon_{ijk}\omega_j\Theta_{kl}\omega_l. \qquad (3.141)$$

Из него следует, что каждое заданное ω_i однозначно определяет соответствующий момент M_i. Таким образом, тело можно заставить совершать стационарное вращение вокруг любой оси. При вращении вокруг главной оси $M_i = 0$, в любом другом случае момент отличен от нуля и перпендикулярен векторам H_i и ω_i. Наоборот, относительно ω_i уравнение (3.141) разрешимо, вообще говоря, не всегда. Это означает, что не всякий произвольно заданный момент M_i способен поддерживать стационарное вращение. Для того чтобы это показать, рассмотрим уравнение (3.141) в проекциях

$$\begin{aligned}(B-C)\,\omega_2\omega_3 &= -M_1,\\ (A-C)\,\omega_3\omega_1 &= +M_2,\\ (A-B)\,\omega_1\omega_2 &= -M_3.\end{aligned} \qquad (3.142)$$

При предположении $A > B > C$ величины, заключенные в скобки, положительны. Из этого непосредственно видно, что момент, вектор которого лежит в главной плоскости, но не совпадает с главной осью, не может поддерживать стационарное вращение. Если, например, $M_1 = 0$, то, согласно (3.142/1), какая-либо из переменных — ω_2 или ω_3 — должна обратиться в нуль. Но и то и другое стало бы возможным лишь при одновременном обращении в нуль какой-либо другой составляющей момента. Рассуждая аналогично, можно убедиться в том, что уравнения (3.142) не допускают решения относительно составляющих ω в случае, когда все составляющие момента отрицательны, потому что при этом невозможно удовлетворить расстановке знаков в (3.142).

b) *Вращение вокруг оси тела.* В качестве следующего разберем вопрос о том, как следует формировать возбуждающий момент, если требуется вызвать или поддерживать вращение вокруг оси тела, пусть и не с постоянной угловой скоростью. Подставляя

$$\omega_i = \omega e_i^{\omega},$$

где e_i^{ω} — единичный вектор в направлении ω (при этом $d'e_i^{\omega}/dt = 0$), в (3.140), находим

$$\Theta_{ij}e_j^{\omega}\frac{d'\omega}{dt} + \omega^2\varepsilon_{ijk}e_j^{\omega}\Theta_{kl}e_l^{\omega} = M_i. \qquad (3.143)$$

Если ω_i совпадает с одной из главных осей, то с ней должен совпадать и M_i, поскольку второе слагаемое в левой части (3.143) обращается в нуль. Умножая (3.143) скалярно на e_i^ω, получаем с этой оговоркой

$$e_i^\omega \Theta_{ij} e_j^\omega \frac{d'\omega}{dt} = M_i e_i^\omega, \quad \text{или} \quad \Theta^\omega \frac{d\omega}{dt} = M,$$

где Θ^ω — момент инерции относительно оси вращения. Если вектор ω_i не совпадает с главной осью, то M_i составляется из двух векторов, один из которых направлен по неподвижному относительно тела вектору кинетического момента, а другой перпендикулярен к нему и тоже неподвижен относительно тела. Первый из них пропорционален $d\omega/dt$, а второй ω^2. Далее, видно, что вектор момента, призванного поддерживать заданное вращение вокруг оси тела, должен лежать в неподвижной относительно тела плоскости. В частном случае M_i может даже совпадать с осью тела, а именно тогда, когда соблюдается соотношение

$$\dot{\omega} = \varkappa \omega^2,$$

где $\varkappa$ — произвольный постоянный вещественный коэффициент. Решение этого дифференциального уравнения таково:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \varkappa \omega_0 t}. \tag{3.144}$$

График функции $\omega(t)$ представляет собой гиперболу, с помощью которой можно описать процесс разгона ($\varkappa > 0$) или торможения ($\varkappa < 0$) тела. Соответствующий момент можно найти из уравнения (3.143). Равенство (3.144) показывает, что для того, чтобы, используя описанный прием, с помощью момента, направленного вдоль оси тела, затормозить, например, до состояния $\omega = 0$ вращающийся вокруг своей главной оси космический корабль, потребовалось бы бесконечно большое время.

c) Осуществление самовозбуждения с помощью постоянного момента, направленного вдоль главной оси. В заключение покажем, как найти точное решение в случае возбуждения постоянным моментом, направленным вдоль главной оси. Снова положим $A > B > C$ и примем $M_1 = M_{10}$, $M_2 = M_3 = 0$. Тогда уравнения Эйлера примут вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= M_{10}, \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= 0, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.145}$$

Производя замену переменной $d\alpha = \omega_1 dt$, $\dot{\omega} = \omega'\omega_1$ подобно тому, как мы поступали в (3.126), придаем двум последним уравнениям следующую форму:

$$\begin{aligned} B\omega_2' + (A - C)\,\omega_3 &= 0, \\ C\omega_3' - (A - B)\,\omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.146}$$

Общее решение этой системы для начальных условий $\omega_2 = \omega_{20}$, $\omega_3 = \omega_{30}$:

$$\omega_2 = \omega_{20} \cos \nu\alpha - \sqrt{\frac{(A-C)\,C}{(A-B)\,B}}\,\omega_{30} \sin \nu\alpha,$$

$$\omega_3 = \omega_{30} \cos \nu\alpha + \sqrt{\frac{(A-B)\,B}{(A-C)\,C}}\,\omega_{20} \sin \nu\alpha, \qquad (3.147)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{(A-B)(A-C)}{BC}}.$$

Подставив эти величины в (3.145/1), получим

$$\dot{\omega}_1 = \frac{M_{10}}{A} + \frac{B-C}{A}\,\omega_2(\alpha)\,\omega_3(\alpha) = F(\alpha).$$

Умножив последнее на $\omega_1 = d\alpha/dt$, найдем

$$\dot{\omega}_1\omega_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1^2}{2}\right) = F(\alpha)\frac{d\alpha}{dt},$$

или после интегрирования

$$\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\omega_{10}^2 + 2\int F(\alpha)\,d\alpha}. \qquad (3.148)$$

Повторное интегрирование дает

$$t = t_0 + \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\omega_{10}^2 + 2\int F(\alpha)\,d\alpha}} = t(\alpha). \qquad (3.149)$$

Подставив в (3.148) и (3.147) обратную функцию $\alpha = \alpha(t)$, мы придем к искомому решению $\omega_i(t)$. В отношении различных подслучаев, которые необходимо рассмотреть при анализе этого решения, мы ограничимся ссылкой на обстоятельное исследование Граммеля [24].

3.4.5. Самовозбуждение, зависящее от угловой скорости. Наряду с уже рассмотренным самовозбуждением постоянными или зависящими от времени моментами в практических приложениях встречается самовозбуждение моментами, зависящими от угловой скорости. Происхождение таких моментов связано с причинами двоякого рода: с одной стороны, они возникают как моменты сил сопротивления у гироскопов, находящихся в жидкой или газообразной среде, с другой стороны, сервомомент у гироскопов с регулируемым числом оборотов является функцией рассогласования между заданной и фактической угловыми скоростями. Рассмотрим по одному примеру каждого из этих случаев.

а) Симметричный гироскоп в вязкой среде. Полагая $A = B$ и принимая, что момент сопротивления зависит только от проекции вектора угловой скорости на данную ось, а удельные моменты c

сопротивления относительно двух равноправных экваториальных осей одинаковы, приходим к следующей форме уравнений движения:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_2\omega_3 &= M_1 - c_1\omega_1, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= M_2 - c_1\omega_2, \\ C\dot{\omega}_3 \qquad\qquad\qquad &= M_3 - c_3\omega_3. \end{aligned} \tag{3.150}$$

Из третьего уравнения сразу находим

$$\omega_3 = \omega_{30}\exp\left(-(c_3/C)\,t\right) + (1/C)\int_0^t M_3(\tau)\exp\left[-(c_3/C)(t-\tau)\right]d\tau, \tag{3.151}$$

а два первых уравнения объединяем в одно комплексное

$$A\dot{\omega}^* + i(A - C)\,\omega_3\omega^* = M^* - c_1\omega^*,$$

где $\omega^* = \omega_1 + i\omega_2$ и $M^* = M_1 + iM_2$, или

$$\dot{\omega}^* + p(t)\,\omega^* = m^*(t), \tag{3.152}$$

где

$$p(t) = \frac{c_1}{A} + i\,\frac{A - C}{A}\,\omega_3(t), \qquad m^*(t) = \frac{1}{A}M^*(t).$$

Общим решением уравнения (3.152) будет

$$\omega^* = \exp\left[-\int_0^t p(\tau)\,d\tau\right]\left\{\omega_0^* + \int_0^t m^*(\tau)\exp\left[\int_0^\tau p(\sigma)\,d\sigma\right]d\tau\right\}. \tag{3.153}$$

Разложив его на действительную и мнимую части и присоединив (3.151), получим все три составляющие ω_i. В отношении анализа различных возможных здесь случаев укажем на более подробные результаты, полученные Лейманисом [7, гл. 10.5].

b) *Вращение несимметричного гироскопа вокруг главной оси.* Влияние зависящего от угловой скорости движущего момента на поведение несимметричного гироскопа было учтено Граммелем [26], исходившим из формулы

$$M_1 = c\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right). \tag{3.154}$$

Здесь ω_0 — заданная величина, к которой должна приближаться ω_1. Знак момента всегда таков, что последний стремится уменьшить разность $\omega_1 - \omega_0$. Если считать, что моменты относительно осей 2 и 3 равны нулю, то уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= c\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right), \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= 0, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Эту систему можно решать аналогично тому, как мы это делали в случае возбуждения постоянным моментом (3.145). Произведя замену переменной $d\alpha = \omega_1 dt$, мы можем привести два последних уравнения (3.155) к виду (3.146), решением которого является (3.147). Подставив затем значения ω_2 и ω_3 в первое уравнение (3.155), получим

$$A\dot{\omega}_1 + c\omega_1^2 = c\omega_0^2 + (B - C)\,\omega_2(\alpha)\,\omega_3(\alpha).$$

Приняв во внимание, что

$$\dot{\omega}_1 = \frac{d\omega_1}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \omega_1 \frac{d\omega_1}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\omega_1^2}{2}\right),$$

мы можем преобразовать полученное уравнение в линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно ω_1^2:

$$A\,\frac{d}{d\alpha}(\omega_1^2) + 2c\omega_1^2 = 2c\omega_0^2 + 2(B - C)\,\omega_2(\alpha)\,\omega_3(\alpha). \qquad (3.156)$$

Его решением будет

$$\omega_1^2 = \exp\left[-(2c/A)\,\alpha\right] \times$$
$$\times \left\{ \omega_{10}^2 + \int_0^{\alpha} \left[2c\omega_0^2 + 2(B - C)\,\omega_2(\beta)\,\omega_3(\beta)\right] \exp\left[(2c/A)\,\beta\right] d\beta \right\}. \qquad (3.157)$$

Таким образом, все три составляющие ω_i как функции времени найдены. Саму вспомогательную величину α можно получить последующим интегрированием из $\omega_1 = d\alpha/dt$:

$$t = t_0 + \int \frac{d\alpha}{\omega_1(\alpha)} = t(\alpha).$$

Образовав обратную функцию, мы найдем $\alpha(t)$. Получающиеся здесь интегралы в общем случае не приводят к табулированным функциям. Однако представление о возможных видах движения можно получить путем качественного анализа функций от α, фигурирующих в (3.156) (см., например, Лейманис [7, § 11]).

Укажем еще на одну важную и несколько неожиданную особенность: система уравнений (3.155) допускает два совершенно различных частных решения, где составляющие ω постоянны, а именно:

1) $\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0,$

2) $\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \quad \omega_3 = \omega_{30},$ (3.158)

причем $\omega_{20}\omega_{30} = \dfrac{c}{C - B}\,\omega_0^2.$

Первое из приведенных решений соответствует конечному состоянию, которое является целью регулирования. Второе решение означает стационарное вращение вокруг оси, лежащей в

плоскости 2-3. Это вращение может поддерживаться моментом привода гироскопа, направленным по оси 1. Но в таком случае момент больше не служит в качестве движущего вокруг оси 1, так что желаемая скорость собственного вращения не может быть достигнута. Хотя, как показал Граммель, решение (3.158/2) неустойчиво, тем не менее для определенных начальных условий не происходит перехода к первому решению. Движение представляет собой вращение, вектор угловой скорости которого колеблется около оси 2, но желаемое состояние $\omega_1 = \omega_0$ не наступает.

3.5. Гироскоп с вынужденным возбуждением

Если моменты, входящие в уравнения гироскопа (1.83) или (1.84), имеют своей причиной внешние воздействия и если их составляющие являются известными функциями времени в системе координат, не связанной с телом, то обыкновенно говорят, что мы имеем дело с *гироскопом с вынужденным возбуждением*. При этом большей частью представляют интерес периодические функции возбуждения, хотя исследовались также и функции случайного характера. Роль последних существенна в случае применения гироскопов в навигационных приборах для судовождения, аэронавигации и космонавтики, поскольку волнение и шквалистый ветер, которые могут привести к вынужденному возбуждению гироскопических приборов, можно рассматривать как случайные функции.

В качестве первого примера рассмотрим вынужденное движение тяжелого гироскопа, вызванное колебаниями его точки подвеса. Если b_i — ускорение точки подвеса, то момент, действующий при этом на гироскоп, может быть определен точно так же, как в разобранном выше случае тяжелого гироскопа. Нужно только вместо ускорения силы тяжести g_i подставить разность $g_i - b_i$. Таким образом, из (3.26) получим

$$M_i = m\varepsilon_{ijk}s_j(g_k - b_k).$$

Обозначим $s_i = sa_{i3}$, где a_{i3} — единичный вектор в направлении оси симметрии тела. С другой стороны, мы можем написать

$$g_i - b_i = -[b_1a_{1i} + b_2a_{2i} + (g + b_3)a_{3i}],$$

где a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} — неподвижные единичные векторы, причем a_{3i} направлен вертикально вверх. Отсюда получаем момент

$$M_i = -ms\varepsilon_{ijk}a_{j3}[b_1a_{1k} + b_2a_{2k} + (g + b_3)a_{3k}]. \tag{3.159}$$

Совершенно аналогичное выражение можно получить в примере, заимствованном из области молекулярной физики. Здесь нас может интересовать поведение вращающихся магнитно поляризованных частиц, которые находятся в изменяющемся во времени внеш-

нем магнитном поле. Если магнитный момент частицы рассматривать как вектор μ_i в направлении намагниченности частицы и если h_i — вектор напряженности внешнего магнитного поля, то на частицу (т. е. на гироскоп) накладывается момент

$$M_i = -\varepsilon_{ijk}\mu_j h_k. \tag{3.160}$$

Разложим напряженность поля на постоянную и переменную составляющие:

$$h_i = h_i^0 + h_i^s.$$

Примем, что ось 3 неподвижной системы координат 1, 2, 3 направлена по постоянной составляющей напряженности. Тогда можно написать

$$h_i = h_1^s a_{1i} + h_2^s a_{2i} + (h^0 + h_3^s)\, a_{3i}.$$

Приняв далее направление намагниченности частицы за направление оси 3′, получим $\mu_i = \mu a_{i3}$. Следовательно, результирующий момент принимает вид

$$M_i = -\mu\varepsilon_{ijk}a_{j3}\left[h_1^s a_{1k} + h_2^s a_{2k} + (h^0 + h_3^s)\, a_{3k}\right], \tag{3.161}$$

который совершенно аналогичен (3.159).

3.5.1. Возбуждение переменным полем, параллельным постоянному. Будем рассматривать поле неизменного направления, для которого $h_1^s = h_2^s = 0$ и

$$h_i = (h^0 + h_3^s)\, a_{3i} = h^0(1 + \gamma\cos\omega t)\, a_{3i}. \tag{3.162}$$

Модуляцию здесь отражает функция косинуса, а глубина модуляции обозначена через $\gamma = h_3^s/h^0$. Для эйлерова угла ϑ, показанного на рис. 3.37, имеем

$$\sin\vartheta = |\,\varepsilon_{ijk}a_{j3}a_{3k}\,|,$$

и, таким образом, значение момента (3.161) равно

$$M = \mu h^0(1 + \gamma\cos\omega t)\sin\vartheta. \tag{3.163}$$

В дальнейшем ограничимся случаем симметричного гироскопа ($A = B$) и предположим, что ось 3′ совпадает с осью симметрии. При этих посылках выведенные ранее уравнения (1.90) могут быть непосредственно приложены к этому случаю. Ввиду $M_\varphi = 0$ из (1.90/3) следует

$$\frac{d}{dt}[C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta)] = 0,$$

или

$$C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta) = C\omega_{30} = \text{const}. \tag{3.164}$$

Вследствие $M_\psi = 0$ и $M_\vartheta = -\mu h^0 (1 + \gamma \cos \omega t) \sin \vartheta$ из двух других уравнений получаем

$$A\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C\omega_{30} \cos \vartheta = H_0 = \text{const}, \tag{3.165}$$

$$A\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + C\omega_{30}\dot{\psi} \sin \vartheta = -\mu h^0 (1 + \gamma \cos \omega t) \sin \vartheta. \tag{3.166}$$

Аналогично случаю классического тяжелого гироскопа равенства (3.164) и (3.165) выражают то обстоятельство, что составляющие

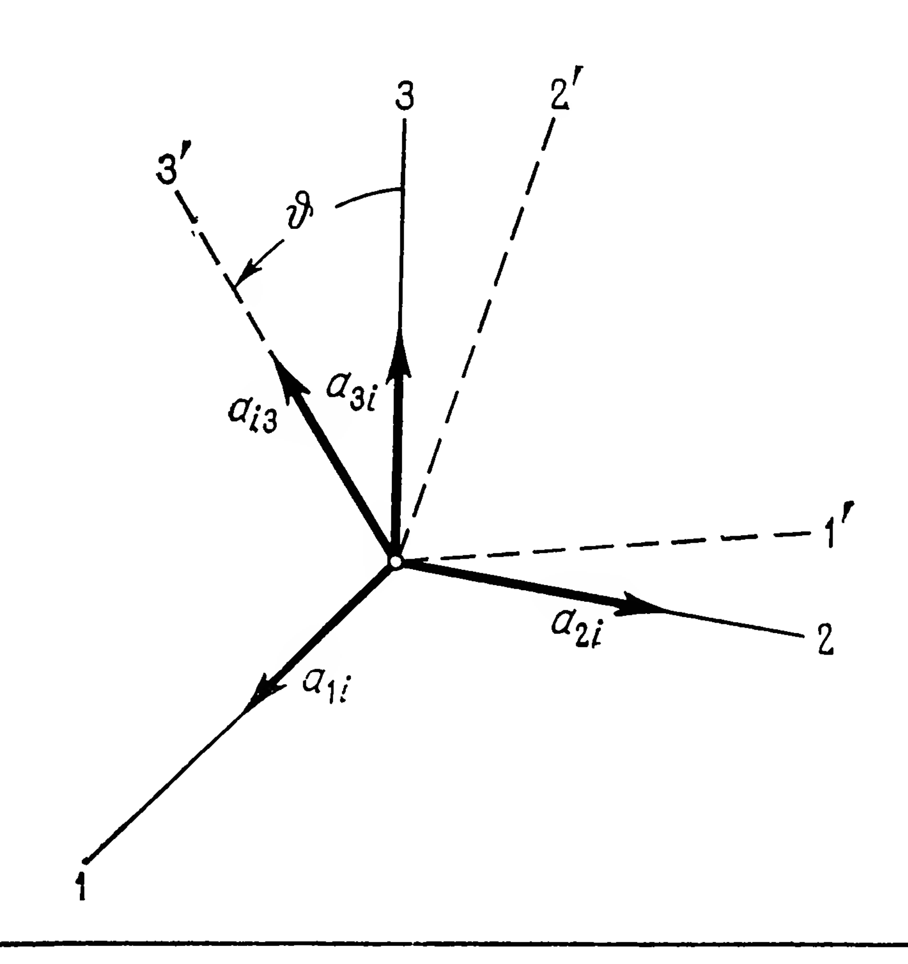


Рис. 3.37. К расчету гироскопа с вынужденным возбуждением.

кинетического момента по оси симметрии 3′ и по неподвижной оси 3 постоянны. При $\gamma = 0$ мы возвращаемся к уже рассмотренному выше тяжелому гироскопу.

Для выяснения влияния функции возбуждения рассмотрим возмущенное движение относительно регулярной прецессии. При $\gamma = 0$ уравнения (3.164)—(3.166) имеют частное решение

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \tag{3.167}$$

причем, согласно (3.58), $\dot{\varphi}_0 = \omega_{30} - \dot{\psi}_0 \cos \vartheta_0$. Рассмотрим теперь решения для возмущенного движения

$$\vartheta = \vartheta_0 + x, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + y, \quad \gamma \neq 0, \tag{3.168}$$

где x, y, γ — малые первого порядка. Поскольку $\dot{\varphi}$ нас не интересует, мы в дальнейшем не будем принимать ее во внимание (если потребуется, то ее потом можно найти из (3.164)). Подставляя (3.168) в (3.165) и (3.166) и опуская при этом величины выше

первого порядка малости, получаем линейную систему уравнений в вариациях

$$A\ddot{x} + \left(C\omega_{30}\dot{\psi}_0 \cos\vartheta_0 - A\dot{\psi}_0^2 \cos 2\vartheta_0 + \mu h^0 \cos\vartheta_0\right) x +$$
$$+ \left(C\omega_{30} \sin\vartheta_0 - A\dot{\psi}_0 \sin 2\vartheta_0\right) y = -\mu h^0 \gamma \sin\vartheta_0 \cos\omega t, \quad (3.169)$$
$$\left(A\dot{\psi}_0 \sin 2\vartheta_0 - C\omega_{30} \sin\vartheta_0\right) x + A \sin^2\vartheta_0 y = 0.$$

Исключая из этих уравнений y, находим

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\frac{\mu h^0 \gamma \sin\vartheta_0}{A} \cos\omega t, \quad (3.170)$$

где

$$\nu^2 = \left(\frac{C\omega_{30}}{A}\right)^2 - 3\frac{C\omega_{30}}{A}\dot{\psi}_0 \cos\vartheta_0 + \dot{\psi}_0^2 (2 + \cos 2\vartheta_0) + \frac{\mu h^0}{A} \cos\vartheta_0.$$

Общее решение уравнения (3.170) слагается из собственных колебаний с частотой ν и вынужденных с частотой ω. Мы можем написать

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Theta \cos(\nu t + \delta) - \frac{\mu h^0 \gamma \sin\vartheta_0}{A(\nu^2 - \omega^2)} \cos\omega t, \quad (3.171)$$

где Θ, δ — постоянные интегрирования. Величина y, а следовательно, и $\dot{\psi}$ легко находится из (3.169/2). Результат (3.171) можно толковать как наложение регулярной прецессии ($\vartheta = \vartheta_0$), нутационных колебаний (сообразно определенным начальным условиям) и вынужденных колебаний. То, что частоту ν позволительно принимать за частоту нутации, следует из формул для быстровращающегося гироскопа:

$$\frac{C\omega_{30}}{A} \approx \omega_N, \quad \frac{\mu h^0}{A} \approx \dot{\psi}\omega_N, \quad \dot{\psi} \ll \omega_N,$$

что означает $\nu \approx \omega_N$. Выражение для амплитуды вынужденной составляющей в (3.171) указывает на возможность резонанса при равенстве собственной и вынужденной частот.

Результат (3.171) является решением первого приближения в смысле теории малых колебаний. Уточнение расчета, в особенности при значениях γ, которые уже нельзя полагать малыми первого порядка, может привести к качественно новым явлениям, подобным тем, которые были найдены для обычных физических маятников с колеблющейся точкой подвеса и наблюдались экспериментально. Не вдаваясь в подробности более полной теории, наметим здесь лишь удобную для расчета методику.

Вычислив из (3.165) значение $\dot{\psi}$ и подставив его в (3.166), получим

$$A\ddot{\vartheta} + \left[C\omega_{30}\frac{H_0 - C\omega_{30}\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} - A\left(\frac{H_0 - C\omega_{30}\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\right)^2 \cos\vartheta +\right.$$
$$\left. + \mu h^0 (1 + \nu\cos\omega t)\right] \sin\vartheta = 0, \quad (3.172)$$

или

$$\ddot{\vartheta} = F(\vartheta, t).$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение с периодическим коэффициентом можно исследовать с помощью формулы Фурье

$$\vartheta = \vartheta_0 + \sum_n d_n e^{in\omega t}. \qquad (3.173)$$

Вычисляя по методу итераций последующие приближения, подобно тому как это было выполнено Вайденгаммером [27], можно обнаружить во втором приближении два новых явления:

1. Некоторой средней угловой скорости прецессии $\dot{\psi}_0$ сопутствует несколько отличный от ϑ_0 средний угол ϑ_m при вершине конуса прецессии. Это соответствует отклонению положения равновесия маятника при колебаниях точки подвеса.

2. В результате колебаний возникает дополнительный направляющий момент, накладывающийся на момент от постоянного поля. Вследствие этого изменяются условия устойчивости для гироскопа с верхним расположением центра тяжести.

Оба названных явления удается обнаружить во втором приближении благодаря подстановке $g(1+\zeta\cos\vartheta_0)$ вместо ускорения силы тяжести g. Здесь ζ — безразмерный, обусловленный колебаниями параметр, который может быть выражен следующим образом:

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{\gamma^2\mu h^0}{2A\omega^2} & \text{при возбуждении периодическим переменным полем,} \\ \dfrac{a^2 m s\omega^2}{2gA} & \text{при периодических колебаниях с амплитудой } a \text{ точки подвеса тяжелого гироскопа.} \end{cases} \qquad (3.174)$$

3.5.2. Возбуждение поперечным переменным полем. Если составляющие ускорения b_1 и b_2 в (3.159) отличны от нуля, то для описания возможного движения целесообразнее вместо углов Эйлера воспользоваться кардановыми углами α, β, γ, определенными в п. 1.4.3*c*. Тем самым можно обойти неопределенность эйлеровых углов, возникающую при $\vartheta = 0$.

Мы можем воспользоваться непосредственно уравнениями движения (1.91). Так как, согласно (3.159), момент M_i не имеет составляющей по оси симметрии (ось 3′), то $M_\gamma = 0$, и из (1.91/3) следует

$$\omega_3 = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta = \omega_{30} = \text{const}. \qquad (3.175)$$

Тогда первые два уравнения упрощаются:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha}\cos^2\beta - A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin 2\beta + C\omega_{30}\dot{\beta}\cos\beta &= M_\alpha, \\ A\ddot{\beta} + A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - C\omega_{30}\dot{\alpha}\cos\beta &= M_\beta. \end{aligned} \qquad (3.176)$$

Моменты M_α и M_β можно найти, например, проектируя (3.159) на оси неподвижной системы координат. Соответствующие единичные векторы имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} a_{i3} &= (\sin\beta, \; -\sin\alpha\cos\beta, \; \cos\alpha\cos\beta), \\ a_{1i} &= (\; 1, \quad 0, \quad 0 \;), \\ a_{2i} &= (\; 0, \quad 1, \quad 0 \;), \\ a_{3i} &= (\; 0, \quad 0, \quad 1 \;). \end{aligned}$$

Подставив их в (3.159), получим

$$\begin{aligned} M_1 &= ms[(g + b_3)\sin\alpha\cos\beta + b_2\cos\alpha\cos\beta], \\ M_2 &= ms[(g + b_3)\sin\beta - b_1\cos\alpha\cos\beta], \\ M_3 &= -ms(b_1\sin\alpha\cos\beta + b_2\sin\beta). \end{aligned} \tag{3.177}$$

Из рис. 1.25 видно, что угол α — это поворот вокруг оси 1, а угол β — вокруг оси 2 (2°). Поэтому

$$\begin{aligned} M_\alpha &= M_1, \\ M_\beta &= M_2\cos\alpha + M_3\sin\alpha, \end{aligned}$$

или

$$M_\beta = ms[(g + b_3)\cos\alpha\sin\beta - b_1\cos\beta - b_2\sin\alpha\sin\beta]. \tag{3.178}$$

Подставляя, наконец, (3.178) в (3.176), получаем в общем виде уравнения движения в кардановых углах α и β. Найти общее решение этих нелинейных уравнений в явном виде невозможно. Поэтому мы ограничимся здесь исследованием случая малых углов α и β, тем более что уже при этом предположении удается выявить существенные особенности движения. Полагая $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$, мы приходим к линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + C\omega_{30}\dot{\beta} - ms(g + b_3)\,\alpha &= msb_2, \\ A\ddot{\beta} - C\omega_{30}\dot{\alpha} - ms(g + b_3)\,\beta &= -msb_1. \end{aligned} \tag{3.179}$$

Приведем их к одному уравнению в комплексной форме

$$A\ddot{x} - iC\omega_{30}\dot{x} - ms(g + b_3)\,x = -imsb^*, \tag{3.180}$$

где

$$x = \alpha + i\beta, \qquad b^* = b_1 + ib_2.$$

Найдем решение этого, пока еще весьма общего уравнения для двух частных функций ускорения.

а) Вращающееся возбуждающее поле, перпендикулярное постоянной составляющей. При $b_3 = 0$ уравнение (3.180) переходит в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и функцией возбуждения в правой части. При $b^* = 0$ уравнение становится однородным; оно позволяет найти собственные колебания.

Собственные частоты определяются корнями характеристического уравнения

$$A\lambda^2 - iC\omega_{30}\lambda - msg = 0,$$

именно

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = i\omega_N \\ \lambda_2 = i\omega_P\end{matrix}\right\} = i\,\frac{C\omega_{30}}{2A}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4mgsA/(C^2\omega_{30}^2)}\,\right]. \qquad (3.181)$$

Они соответствуют полученным выше значениям (3.60) для $\vartheta_0 = 0$. Собственные колебания могут быть вновь названы нутацией (ω_N) и прецессией (ω_P), потому что при высокой скорости собственного вращения мы получаем уже знакомые нам собственные частоты

$$\omega_N \approx \frac{C\omega_{30}}{A} \quad \text{и} \quad \omega_P \approx \frac{mgs}{C\omega_{30}}.$$

Теперь предположим, что возбуждение исходит от поля постоянной напряженности b^0, вращающегося с частотой ω:

$$b^* = b^0 e^{i\omega t}. \qquad (3.182)$$

В качестве решения уравнения (3.180) теперь получается наложение свободных и вынужденных колебаний в форме

$$x = k_1 e^{i\omega_N t} + k_2 e^{i\omega_P t} + Re^{i\omega t}, \qquad (3.183)$$

где k_1 и k_2 — постоянные интегрирования, а

$$R = i\,\frac{msb^0}{A\omega^2 - C\omega_{30}\omega + mgs} = i\,\frac{msb^0}{A(\omega - \omega_N)(\omega - \omega_P)}. \qquad (3.184)$$

График функции $R(\omega)$ представлен на рис. 3.38 для $s > 0$ (сплошная линия) и для $s < 0$ (штриховая линия). Имеются по крайней мере две резонансные точки: $\omega = \omega_N$ и $\omega = \pm\omega_P$. Отрицательные значения ω_P указывают на вращение поля против направления вращения гироскопа. Член в (3.183), представляющий вынужденные колебания, всегда имеет то же направление вращения, что и возбуждающее поле. В резонансных точках знак изменяется на обратный, т. е. происходит изменение фазы на угол π.

Комплексная величина x может рассматриваться как мера перемещения некоторой точки оси симметрии (вершины гироскопа). Однако она опережает это отклонение на 90°, так как поворот на угол α соответствует смещению вершины гироскопа в направлении отрицательной оси 2, а поворот на угол β — смещению в направлении положительной оси 1. Поэтому, исходя из (3.183), можно легко построить траектории вершины гироскопа при возможном движении; они являются эпициклоидами, составленными из трех отдельных круговых перемещений.

Интересно отметить, что при возбуждении с одной из резонансных частот (ω_N или ω_P) амплитуда не обязательно должна сильно возрастать, как того можно было бы ожидать, исходя из рис. 3.38.

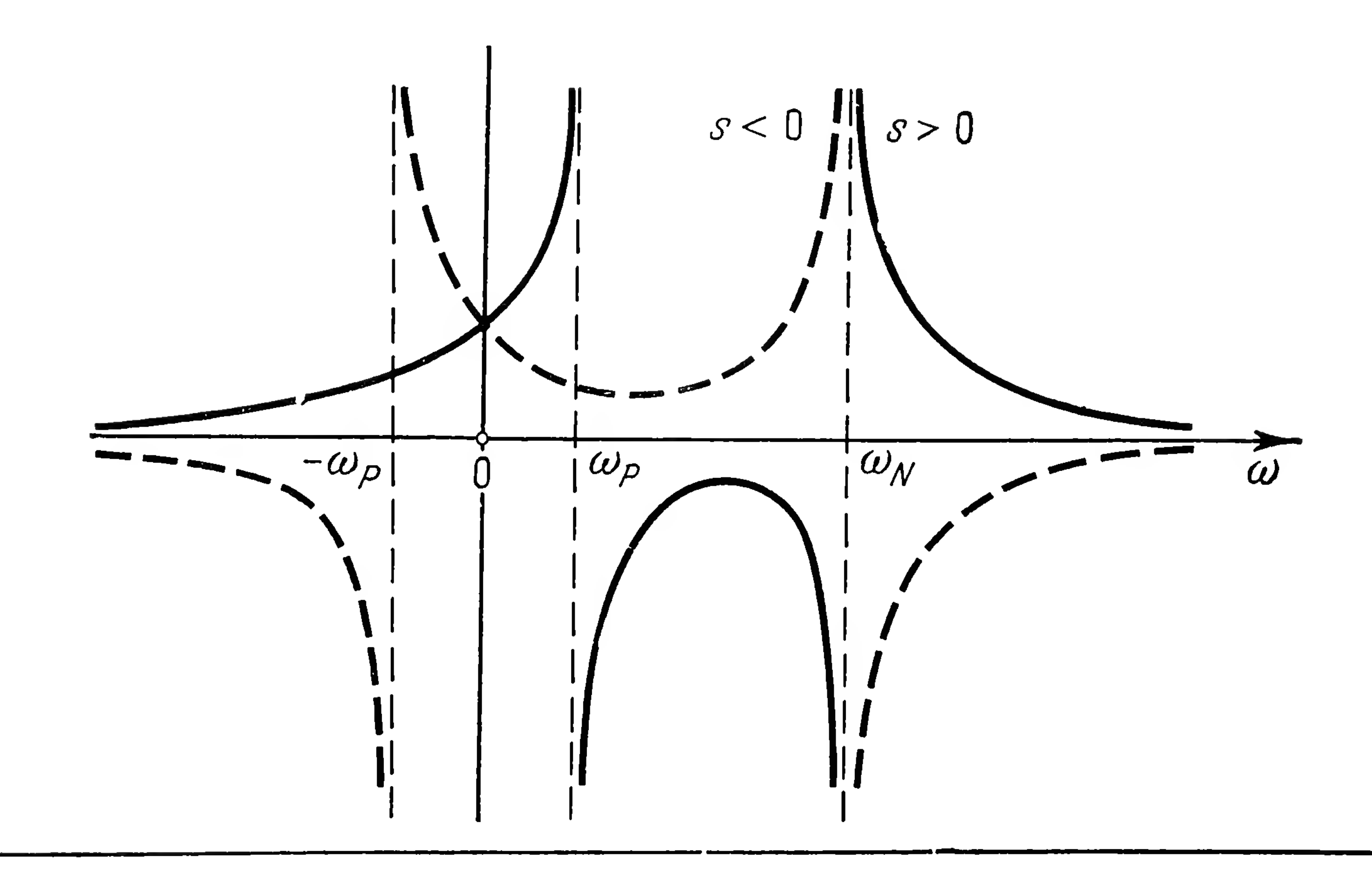


Рис. 3.38 Резонансные кривые для гироскопов с верхним ($s > 0$) и нижним ($s < 0$) расположением центра тяжести.

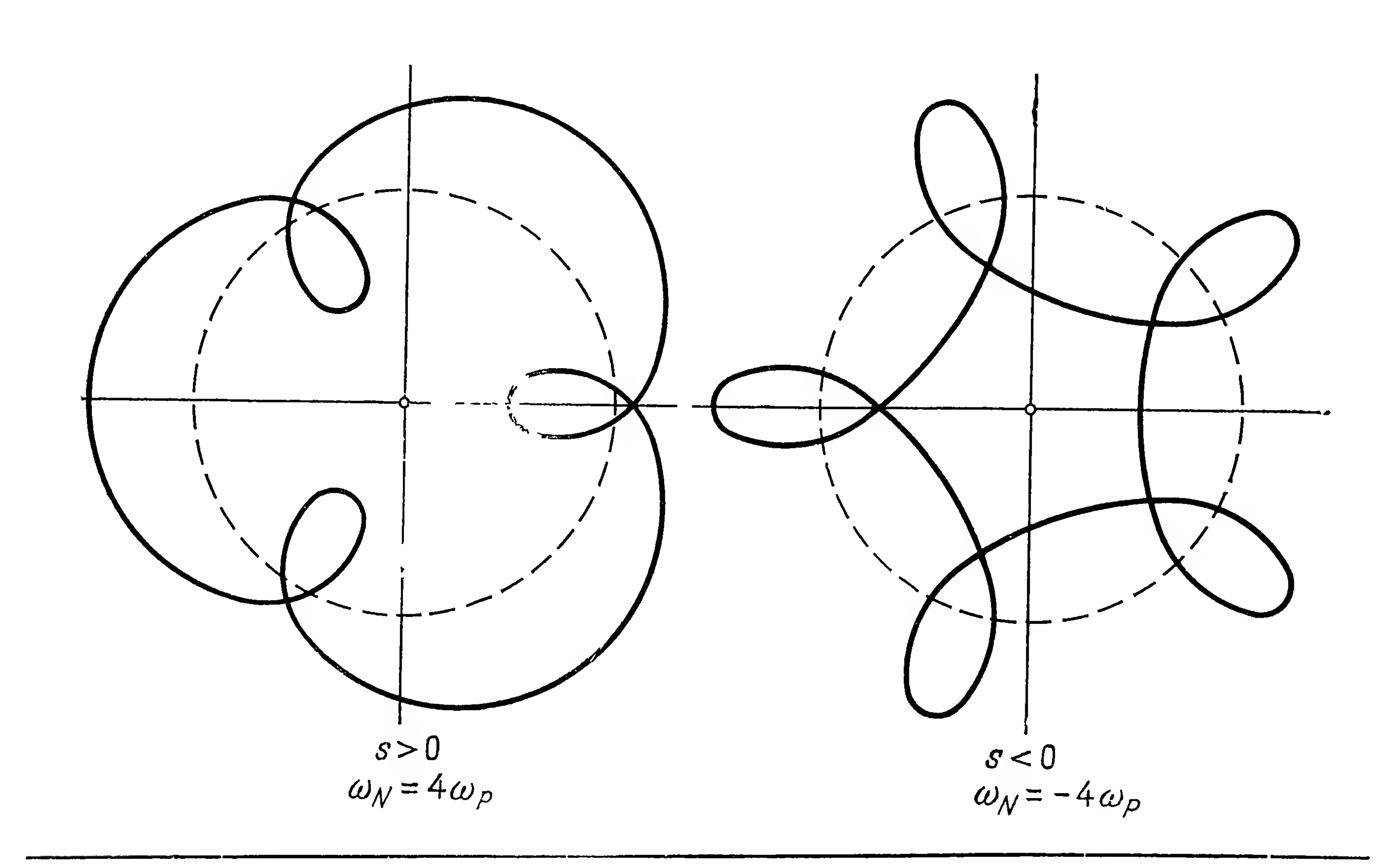


Рис. 3.39. Траектории вершины гироскопа при возбуждении с нутационной частотой $\omega_N = 4\omega_p$ для верхнего ($s > 0$) и нижнего ($s < 0$) расположения центра тяжести.

Пусть, например, $\omega = \omega_N$, $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = 0$. Тогда из (3.183) выводим для определения постоянных интегрирования следующие уравнения:

$$k_1 + k_2 = x_0 - R,$$

$$\omega_N k_1 + \omega_p k_2 = -\omega_N R,$$

решением которых будет

$$k_1 = -\frac{x_0\omega_P}{\omega_N - \omega_P} - R,$$

$$k_2 = \frac{x_0\omega_N}{\omega_N - \omega_P}.$$

Подставляя найденные величины в (3.183), получаем

$$x = \frac{x_0}{\omega_N - \omega_P}\left(\omega_N e^{i\omega_P t} - \omega_P e^{i\omega_N t}\right). \tag{3.185}$$

Но из этой формулы видно, что если нанести точки x на комплексную плоскость, то при $\omega_N \neq \omega_P$ получится лежащая в конечной области эпициклоида, представленная на рис. 3.39 для $\omega_N = 4\omega_P$ (гироскоп с верхним расположением центра тяжести) и для $\omega_N = -4\omega_P$ (гироскоп с нижним расположением центра тяжести).

Укажем еще, что при наличии диссипативных сил могут появиться качественно другие виды движения, например рассмотренные Вибелицем [28].

b) *Периодическое возбуждение вдоль оси* 1. В этом случае

$$b^* = b^0 \cos\omega t = b^0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2,$$

где b^0 — действительная величина, и при таком виде возбуждения мы получим решение уравнения движения (3.180) как результат наложения (суперпозиции):

$$x = k_1 e^{i\omega_N t} + k_2 e^{i\omega_P t} + R^{(+)} e^{i\omega t} + R^{(-)} e^{-i\omega t}, \tag{3.186}$$

где

$$R^{(+)} = i\,\frac{msb^0}{2(A\omega^2 - C\omega_{30}\omega + mgs)},$$

$$R^{(-)} = i\,\frac{msb^0}{2(A\omega^2 + C\omega_{30}\omega + mgs)}.$$

Графики этих функций от ω представлены на рис 3 40 для гироскопов с верхним и нижним расположением центра тяжести. Достаточно рассмотреть только положительные значения ω

Общее решение мы получаем в виде наложения четырех круговых движений в комплексной плоскости. Мы ограничимся лишь качественным исследованием составляющих вынужденного движения. Общая сводка его результатов приведена на рис. 3.41. В зависимости от интервала частот получаются траектории вершины гироскопа разного вида. Для очень малых ω $R^{(+)} \approx R^{(-)}$. В силу

$$R^{(+)} e^{i\omega t} + R^{(-)} e^{-i\omega t} = \left[R^{(+)} + R^{(-)}\right]\cos\omega t + i\left[R^{(+)} - R^{(-)}\right]\sin\omega t$$

это приводит к изменениям только угла α. При этом направление движения совпадает с направлением статического отклонения.

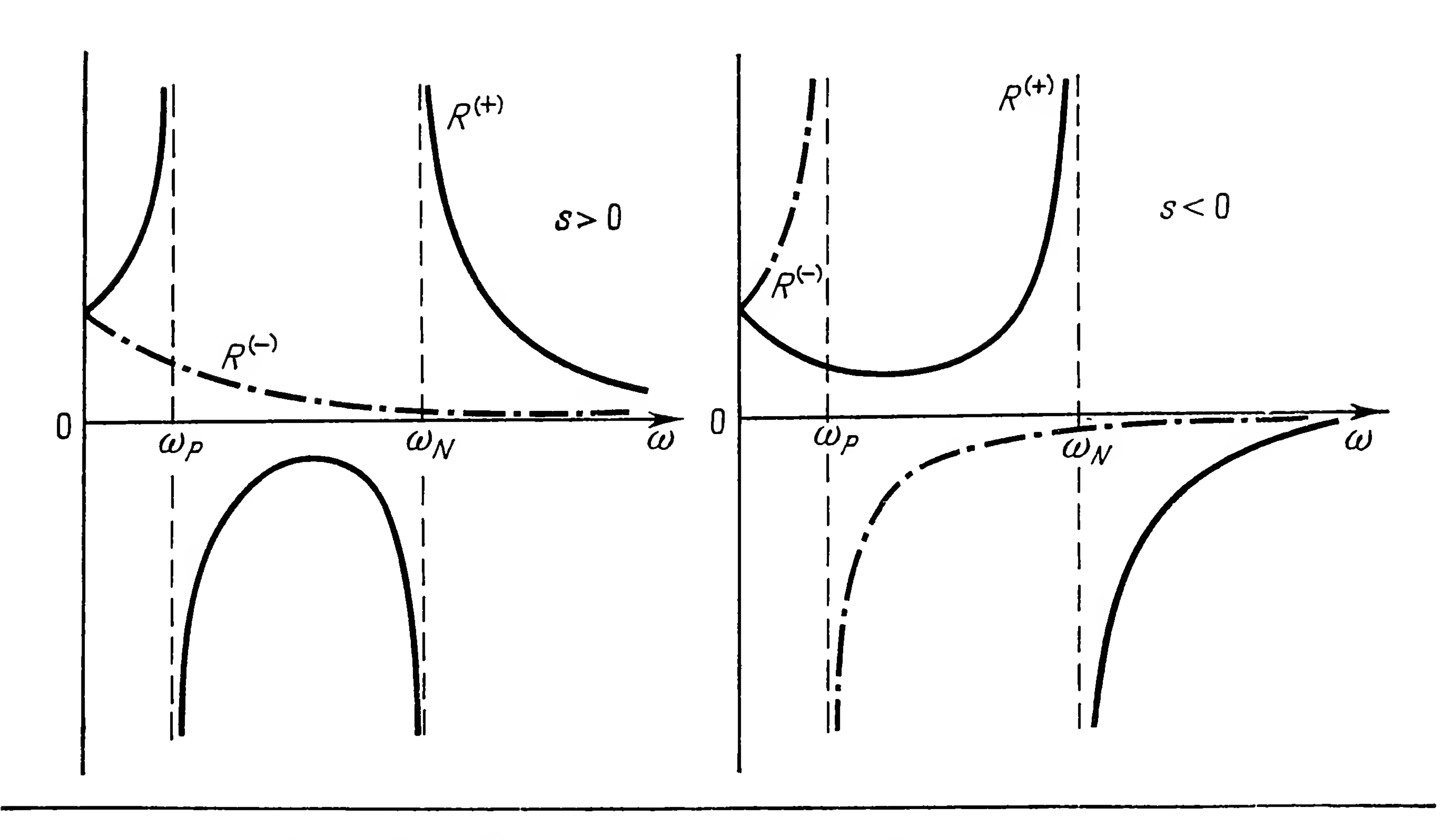


Рис. 3.40. Резонансные кривые при возбуждении по поперечной оси.

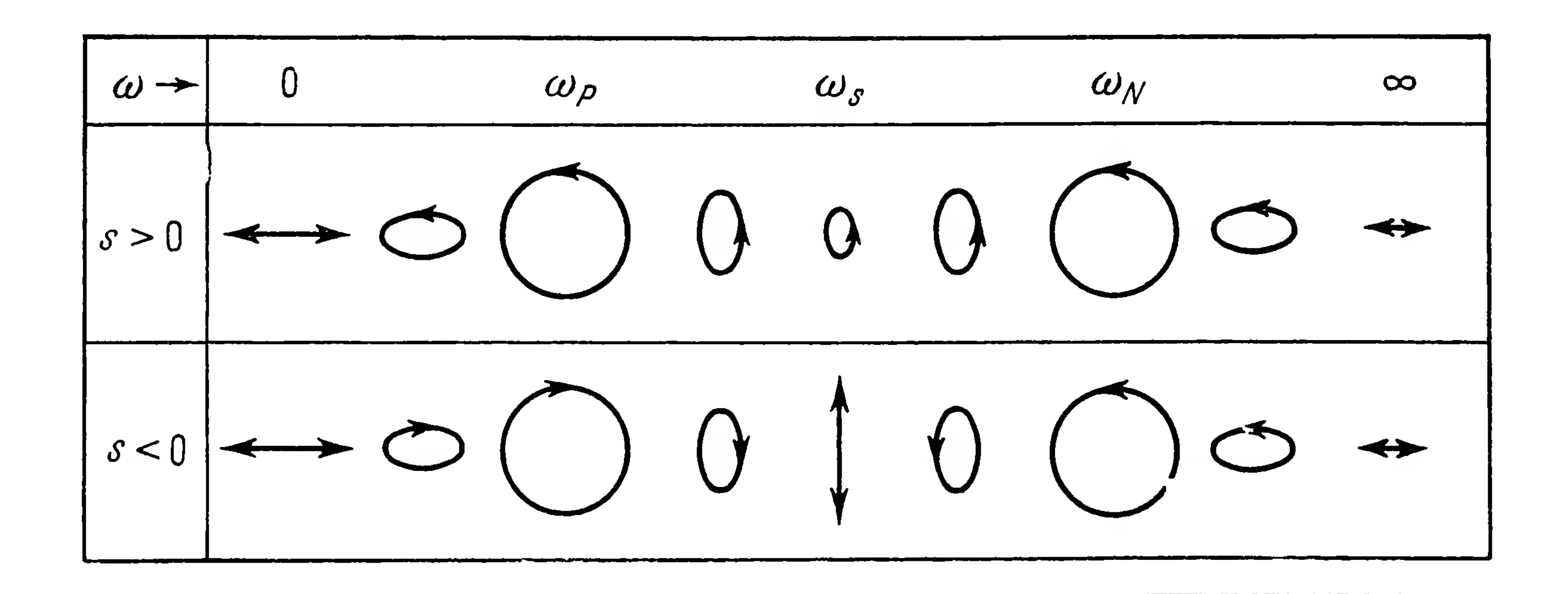


Рис. 3.41. Качественная картина форм колебаний в различных интервалах частот при возбуждении по поперечной оси.

С возрастанием ω мы приходим к $R^{(+)} > R^{(-)}$ для $s > 0$ и $R^{(+)} < R^{(-)}$ для $s < 0$. Исходная прямая превращается в эллипс, направление движения по которому определяется составляющей большей амплитуды. При $\omega \rightarrow \omega_P$ начинает преобладать резонансная составляющая, которую дает рис. 3.40. В этом случае траекторией вершины гироскопа служит окружность большого радиуса. За первой резонансной точкой в интервале $\omega_P < \omega < \omega_N$ знаки функций $R^{(+)}$ и $R^{(-)}$ различны. Это означает скачок фазы одной из составляющих и, следовательно, поворот большой оси эллипса, изображающего колебание, на 90°. В случае $s < 0$ при

$$\omega_s^2 = mgs/A \tag{3.187}$$

обе амплитуды равны и имеют противоположные знаки ($R^{(-)} = -R^{(+)}$). Это соответствует колебанию только по углу β. Если предельное значение (3.187), которое получается при нормальной частоте колебаний невращающегося гироскопа с нижним расположением центра тяжести, будет превзойдено, то траектории вновь окажутся эллипсами, которые при $\omega \to \omega_N$ будут приближаться к окружностям. За второй резонансной точкой большая ось эллиптической траектории опять меняется скачком на 90°, и, наконец, при $\omega \to \infty$ траектория снова стягивается к прямой, ориентированной в направлении α ($x = \alpha + i\beta$).

Траектории, определяемые решением (3.186), нетрудно рассчитать и построить для любых начальных условий. Кроме того, функции возбуждения более общего вида, например эллиптически модулированные или негармонические, можно учесть совершенно таким же образом, как это было проделано для возбуждений циклического и линейного характера.

Глава 4

Гиростат и гироскоп в кардановом подвесе

4.1. Гиростат

Следуя Кельвину, будем называть гиростатом твердое тело, на котором или внутри которого расположен симметричный ротор. Ротор может вращаться вокруг оси, жестко связанной с несущим телом, т. е. обладает по отношению к нему одной степенью свободы. Предполагается также, что ротор симметричен относительно оси вращения, так что распределение масс всей системы, т. е. гиростата, не меняется при вращении ротора. Следовательно, моменты инерции всей системы будут постоянными, и ее движение можно описать таким же методом, как и движение одного твердого тела.

4.1.1. Уравнения движения гиростата. Пусть H_i^K и H_i^R — кинетические моменты несущего тела (оболочки) и ротора; тогда для суммарного кинетического момента $H_i = H_i^K + H_i^R$ на основании теоремы об изменении кинетического момента имеем

$$\frac{d}{dt}\left(H_i^K + H_i^R\right) = \frac{d'}{dt}\left(H_i^K + H_i^R\right) + \varepsilon_{ijk}\omega_j\left(H_k^K + H_k^R\right) = M_i. \quad (4.1)$$

В такой же форме записываются и уравнения Эйлера, отнесенные к системе координат, неизменно связанной с несущим телом и, следовательно, вращающейся с той же угловой скоростью $\omega_i^K = \omega_i$. От общего уравнения (4.1) нетрудно перейти к уравнениям в координатной форме, описывающим движение при заданных конкретных условиях.

Наиболее простым является случай, когда ось вращения ротора является одновременно главной осью инерции несущего тела. Мы выберем ее за ось 3′; тогда для координат вектора угловой скорости ω_i в системе, образованной главными осями инерции несущего тела, имеем

$$\omega_1 = \omega_1^K = \omega_1^R, \quad \omega_2 = \omega_2^K = \omega_2^R, \quad \omega_3 = \omega_3^K \neq \omega_3^R.$$

Учитывая равенство $A^R = B^R$ и полагая

$$A = A^K + A^R, \quad B = B^K + B^R = B^K + A^R, \quad (4.2)$$

получаем из (4.1) скалярные уравнения

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C^K)\,\omega_2\omega_3 + C^R\omega_3^R\omega_2 &= M_1,\\ B\dot{\omega}_2 - (C^K - A)\,\omega_3\omega_1 - C^R\omega_3^R\omega_1 &= M_2,\\ C^K\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 + C^R\dot{\omega}_3^R &= M_3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь, кроме компонент ω_1, ω_2, ω_3, имеется еще одна неизвестная компонента ω_3^R, для определения которой следует к уравнениям (4.3) присоединить уравнение моментов относительно оси симметрии ротора:

$$C^R\dot{\omega}_3^R = M_3^R, \tag{4.4}$$

где M_3^R — момент сил, действующих на ротор. Рассмотрим следующие частные случаи.

a) Моменты, тормозящие или разгоняющие ротор, в том числе трение на оси ротора, отсутствуют; тогда

$$\omega_3^R = \omega_{30}^R = \text{const}. \tag{4.5}$$

b) Угловая скорость ротора относительно несущего тела поддерживается постоянной с помощью некоторого регулятора; тогда

$$\omega_3^R = \omega_3 + \omega_{30}^Z, \tag{4.6}$$

где относительная угловая скорость ω_{30}^Z постоянна.

c) Имеет место равенство $\omega_3^R = \omega_3 + \omega_3^Z(t)$, где $\omega_3^Z(t)$ — заданная функция времени.

В случае a) уравнения (4.3) с учетом (4.5) можно представить как уравнения движения некоего заменяющего гироскопа с главными моментами инерции A, B, C^K при наличии самовозбуждения, зависящего от угловой скорости:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C^K)\,\omega_2\omega_3 &= M_1 - H^R\omega_2,\\ B\dot{\omega}_2 - (C^K - A)\,\omega_3\omega_1 &= M_2 + H^R\omega_1,\\ C^K\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= M_3; \end{aligned} \tag{4.7}$$

здесь $H^R = C^R\omega_{30}^R$ — постоянная проекция кинетического момента ротора на ось $3'$.

Аналогичную систему уравнений с заменой C^K на $C = C^K + C^R$ и H^R на $H^Z = C^R\omega_{30}^Z$ будем иметь и в случае b). Поэтому достаточно исследовать только один из этих случаев: результаты с соответствующими изменениями немедленно переносятся на другой случай.

В случае c) появляются изменяющийся во времени кинетический момент $H^Z(t)$ и в уравнении (4.3/3) добавочный возмущающий член $C^R\dot{\omega}_3^Z(t)$. Здесь тоже можно говорить о движении заменяющего гироскопа с самовозбуждением, зависящим от времени и угловой скорости.

4.1.2. Свободный симметричный гиростат. Будем считать, что $M_i = 0$ и $A^K = B^K$; тогда вследствие $A^R = B^R$ имеем также $A = B$. В этих предположениях уравнения движения (4.7) решаются без труда. Прежде всего из (4.7/3) следует, что $\omega_3 = \omega_{30}$. Затем, введя комплексную функцию

$$\omega^* = \omega_1 + i\omega_2, \tag{4.8}$$

заменим два первых уравнения (4.7) одним эквивалентным уравнением

$$A\dot{\omega}^* + i[(A - C^K)\omega_{30} - H^R]\omega^* = 0. \tag{4.9}$$

Его общее решение, удовлетворяющее начальному условию $\omega^*(0) = \omega_0^*$, имеет вид

$$\omega^* = \omega_0^* e^{-i\nu t}, \quad \text{где} \quad \nu = [(A - C^K)\omega_{30} - H^R]/A. \tag{4.10}$$

Вектор ω_i, составляющими которого являются ω_{30} и $\omega^* = \omega_1 + i\omega_2$, при движении несущего тела вращается вокруг оси 3′ с кру-

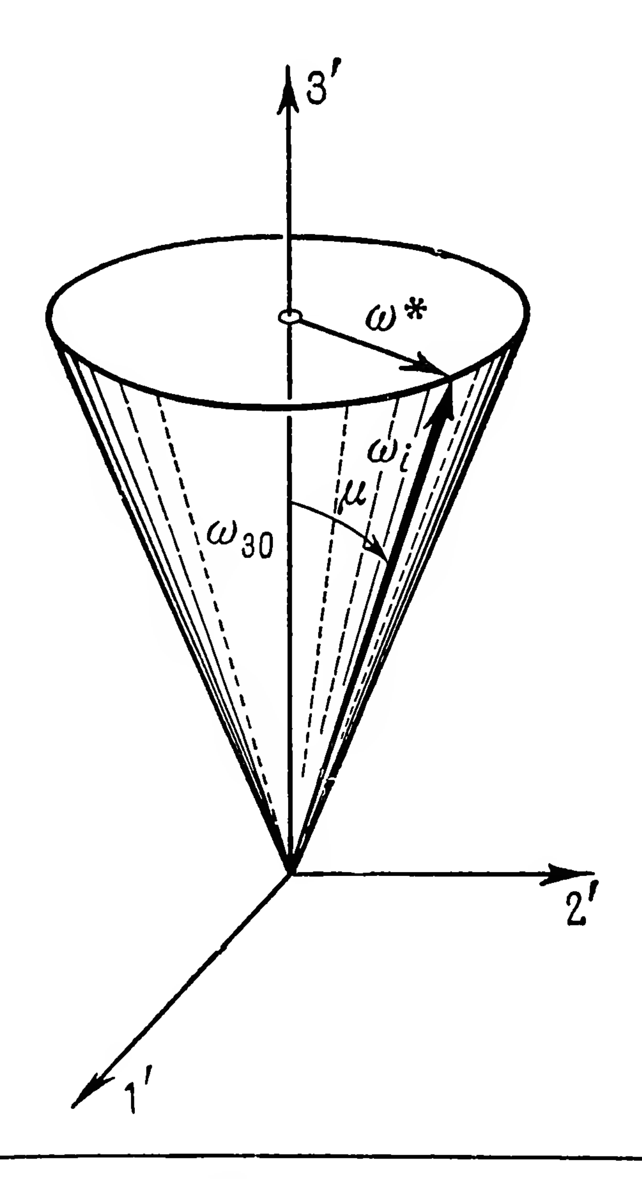


Рис. 4.1. Подвижный аксоид, соответствующий движению свободного симметричного гиростата.

говой частотой ν, образуя боковую поверхность прямого кругового конуса (подвижного аксоида, см. рис. 4.1). Угол μ между образующей и осью конуса определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\mu = |\omega_0^*|/\omega_{30}.$$

Неподвижный в пространстве вектор кинетического момента H_i в системе отсчета, связанной с телом, тоже движется по поверхности прямого кругового конуса, коаксиального с подвижным аксоидом. Движение самого гиростата представляет *нутационные колебания*, при которых ось 3′, являющаяся и осью вращения ротора, и осью симметрии гиростата, вальсирует вокруг неизменно направленного вектора кинетического момента. Вектор

$$H_i = (A\omega_1,\ A\omega_2,\ C^K\omega_{30} + H^R)$$

лежит в плоскости, проходящей через вектор ω_i и ось 3′. Угол раствора ϑ конуса, описываемого этим вектором в связанной с телом системе отсчета, определяется равенством

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{A\,|\overset{*}{\omega}_0|}{C^K\omega_{30} + H^R}. \tag{4.11}$$

Если ось 3 неподвижной системы отсчета направить вдоль постоянного вектора H_i, то угол $\vartheta = \vartheta_0$ между этой осью и осью 3′, связанной с телом, будет являться одним из углов Эйлера. Скорость изменения $\dot{\psi}$ угла Эйлера ψ находится, согласно (1.49), из соотношения

$$|\overset{*}{\omega}{}_0^{2}| = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\vartheta}^2 + (\dot{\psi}\sin\vartheta_0)^2 = \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta_0,$$

откуда с учетом (4.11) получаем

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \frac{|\overset{*}{\omega}_0|}{\sin\vartheta_0} = \frac{1}{A}\sqrt{(A\,|\overset{*}{\omega}_0|)^2 + (C^K\omega_{30} + H^R)^2}. \tag{4.12}$$

Мы нашли обобщенную формулу, определяющую частоту нутационных колебаний, которая при $H^R = 0$ переходит в известное выражение, справедливое для одного твердого тела.

Угловую скорость $\dot{\varphi}$ собственного вращения нетрудно найти из равенства $\omega_{30} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta$, если использовать (4.11) и (4.12):

$$\dot{\varphi} = \omega_{30} - (C^K\omega_{30} + H^R)/A = \nu, \tag{4.13}$$

откуда после интегрирования определяется угол Эйлера φ.

Нутационное движение симметричного гиростата, подобно движению одного твердого тела около неподвижной точки, можно трактовать как качение подвижного аксоида по неподвижному. Такую интерпретацию дал Лейпгольц в [15][1]). Однако она не столь наглядна, как в случае одного твердого тела (см. § 2.1).

4.1.3. Вынужденное движение симметричного гиростата. Полученное в п. 4.1.2 решение можно без труда обобщить на случай, когда имеется момент M_i, проекция которого на ось симметрии равна

[1]) В русский перевод [15] статья Лейпгольца не включена. — *Прим. ред.*

нулю[1]). Тогда из (4.7/3) снова следует $\omega_3 = \omega_{30}$, а из первых двух уравнений, полагая $M^* = M_1 + iM_2$, имеем

$$A\dot{\omega}^* + i[(A - C^K)\,\omega_{30} - H^R]\,\omega^* = M^*. \tag{4.14}$$

Полагая $M^*/A = m^*$ и сохраняя обозначение (4.10) для ν, запишем (4.14) в виде уравнения

$$\dot{\omega}^* + i\nu\omega^* = m^*, \tag{4.15}$$

общим решением которого будет

$$\omega^* = \omega_0^* e^{-i\nu t} + \int_0^t m^*(\tau)\, e^{-i\nu(t-\tau)}\, d\tau. \tag{4.16}$$

Для некоторых видов функции $m^*(t)$ интеграл можно вычислить и затем обсудить полученный результат, как это было сделано для аналогичного решения (3.129), описывающего движение гироскопа с самовозбуждением.

4.1.4. Свободный несимметричный гиростат. Для гиростата с несимметричным несущим телом ($A^K \neq B^K$) в случае отсутствия внешних моментов также можно найти точное решение. Способ нахождения решения такой же, как и в п. 2.3.1, но потребует больше выкладок. Мы ограничимся лишь тем, что наметим путь вычислений.

В качестве исходных уравнений возьмем уравнения (4.7), в которых положим $M_i = 0$:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C^K)\,\omega_2\omega_3 + H^R\omega_2 &= 0,\\ B\dot{\omega}_2 - (C^K - A)\,\omega_3\omega_1 - H^R\omega_1 &= 0,\\ C^K\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 \qquad\quad &= 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Умножив эти уравнения соответственно на ω_1, ω_2, ω_3, сложив и проинтегрировав по времени, получим интеграл энергии

$$\tfrac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C^K\omega_3^2\right) = E_0. \tag{4.18}$$

Здесь E_0 равно разности между постоянной полной энергией гиростата E_0^G и энергией собственного вращения ротора вокруг его оси симметрии:

$$E_0 = E_0^G - \tfrac{1}{2}H^R\omega_{30}^R = E_0^G - \tfrac{1}{2}C^R\left(\omega_{30}^R\right)^2.$$

Умножим далее уравнения (4.17) на составляющие кинетического момента $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C^K\omega_3$, сложим и проинтегрируем по времени:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + (C^K)^2\,\omega_3^2 + 2H^R \int (A - B)\,\omega_1\omega_2\, dt = \text{const}.$$

[1]) Предположение $M_3^R = 0$ остается в силе. — *Прим ред*

Интеграл можно вычислить с помощью (4.17/3); в результате получим

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + (C^K)^2\,\omega_3^2 + 2H^R C^K \omega_3 = H_0^2, \qquad (4.19)$$

где

$$H_0^2 = (H_0^G)^2 - (H^R)^2;$$

через H_0^G обозначен полный кинетический момент гиростата.

С помощью первых интегралов (4.18) и (4.19) составляющие угловой скорости ω_1 и ω_2 выражаются через составляющую ω_3. Подставив эти выражения в (4.17/3), получим для ω_3 дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{\omega}_3 = \frac{A-B}{C^K}\,\omega_1(\omega_3)\,\omega_2(\omega_3) = F(\omega_3), \qquad (4.20)$$

откуда после разделения переменных следует

$$t = t_0 + \int \frac{d\omega_3}{F(\omega_3)}.$$

Путем обращения интеграла найдем функцию $\omega_3(t)$, подстановка которой в найденные ранее выражения позволяет найти зависимость от времени и составляющих ω_1 и ω_2.

При практической реализации указанного способа нахождения решения придется рассмотреть значительно больше различных частных случаев, чем для одного твердого тела (§ 2.3) Лейпгольц [29] нашел при исследовании этой проблемы четыре различных типа решения для семи случаев.

4.1.5. Перманентные вращения тяжелого гиростата [1]**.** Пусть точка подвеса гиростата не совпадает с центром масс, и пусть внешний момент M_i в (4.1) обусловлен только силой веса. Тогда из (3.26) с учетом равенства $G_k = -Ga_{3k}$ следует, что

$$M_i = -G\varepsilon_{ijk}s_j a_{3k}. \qquad (4.21)$$

Перманентным вращением назовем снова, как в п. 3.3.4*c*, вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси, неподвижной и в пространстве, и относительно тела:

$$\omega_i = \omega_{i0}, \qquad d\omega/dt = 0.$$

Поскольку

$$H_i^K = \Theta_{ij}\omega_j = \Theta_{ij}\omega_{j0},$$

вектор кинетического момента H_i^K тоже будет неподвижен относительно тела и постоянен по величине. Так как, кроме того, момент силы веса не влияет на вращение ротора относительно тела, то относительная угловая скорость и кинетический момент ротора,

[1]) В этом пункте в отличие от предыдущих не предполагается, что ось вращения ротора совпадает с главной осью инерции несущего тела — *Прим ред*

соответствующий его относительному вращению, также остаются постоянными.

При указанных предпосылках в исходном уравнении (4.1) исчезает член, содержащий относительную производную d'/dt, так что для определения перманентных вращений остается условие равенства гироскопического момента и момента силы тяжести:

$$\varepsilon_{ijk}\omega_j\left(H_k^K + H_k^R\right) = -G\varepsilon_{ijk}s_j a_{3k}. \qquad (4.22)$$

Это равенство может выполняться только тогда, когда векторы ω_i, $H_i^K + H_i^R$, s_i, a_{3i} компланарны (только в этом случае составленные из них векторные произведения будут коллинеарны). Вектор a_{3i} вертикален, поэтому связанная с телом плоскость, в которой лежат все перечисленные векторы, должна все время оставаться вертикальной. Но это возможно лишь при условии, что вектор угловой скорости ω_i тоже вертикален:

$$\omega_i = \omega_{i0} = \omega a_{3i}. \qquad (4.23)$$

Таким образом, перманентные вращения тяжелого гиростата, подобно вращениям Штауде твердого тела, могут совершаться только вокруг вертикальной оси.

Используя (4.23), можно привести равенство (4.22) к виду

$$\omega^2\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l} + \omega\varepsilon_{ijk}a_{3j}H_k^R + G\varepsilon_{ijk}s_j a_{3k} = 0. \qquad (4.24)$$

Мы получили квадратное уравнение относительно ω с постоянными коэффициентами, ибо все входящие в векторные произведения векторы связаны с телом и постоянны. Следовательно, из (4.24) можно найти угловую скорость перманентных вращений для любой связанной с несущим телом оси. Легко убедиться, что при неравном нулю моменте силы тяжести перманентные вращения гиростата в отличие от вращений Штауде твердого тела могут совершаться с конечной угловой скоростью также вокруг главных осей инерции несущего тела. В этом особом случае из уравнения (4.24) исчезает слагаемое с ω^2, а оставшиеся члены означают, что момент силы тяжести компенсируется гироскопическим моментом ротора, ось вращения которого не должна, конечно, совпадать с главной осью несущего тела.

Положение в несущем теле осей перманентных вращений можно найти из (4.22). Умножив это равенство скалярно на вектор s_i, получим условие, определяющее кинематически возможные оси:

$$s_i\varepsilon_{ijk}a_{3j}\left(H_k^K + H_k^R\right) = s_i\varepsilon_{ijk}a_{3j}\left(\omega\Theta_{kl}^K a_{3l} + H_k^R\right) = 0,$$

или

$$\omega\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ Aa_{31} & Ba_{32} & Ca_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ H_1^R & H_2^R & H_3^R \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.25)$$

Подставив сюда найденное из (4.24) значение ω, будем иметь уравнение, в которое, кроме компонент кинетического момента ротора H_i^R, входят величины, зависящие лишь от несущего тела. Совокупность векторов a_{3i}, для которых выполняется условие (4.25) совместно с (4.24), определяет связанный с телом конус, который можно назвать *обобщенным конусом Штауде*. Поверхность этого конуса является геометрическим местом кинематически возможных осей перманентных вращений. Однако среди этих осей динамически возможными будут только те, для которых выполняется равенство (4.22). Динамически возможные оси могут соответствовать устойчивому или неустойчивому движению. Поэтому следует провести исследование устойчивости, подобно тому как это было сделано в п. 3.3.4*с* для одного особого случая движений Штауде.

4.1.6. Гиростат с регулируемой угловой скоростью ротора. Для практических применений гиростата, например при управлении ориентацией космического корабля, в общем случае может оказаться необходимым с помощью некоторого регулятора поддерживать относительную угловую скорость ω^Z ротора постоянной или равной заданной функции времени. В этом случае кинетический момент H_i всей системы целесообразно представить в виде суммы кинетического момента H_i^G гиростата при закрепленном роторе и дополнительного кинетического момента H_i^Z, соответствующего вращению ротора относительно тела. В силу предполагаемой симметрии ротора момент H_i^Z всегда направлен по оси ротора. Полагая, таким образом,

$$H_i = H_i^K + H_i^R = H_i^G + H_i^Z,$$

спроектируем векторное уравнение (4.1) на главные оси инерции гиростата с закрепленным ротором (ось ротора имеет в гиростате произвольное направление). Если внешним моментом является момент силы тяжести, определяемый равенством (4.21), а дополнительный кинетический момент $H_i^Z = (H_1^Z,\ H_2^Z,\ H_3^Z)$ постоянен, то из (4.1) получаем следующие скалярные уравнения:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 + \omega_2 H_3^Z - \omega_3 H_2^Z &= G\,(a_{32}s_3 - a_{33}s_2), \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 + \omega_3 H_1^Z - \omega_1 H_3^Z &= G\,(a_{33}s_1 - a_{31}s_3), \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 + \omega_1 H_2^Z - \omega_2 H_1^Z &= G\,(a_{31}s_2 - a_{32}s_1). \end{aligned} \tag{4.26}$$

К этим динамическим уравнениям движения тяжелого гиростата с постоянным дополнительным кинетическим моментом ротора следует присоединить кинематические уравнения (3.31), означающие, что вертикальный вектор a_{3i} сохраняет постоянное направление в пространстве.

Можно найти решения системы (4.26), которые будут совершенно аналогичны полученным выше решениям для тяжелого твердого тела (см. § 3.3). Прежде всего укажем два общих первых интеграла. Интеграл энергии, для нахождения которого векторное равенство (4.1) следует умножить скалярно на вектор ω_i и учесть (4.21), в силу постоянства H^Z записывается в точности в виде интеграла (3.34):

$$^1/_2 H_i^G \omega_i + G s_i a_{3i} = E_0. \qquad (4.27)$$

Константа E_0 здесь не равна общей энергии системы, так как в нее не входит часть кинетической энергии, создаваемая относительным вращением ротора. Второй интеграл получается путем скалярного умножения (4.1) и (4.21) на вектор a_{3i} с последующим интегрированием:

$$H_i a_{3i} = (H_i^G + H_i^Z) a_{3i} = H_0 = \text{const}. \qquad (4.28)$$

Механический смысл этого интеграла состоит в том, что вертикальная составляющая кинетического момента системы сохраняет постоянное значение.

Как показал Кейс [30], общее решение уравнений (4.26) можно найти только в трех случаях, представляющих обобщение случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской движения твердого тела.

В *обобщенном случае Эйлера* для свободного гиростата в качестве третьего интеграла имеем условие постоянства величины кинетического момента всей системы:

$$H^2 = (H_i^G + H_i^Z)^2 = \text{const}. \qquad (4.29)$$

Формально этот интеграл получается путем скалярного умножения векторного равенства (4.1), в котором полагаем $M_i = 0$, на вектор $H_i^G + H_i^Z$.

В *обобщенном случае Лагранжа* к известным условиям $A = B$ и $s_3 = s$, $s_1 = s_2 = 0$ следует добавить еще одно: $H_1^Z = H_2^Z = 0$, означающее, что оси симметрии несущего тела и ротора совпадают. При этих предположениях из уравнения (4.26/3) следует, что составляющая ω_3 угловой скорости постоянна. Равенство $\omega_3 = \omega_{30}$ будет в данном случае третьим интегралом.

Третий интеграл может быть найден и в *обобщенном случае Ковалевской*, когда к известным условиям $A = B = 2C$ и $s_1 = s$, $s_2 = s_3 = 0$ снова присоединяется условие $H_1^Z = H_2^Z = 0$.

Рассмотрим вкратце задачу управления ориентацией несущего тела. Для управления углом поворота тела вокруг одной оси можно использовать ротор, поворот которого относительно тела регулируется с помощью программы или сигнала управления. Тогда в качестве параметра управления можно принять относительную угловую скорость ротора. Соответственно кинетический момент ротора следует рассматривать как переменную величину.

Для управления пространственной ориентацией тела уже недостаточно одного управляющего параметра; в этом случае нужно оперировать всеми тремя компонентами добавочного кинетического момента. Такое регулирование может быть достигнуто либо приданием ротору дополнительных степеней свободы, позволяющих изменять направление его оси относительно тела, либо установкой трех роторов, оси которых некомпланарны. В первом варианте управления уравнения движения рассматриваемой системы сохраняют вид уравнений движения гиростата только в том случае, когда эллипсоид инерции ротора вырождается в сферу, ибо тогда распределение масс всей системы остается постоянным при изменении направления оси ротора относительно тела. Чтобы записать уравнения движения для второго варианта, будем считать, что оси трех помещенных на тело симметричных роторов параллельны главным осям инерции тела. Тогда в случае отсутствия внешних сил уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(B-C)\,\omega_2\omega_3&=-C^{1R}\dot{\omega}^{1Z}+\omega_3C^{2R}\omega^{2Z}-\omega_2C^{3R}\omega^{3Z},\\ B\dot{\omega}_2-(C-A)\,\omega_3\omega_1&=-C^{2R}\dot{\omega}^{2Z}+\omega_1C^{3R}\omega^{3Z}-\omega_3C^{1R}\omega^{1Z},\\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\,\omega_1\omega_2&=-C^{3R}\dot{\omega}^{3Z}+\omega_2C^{1R}\omega^{1Z}-\omega_1C^{2R}\omega^{2Z}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь через C^{1R}, C^{2R} и C^{3R} обозначены моменты инерции роторов относительно их осей, а находящиеся в правых частях уравнений функции ω^{1Z}, ω^{2Z} и ω^{3Z} (относительные угловые скорости роторов) являются управляющими параметрами. Эти величины должны изменяться таким образом, чтобы несущее тело двигалось по желаемому закону или достигло заданного положения в пространстве. Указанная задача является задачей теории управления, и ее решение здесь не рассматривается.

4.2. Карданов подвес

Благодаря техническим приложениям гироскопа самое широкое распространение получил так называемый карданов подвес. Хотя в настоящее время установлено, что такой подвес был известен уже в тринадцатом веке и его не следует связывать с именем математика и врача Иеронимуса Кардано (1501—1576), мы будем использовать данный термин, так как он является общепринятым.

Карданов подвес состоит из двух рамок (колец), обеспечивающих подвешенному телу, в нашем случае ротору гироскопа, полную свободу угловых перемещений. На рис. 4.2 показан один из вариантов карданова подвеса гироскопа. Оси внешней рамки A, внутренней рамки I и ротора R в нормальном положении взаимно перпендикулярны и пересекаются в идеальном случае в одной точке, которая является неподвижной точкой подвеса. Подвес, подобный изображенному на рис. 4.2, называется *внешним кардановым подвесом*; существует и *внутренний карданов подвес* (рис. 4.3),

который часто называют *кардановым шарниром* или *сочленением Гука.* Оба типа карданова подвеса применяются в гироскопической технике.

При помещении гироскопа в карданов подвес следует учитывать как кинематику, так и динамику этого подвеса. Особенности геометрии карданова подвеса могут привести к кинематической

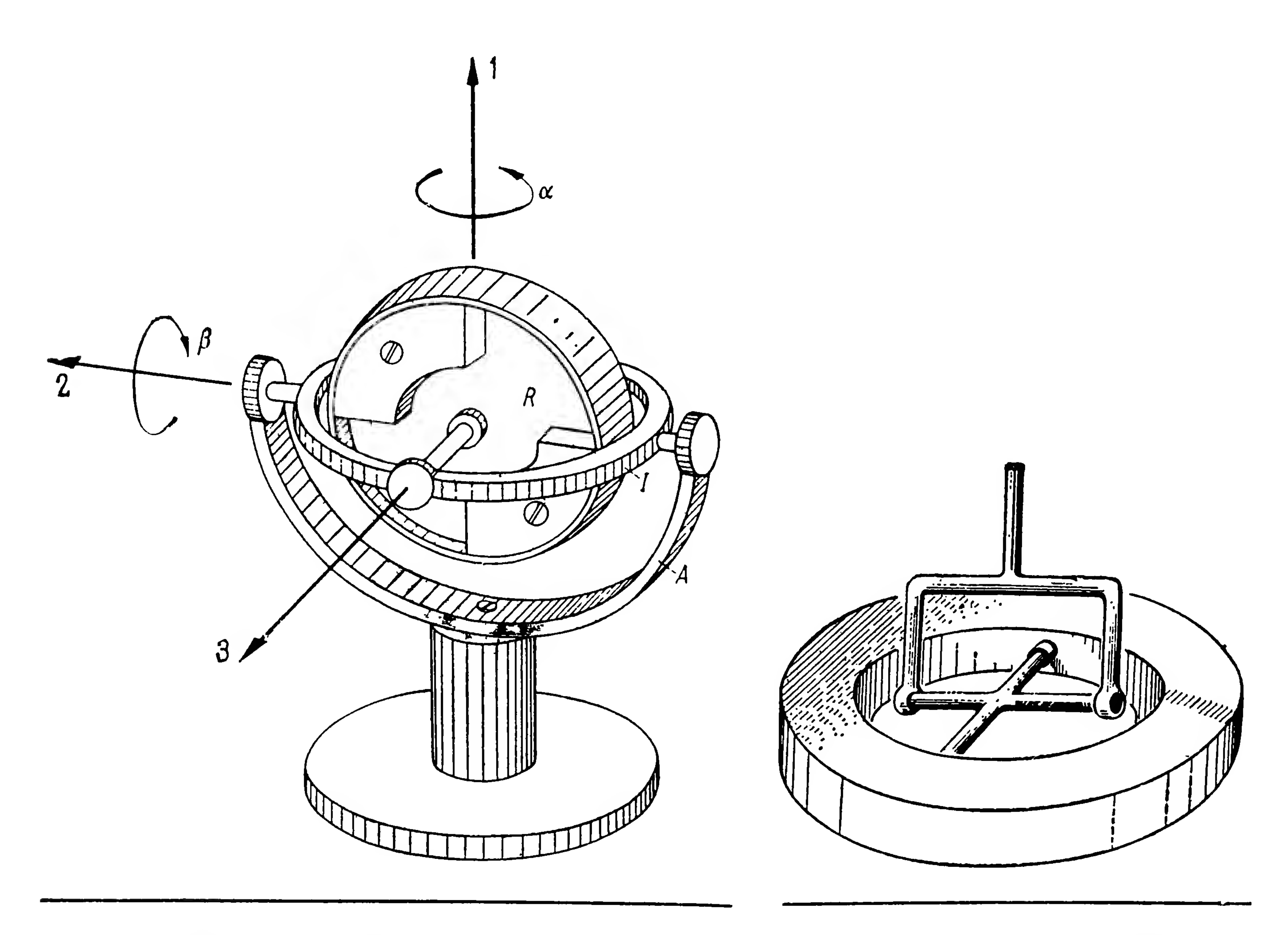


Рис. 4.2. Демонстрационная модель гироскопа в кардановом подвесе (внешний карданов подвес).

Рис. 4.3. Внутренний карданов подвес ротора.

карданной погрешности, которую приходится принимать во внимание в гироскопических приборах. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 12, посвященной гироскопическим приборам. Влияние трения, неизбежно возникающего в кардановом подвесе, будет также изучено ниже (гл. 11). Здесь мы сосредоточим внимание прежде всего на особенностях динамики гироскопа, обусловленных тем, что гироскоп в кардановом подвесе уже нельзя рассматривать как отдельное твердое тело; в данном случае мы имеем дело с системой трех связанных между собой тел. При этом нельзя пренебрегать массами кардановых колец, так как именно они оказываются причиной некоторых типичных и существенных для практики явлений. Объяснение и аналитическое исследование этих явлений составляют содержание следующего параграфа.

Все дальнейшие исследования в этой главе будут проводиться при следующих предположениях:

a) трение в подшипниках рамок и ротора отсутствует;

b) оси вращения рамок и ротора пересекаются в одной точке;

c) рамки и ротор являются абсолютно твердыми телами;

d) в нормальном положении рамок и ротора их главные оси инерции совпадают и направлены вдоль осей вращения рамок и ротора.

Главные моменты инерции трех тел системы обозначим следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \text{для ротора} & A^R, & B^R, & C^R; \\ \text{для внутренней рамки} & A^J, & B^J, & C^J; \\ \text{для внешней рамки} & A^A, & —, & —. \end{array} \tag{4.31}$$

Положение в пространстве указанных трех тел определяется углами α, β и γ, которые являются углами поворота внешней рамки, внутренней рамки и ротора вокруг соответствующих осей. Проекции векторов ω_i^R, ω_i^J и ω_i^A угловых скоростей ротора и рамок на оси связанных с ними трехгранников имеют вид [см. также (1.51)]:

$$\begin{aligned} &\omega_1^R = \dot\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dot\beta \sin\gamma, \\ &\omega_2^R = -\dot\alpha \cos\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma, \\ &\omega_3^R = \dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta, \\ &\omega_1^J = \dot\alpha \cos\beta, \qquad \omega_1^A = \dot\alpha, \\ &\omega_2^J = \dot\beta, \qquad \omega_2^A = 0, \\ &\omega_3^J = \dot\alpha \sin\beta, \qquad \omega_3^A = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

При исследовании различных случаев движения системы мы будем применять методы, которые наиболее подходят для рассматриваемой задачи. Так, при исследовании движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе целесообразно использовать выражение полной энергии системы для вывода уравнений движения методом Лагранжа. В случае несимметричного гироскопа в кардановом подвесе более удобными для исследования являются уравнения движения в форме Эйлера (см., например, [32]). Для качественного исследования форм движения следует использовать метод фазовой плоскости, обладающий преимуществом наглядности. С каждым из этих трех методов читатель встретится в последующем изложении.

4.3. Тяжелый симметричный гироскоп в кардановом подвесе

В дополнение к сделанным выше предположениям будем считать, что ротор симметричен ($A^R = B^R$), ось внешней рамки (ось 1) вертикальна, общий центр тяжести ротора и внутренней рамки ле-

жит на оси симметрии ротора ($s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = s \neq 0$). Если $s > 0$, то при $\beta = +\pi/2$ гироскоп будет стоячим (центр тяжести находится выше точки подвеса), а при $\beta = -\pi/2$ — висячим. Иногда оказывается неудобным менять угол β в столь широких пределах. Тогда при близких к $\pi/2$ значениях β можно получить стоячий или висячий гироскоп, полагая $s > 0$ или $s < 0$ соответственно.

4.3.1. Общее решение. Для вывода уравнений движения используем выражение кинетической и потенциальной энергии U всей системы. Так как ось внешней рамки вертикальна, потенциальная энергия зависит только от угла β и не зависит от α:

$$U = Gs \sin\beta, \tag{4.33}$$

где G — вес ротора и внутренней рамки.

Для кинетической энергии справедливо следующее выражение:

$$T = T^R + T^J + T^A = {}^1/_2 \sum_{x=R,\,J,\,A} \left[A^x (\omega_1^x)^2 + B^x (\omega_2^x)^2 + C^x (\omega_3^x)^2\right],$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$T = {}^1/_2 \{\dot\alpha^2 [A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta] + \dot\beta^2 B + C^R (\dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta)^2\}; \tag{4.34}$$

здесь введены обозначения

$$A = A^R + A^J + A^A, \quad B = B^R + B^J.$$

Аналогично случаю Лагранжа можно найти три первых интеграла уравнений движения тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе. Два из них обнаруживаются благодаря тому, что углы α и γ являются циклическими координатами: выражения для T и U содержат лишь производные от этих углов, но не сами углы. Взяв в уравнении Лагранжа (1.87) в качестве обобщенной координаты угол γ и использовав (4.34), получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma} = C^R (\dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta) = \text{const},$$

или

$$\omega_3^R = \dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta = \omega_0. \tag{4.35}$$

Таким образом, проекция кинетического момента ротора, а вместе с ней и проекция угловой скорости ротора на ось ротора остаются постоянными. Механически это объясняется как следствие введенного выше предположения об отсутствии сопротивления вращению ротора. Из уравнения Лагранжа для обобщенной координаты α вытекает далее, что вертикальная составляющая кинетического момента всей системы сохраняет постоянное значение:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\alpha} = \dot\alpha [A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta] + C^R\omega_0 \sin\beta = H_0 = \text{const}. \tag{4.36}$$

Данному факту тоже можно дать наглядное механическое истолкование. Внешними моментами, действующими на систему, являются момент силы тяжести и момент реакций в подшипниках оси внешней рамки, приложенный к внешней рамке. Вследствие предположений о вертикальности оси внешней рамки и отсутствии трения в подшипниках векторы этих моментов лежат в горизонтальной плоскости, т. е. их проекции на вертикаль равны нулю.

Для гироскопа в кардановом подвесе при введенных предположениях имеет место, кроме интегралов (4.35) и (4.36), выражающих постоянство проекций кинетических моментов ротора и всей системы, еще один интеграл — закон сохранения полной механической энергии $T + U = E_0$, или в развернутом виде

$$\dot{\alpha}^2 [A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta] + \dot{\beta}^2 B + C^R\omega_0^2 + 2Gs\sin\beta = 2E_0. \quad (4.37)$$

Используя данные интегралы, найдем общее решение уравнений движения. Из (4.36) следует

$$\dot{\alpha} = \frac{H_0 - C^R\omega_0\sin\beta}{A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta}. \quad (4.38)$$

Подставив это выражение в (4.37) и разрешив относительно $\dot{\beta}$, получим

$$B\dot{\beta}^2 = 2E_0 - C^R\omega_0^2 - 2Gs\sin\beta - \frac{(H_0 - C^R\omega_0\sin\beta)^2}{A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta}, \quad (4.39)$$

или

$$\dot{\beta}^2 = F(\beta).$$

Для того чтобы легче было использовать в рассматриваемой задаче результаты, полученные для случая Лагранжа, введем замену

$$\sin\beta = u, \qquad \dot{\beta} = \dot{u}/\cos\beta. \quad (4.40)$$

Тогда имеем

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)\left\{\frac{2E_0 - C^R\omega_0^2}{B} - \frac{2Gs}{B}u - \frac{(H_0 - C^R\omega_0 u)^2}{B[A - (A^J + A^R - C^J)u^2]}\right\} = U(u). \quad (4.41)$$

Если моменты инерции рамок обращаются в нуль, то это уравнение переходит в уравнение (3.46), справедливое для случая Лагранжа. Однако в данной задаче гироскопическая функция $U(u)$ будет уже не многочленом, а дробно-рациональной функцией, так что квадратуры, которые появятся в процессе решения, не выражаются через известные функции, и для их нахождения следует использовать численные или графические методы.

a b c d

Рис. 4.4. Траектории вершины гироскопа в кардановом подвесе при движении в окрестности полюса, рассчитанные теоретически (a и b) и полученные экспериментально (c и d).

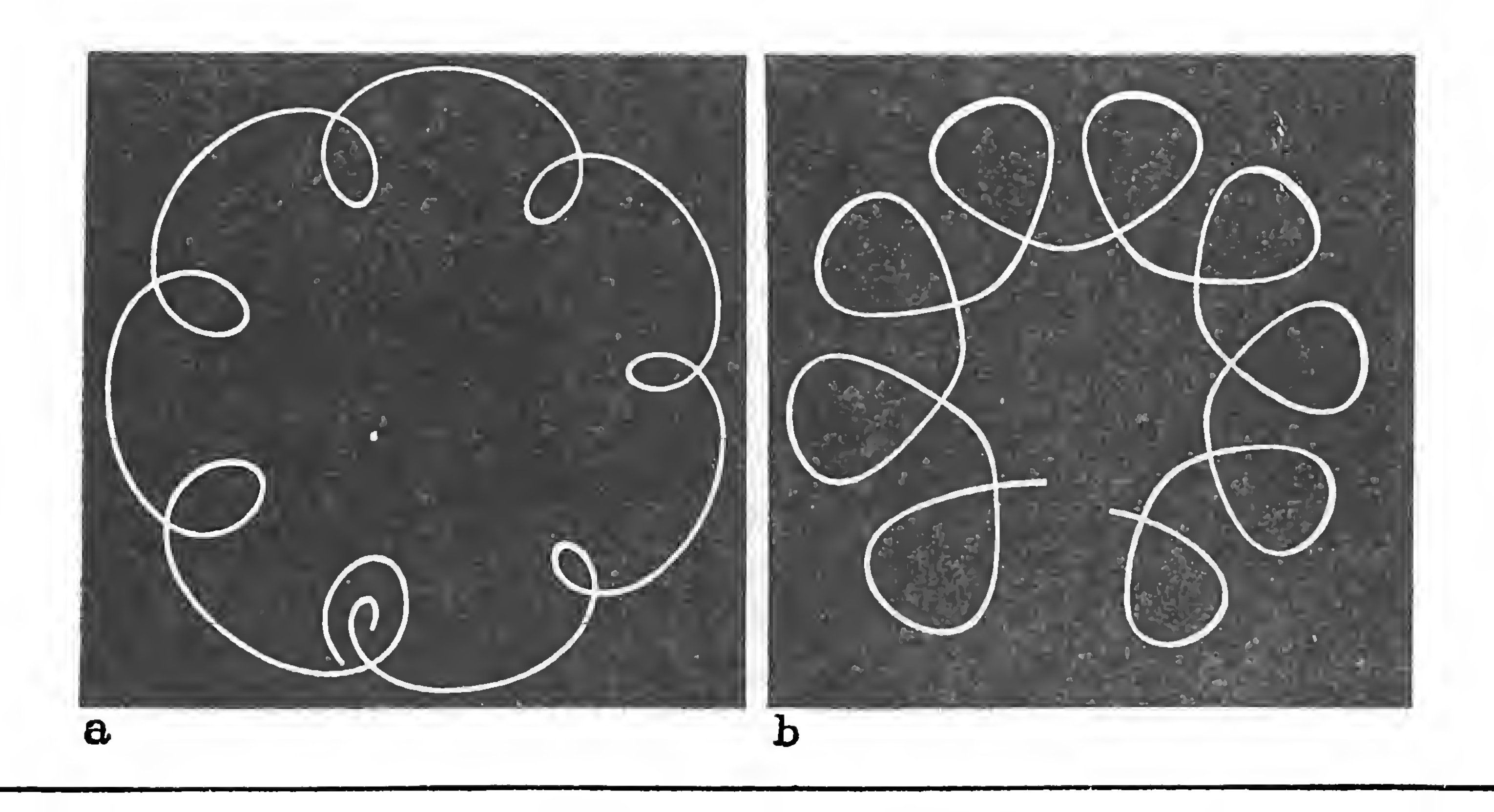


Рис. 4.5. Экспериментально полученные траектории вершины стоячего (a) и висячего (b) гироскопа.

Из уравнения (4.39) после интегрирования получим

$$t = t_0 + \int \frac{d\beta}{\sqrt{F(\beta)}} = t(\beta), \tag{4.42}$$

откуда путем обращения находим $\beta = \beta(t)$. Если подставить эту функцию в (4.38), то после еще одного интегрирования определяется $\alpha = \alpha(t)$. Наконец, подстановка найденных функций в (4.35) и снова интегрирование дает $\gamma = \gamma(t)$. Следовательно, найдено общее решение уравнений движения тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с вертикальной осью внешней рамки.

С помощью этого решения удалось установить, что движение гироскопа в кардановом подвесе только тогда существенно и даже качественно отличается от движения твердого тела в случае Лагранжа, когда вершина гироскопа находится в окрестности полюса единичной сферы с центром в точке подвеса или проходит через этот полюс. В момент, когда вершина гироскопа совпадает с полюсом, рамки оказываются лежащими в одной плоскости, так что ось ротора совпадает с осью внешней рамки. В этом положении рамки складываются, что может привести к появлению возмущающих сил, существенно влияющих на движение гироскопа в кардановом подвесе. Пример такого влияния показан на рис. 4.4, где представлены проекции траекторий вершины гироскопа на горизонтальную плоскость. На рис. a) и b) изображены траектории, рассчитанные теоретически, а на рис. c) и d) — траектории, полученные экспериментально, причем все траектории найдены при следующих одинаковых начальных условиях: в момент $t = 0$ по вертикальной оси ротора (вершина гироскопа находится в верхнем полюсе) производится боковой удар. Траектории a) и c) соответствуют случаю Лагранжа, траектории b) и d) — гироскопу в кардановом подвесе. Существенное различие между ними состоит в том, что кривизна траекторий в случае Лагранжа остается почти постоянной, а траектории для гироскопа в кардановом подвесе в окрестности полюса заметно спрямлены. Кроме того, направление смещения среднего положения вершины гироскопа, показанное штриховой стрелкой, оказывается в этих двух случаях противоположным.

На рис. 4.5 представлены экспериментально полученные траектории, охватывающие верхний полюс, т. е. значения угла β близки к $\pi/2$. В случае a) $s > 0$ (стоячий гироскоп), а в случае b) $s < 0$ (висячий гироскоп). В последнем случае обнаруживается типичная для гироскопа в кардановом подвесе деформация траектории, обусловленная приближением к верхнему полюсу.

4.3.2. Фазовый портрет движения. Различные возможные виды движения по углу β можно наглядно представить с помощью фазового портрета. В качестве исходного уравнения возьмем уравне-

ние (4.39), записанное в следующем виде:

$$\dot{\beta}^2 = F(\beta) = [2E_0 - f(\beta)]/B, \tag{4.43}$$

где

$$f(\beta) = C^R\omega_0^2 + 2Gs\sin\beta + \frac{(H_0 - C^R\omega_0\sin\beta)^2}{A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta}. \tag{4.44}$$

Уравнение (4.43) будем рассматривать как интеграл энергии для некоторой консервативной системы с одной степенью свободы, для которой β является обобщенной координатой; тогда $\dot{\beta}^2$ и $f(\beta)$ можно считать пропорциональными кинетической и потенциальной энергии этой системы. Если потенциальная функция $f(\beta)$, в выражение которой входят постоянные ω_0 и H_0, известна, то для любого значения постоянной энергии E_0 при помощи (4.43) можно построить соответствующую фазовую траекторию $\dot{\beta}(\beta)$. Для этого, как показано на рис. 4.6, на график потенциальной функции $f(\beta)$ следует нанести *энергетический уровень* в виде прямой, параллельной оси абсцисс и отстоящей от нее на расстояние $2E_0$; тогда разность между ординатами этой прямой и кривой $f(\beta)$ будет равна значениям $B\dot{\beta}^2$. Очевидно, нас должна интересовать лишь та область изменения угла β, для которой указанная разность неотрицательна, так как движение имеет место только при $\dot{\beta}^2 \geqslant 0$. Варьируя значения постоянной энергии E_0, можно указанным способом построить фазовые траектории, соответствующие различным типам движения. На рис. 4.6 изображены фазовые траектории для семи значений E_0, из которых три являются характеристическими значениями, разграничивающими качественно различные типы движения. Первое характеристическое значение E_0 определяется из условия, что график функции касается энергетического уровня в точке минимума. В этом случае на фазовой плоскости имеем положение равновесия 1, соответствующее *регулярной прецессии* гироскопа, когда $\beta \equiv \beta_0$. Подробнее регулярная прецессия будет рассмотрена в следующем пункте.

Второму характеристическому значению E_0, определяемому из условия касания кривой $f(\beta)$ энергетического уровня в точке промежуточного максимума при $\beta = -90°$, соответствует в качестве фазовой траектории сепаратриса 3. Наконец, при касании в точке главного максимума ($\beta = +90°$) получаем сепаратрису 6, соответствующую третьему характеристическому значению E_0.

Промежуточные значения E_0 могут дать три различных типа движения. Кривые, лежащие внутри сепаратрисы 3, представляют возмущенную прецессию, при которой угол β периодически колеблется около значения β_0, соответствующего положению равновесия 1. При этом траектории вершины гироскопа (представленные на рис. 4.5) не проходят через полюс. Фазовым траекториям, лежащим между сепаратрисами 3 и 6, соответствует такой тип движения гироскопа, при котором его вершина проходит через нижний полюс

и не проходит через верхний (рис. 4.4b). Экспериментально найденная траектория на рис. 4.4d показывает влияние неучтенного в теории трения: проходившая сначала через полюс вершина гироскопа вследствие диссипации энергии уже не может преодолеть

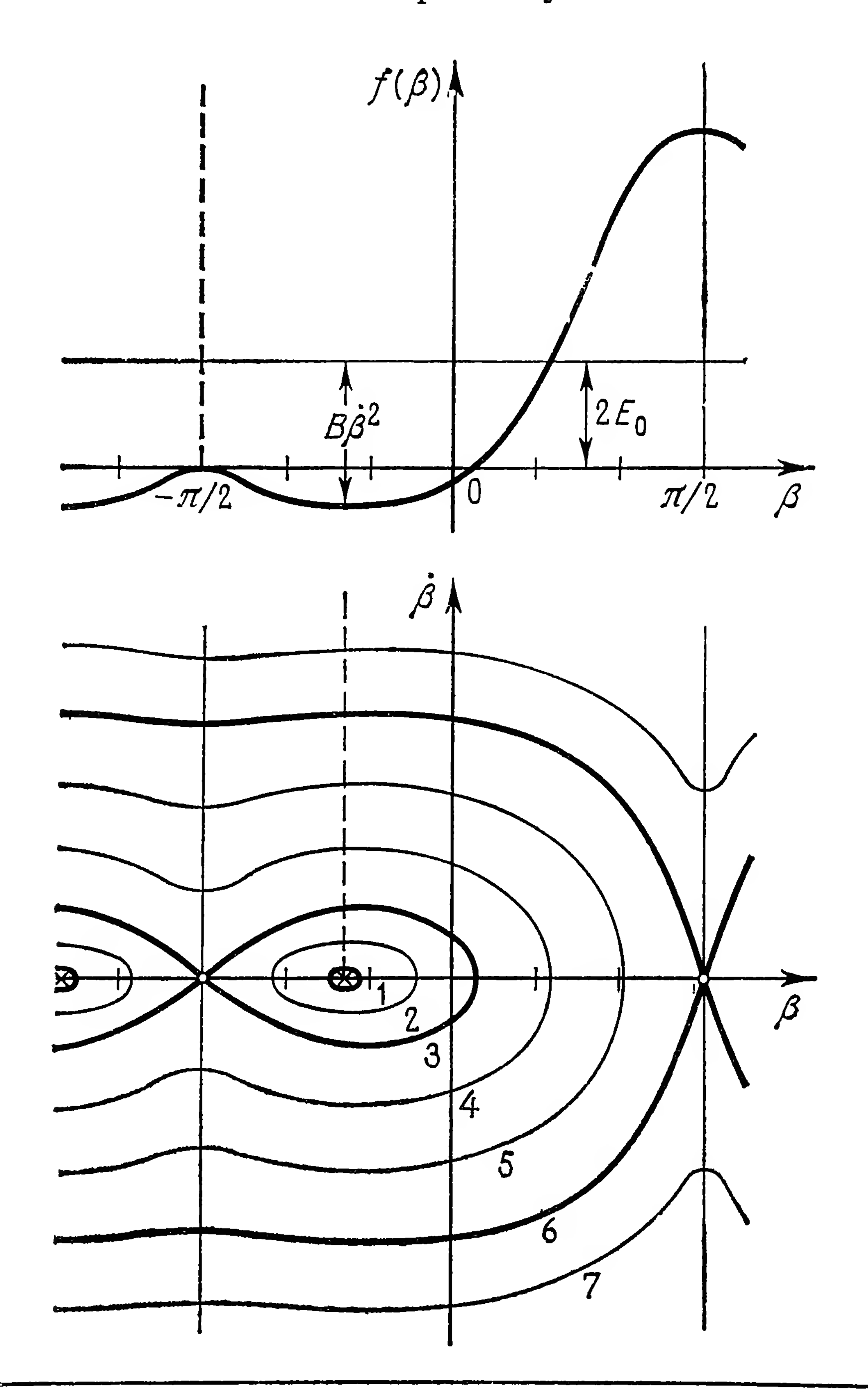


Рис. 4.6. График потенциальной функции $f(\beta)$ и фазовые траектории для тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе.

потенциальный барьер при $\beta = 90°$ и остается в потенциальной яме — вблизи точки 1.

При достаточно больших значениях постоянной энергии E_0 (фазовая траектория 7) внутренняя рамка вращается, так что вершина гироскопа проходит через оба полюса. Это движение тоже является периодическим.

Сепаратрисам 3 и 6 соответствуют асимптотические движения. Действительно, если в непосредственной окрестности неустойчивых

положений равновесия $\beta = \pm 90°$ уравнение сепаратрисы заменить приближенно уравнением касательной $\dot{\beta} = -c(\beta \mp \pi/2)$, то, решив это дифференциальное уравнение, получим

$$\beta = \pm \pi/2 + [\beta(0) \mp \pi/2]\, e^{-ct}.$$

Следовательно, вершина гироскопа может лишь асимптотически приближаться к неустойчивому полюсу, подобно плоскому маятнику, приближающемуся к верхнему положению равновесия.

Из фазового портрета на рис. 4.6 можно найти движение гироскопа только по углу β. Однако, используя (4.38), нетрудно построить график зависимости $\dot{\alpha}(\beta)$, позволяющий определить и азимутальное движение гироскопа. Формула (4.38) не содержит постоянной энергии E_0, поэтому данной *потенциальной кривой* $f(\beta)$ соответствует только одна кривая $\dot{\alpha}(\beta)$.

Если варьировать постоянные интегрирования ω_0 и H_0, определяемые равенствами (4.35) и (4.36), то получатся различные виды графиков функции $f(\beta)$ и соответственно различные фазовые портреты. На рис. 4.7 показан характер изменения графика функции $f(\beta)$ при варьировании H_0. Исходя из этих данных, нетрудно

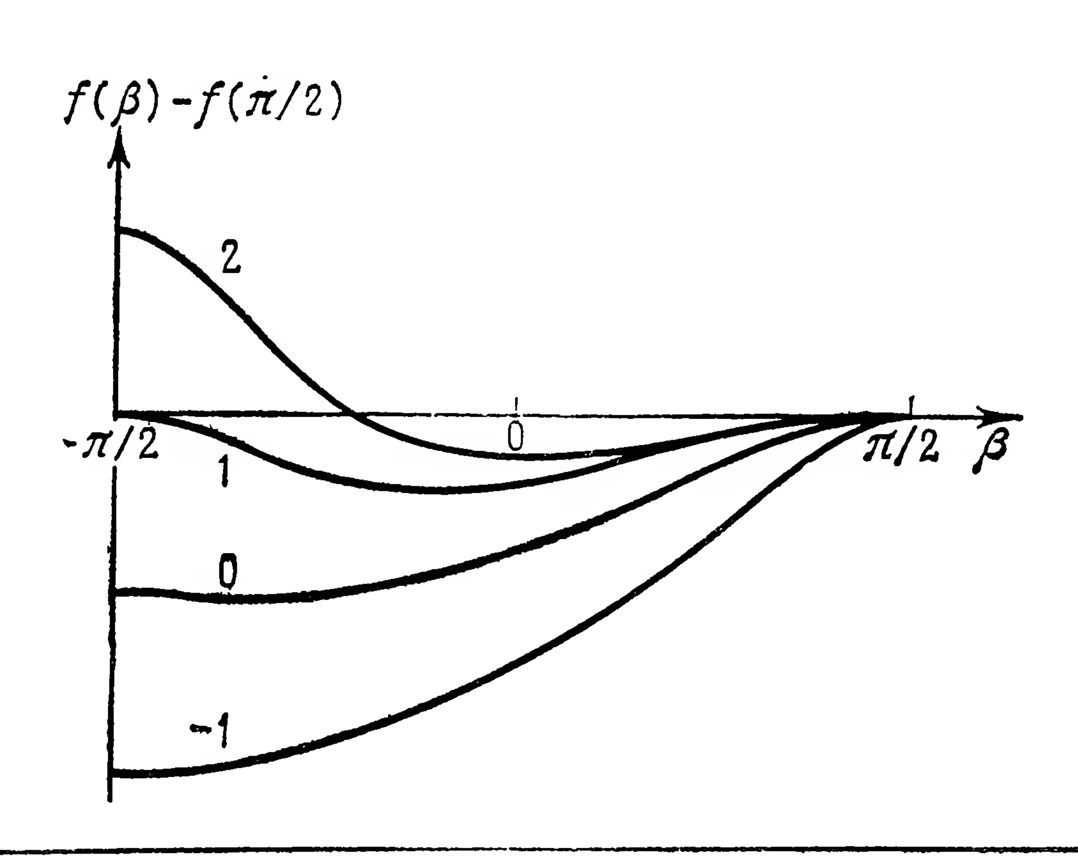


Рис. 4.7. Графики потенциальной функции для тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе при различных значениях начального кинетического момента H_0.

дать обзор всех возможных форм движения, однако такой подробный анализ мы здесь проводить не будем.

Следует только указать на то, что каждой точке максимума функции $f(\beta)$ соответствует неустойчивое положение равновесия, а каждой точке минимума — устойчивое положение равновесия. В фазовой плоскости положения равновесия обоих типов изображаются точками на оси β. Однако если устойчивое положение равновесия окружается соседними фазовыми траекториями (поэтому

его называют *центром*), то вблизи неустойчивого положения равновесия фазовые траектории похожи на гиперболы, центр симметрии которых совпадает с неустойчивым положением равновесия (поэтому его называют *седлом*). Сепаратрисы, проходящие через седло, будут *асимптотами* фазовых траекторий. Через каждую точку фазовой плоскости, за исключением положений равновесия, являющихся особыми точками, проходит одна-единственная фазовая траектория. Следовательно, любым заданным начальным условиям соответствует однозначно определенное движение гироскопа в кардановом подвесе.

4.3.3. Частные решения. Исходное уравнение для угла β, которое мы еще не рассматривали, допускает, как легко показать, два частных решения, представляющих особый интерес. Используя (4.33) и (4.34), запишем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \beta}+\frac{\partial U}{\partial \beta}=0$$

в развернутом виде:

$$B\ddot{\beta}+(A^R+A^J-C^J)\sin\beta\cos\beta\dot{\alpha}^2-C^R\omega_0\cos\beta\dot{\alpha}+Gs\cos\beta=0. \quad (4.45)$$

Это уравнение имеет частное решение $\beta=\beta_0$, если

$$[\dot{\alpha}^2(A^R+A^J-C^J)\sin\beta_0-\dot{\alpha}C^R\omega_0+Gs]\cos\beta_0=0. \quad (4.46)$$

Данное условие выполняется в двух случаях:

a) $\cos\beta_0=0;\quad \beta_0=\pm\pi/2;$ (4.47)

b) $$\left.\begin{matrix}\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_1\\ \dot{\alpha}=\dot{\alpha}_2\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{C^R\omega_0}{2(A^R+A^J-C^J)\sin\beta_0}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4Gs(A^R+A^J-C^J)\sin\beta_0}{(C^R)^2\omega_0^2}}\right]. \quad (4.48)$$

Таким образом, при движении гироскопа в кардановом подвесе возможны такие стационарные режимы, когда ось ротора занимает вертикальное положение (случай a)) или образует произвольный, но постоянный угол β_0 с горизонтальной плоскостью (случай b)). В последнем случае азимутальные движения гироскопа должны происходить с угловыми скоростями $\dot{\alpha}_1$ или $\dot{\alpha}_2$, которые определяются из (4.48). Такое движение называется *регулярной прецессией*, причем угловой скорости $\dot{\alpha}_1$ соответствует, как и для гироскопа Лагранжа, *быстрая прецессия* (лучше сказать *нутация*), а угловой скорости $\dot{\alpha}_2$ — *медленная прецессия*. Зависимость этих угловых скоростей от β_0 показана на рис. 4.8. Если ось ротора нахо-

дится в горизонтальной плоскости ($\beta_0 = 0$), то может осуществляться только медленная прецессия с угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = \frac{Gs}{C^R \omega_0}.$$

Как и в случае гироскопа Лагранжа, нутация и прецессия гироскопа в кардановом подвесе для стоячего гироскопа имеют одинаковые направления, а для висячего гироскопа — противоположные.

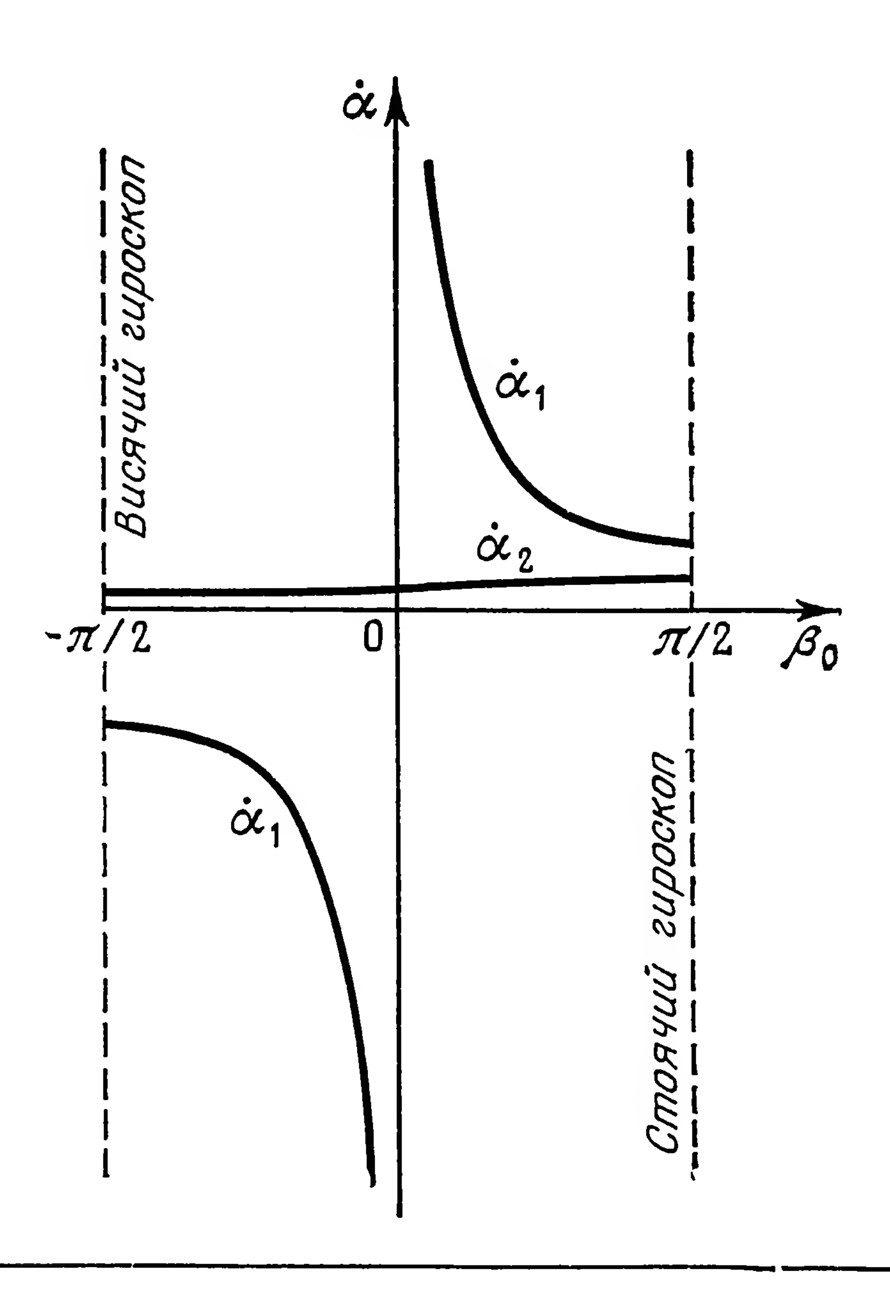


Рис. 4.8. Зависимость угловых скоростей прецессии и нутации тяжелого симметричного гироскопа в кардановом подвесе от угла наклона β_0 оси ротора.

При обычной конструкции гироскопа в кардановом подвесе выполняется условие $C^J < A^R + A^J$, поэтому подкоренное выражение в формуле (4.48) будет заведомо положительным, если $s \sin \beta_0 < 0$. Данное неравенство означает, что центр тяжести находится ниже точки подвеса (висячий гироскоп). Для стоячего гироскопа действительные значения $\dot{\alpha}_{1,2}$ возможны лишь при достаточно быстро вращающемся роторе. При медленно вращающемся роторе существует, правда, частное решение (4.47), однако оно, как будет показано в п. 4.3.4, для стоячего гироскопа неустойчиво.

4.3.4. Устойчивость вертикального положения оси гироскопа в кардановом подвесе. Частное решение (4.47) допускает произвольные,

но постоянные угловые скорости вращения ротора и внешней рамки, так как при $\cos\beta = 0$ из (4.35) и (4.38) следует, что $\dot\alpha = \dot\alpha_0$ и $\dot\gamma = \dot\gamma_0$. Но устойчивым будет не любое из этих возможных движений. Это нетрудно показать, если рассмотреть возмущенное движение, для которого значения угла β близки к $\beta = \pi/2$. Сделаем в уравнении (4.45) замену $\beta = \pi/2 + \vartheta$, где угол Эйлера ϑ считаем малой величиной: $|\vartheta| \ll 1$, так что $\sin\beta \approx 1$, $\cos\beta \approx -\vartheta$; в результате получим

$$B\ddot\vartheta + [-\dot\alpha^2(A^R + A^J - C^J) + \dot\alpha C^R\omega_0 - Gs]\vartheta = B\ddot\vartheta + r(\dot\alpha)\vartheta = 0. \quad (4.49)$$

Выражение в квадратных скобках, которое мы обозначили через $r(\dot\alpha)$, можно считать коэффициентом восстанавливающей силы. Любое решение $\vartheta(t)$ будет устойчивым тогда и только тогда, когда

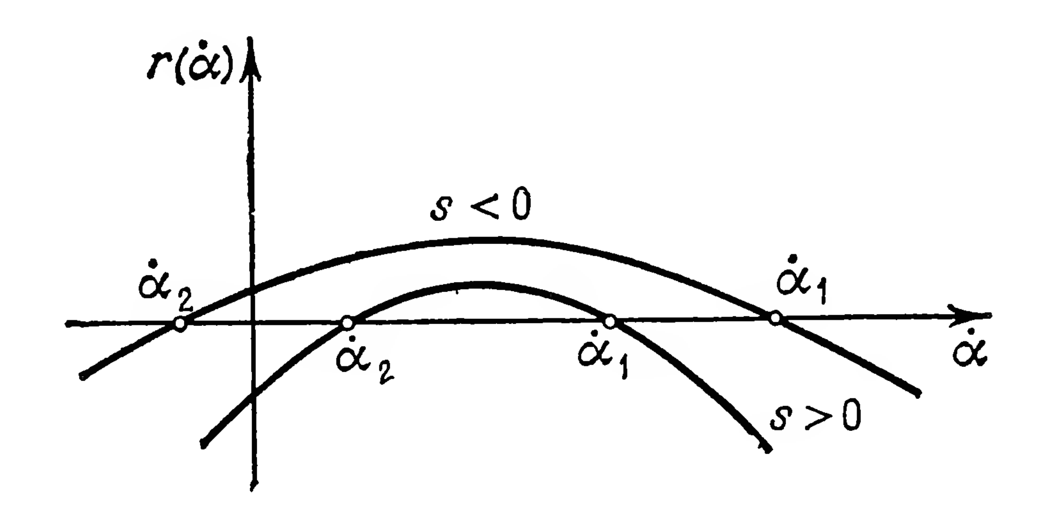


Рис. 4.9. График коэффициента $r(\dot\alpha)$ восстанавливающей силы при малых отклонениях от вертикали оси гироскопа в кардановом подвесе.

коэффициент $r(\dot\alpha)$ положителен. На рис. 4.9 представлен график зависимости $r(\dot\alpha)$. Условие $r(\dot\alpha) > 0$ выполняется лишь в интервале

$$\dot\alpha_2 < \dot\alpha < \dot\alpha_1. \quad (4.50)$$

Таким образом, устойчивость вертикального положения оси гироскопа в кардановом подвесе имеет место только тогда, когда величина угловой скорости внешней рамки лежит в определенном интервале. Для висячего гироскопа ($s < 0$) имеем

$$\dot\alpha_2 < 0 < \dot\alpha_1,$$

а для стоячего ($s > 0$)

$$0 < \dot\alpha_2 < \dot\alpha_1.$$

Отсюда, в частности, следует, что стоячий гироскоп с неподвижной внешней рамкой и сколь угодно быстро вращающимся ротором неустойчив. Он будет устойчив, если внешняя рамка вращается в ту же сторону, что и ротор, с угловой скоростью $\dot\alpha$, удовлетворяющей условию (4.50). Висячий гироскоп будет, напротив, устойчив при $\dot\alpha = 0$ и даже при не слишком быстром вращении внешней рамки в направлении, противоположном направлению вращения

ротора. Граничные значения для $\dot{\alpha}$ являются в силу (4.49) корнями квадратного уравнения $r(\dot{\alpha})=0$; их можно найти и из (4.48) при $\beta_0=\pi/2$ и $s>0$. Эти корни будут действительными, если

$$C^R\omega_0 \geqslant \sqrt{4Gs(A^R+A^J-C^J)}. \tag{4.51}$$

При $A^J=C^J=0$ это неравенство переходит в условие (3.70) устойчивости гироскопа Лагранжа, поэтому его можно рассматривать как обобщение (3.70). Но в случае гироскопа в кардановом подвесе к (4.51) следует присоединить в качестве необходимого условия устойчивости двойное неравенство (4.50).

Указанные условия устойчивости были получены методом малых колебаний из линеаризованного уравнения движения (4.49) и являются необходимыми условиями. Покажем, что в данном случае они оказываются и достаточными условиями устойчивости. Для этого мы будем исследовать устойчивость прямым методом Ляпунова (см., например, книгу Четаева [32]).

Мы рассматриваем частное решение

$$\beta=\beta_0=\pi/2, \quad \dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0, \quad \dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0.$$

Возмущенному решению соответствуют отклонения x_1, x_2, x_3, так что

$$\beta=\pi/2+x_1, \quad \dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0+x_2, \quad \dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0+x_3. \tag{4.52}$$

Относительно величин x_1, x_2, x_3 уже нет необходимости предполагать, что они малы. Целесообразно ввести еще одну зависимую от предыдущих величину

$$x_4^2=1-\cos x_1=1-\sin\beta \geqslant 0. \tag{4.53}$$

Далее мы должны, следуя Четаеву, построить по трем известным первым интегралам уравнений движения функцию Ляпунова, разложение которой по степеням отклонений должно начинаться с квадратичных членов, образующих знакоопределенную форму.

Первый интеграл (4.35) в силу (4.52) и (4.53) приводится к виду

$$x_2+x_3-\dot{\alpha}_0x_4^2-x_3x_4^2=K_1, \tag{4.54}$$

где K_1 — новая постоянная. Аналогично интеграл кинетического момента (4.36) и интеграл энергии (4.37) запишем, используя новые постоянные K_2 и K_3 и обозначения

$$A^A+C^J=P, \quad A^R+A^J-C^J=Q, \tag{4.55}$$

следующим образом:

$$x_3P+x_4^2(2\dot{\alpha}_0Q-C^R\omega_0)+x_3x_4^2 2Q-x_4^4\dot{\alpha}_0Q-x_3x_4^4Q=K_2, \tag{4.56}$$

$$x_3 2\dot{\alpha}_0P+\dot{x}_1^2B+x_3^2P+x_4^2 2(\dot{\alpha}_0^2Q-Gs)+x_3x_4^2 4\dot{\alpha}_0Q-$$
$$-x_4^4\dot{\alpha}_0^2Q-x_3x_4^4 2\dot{\alpha}_0Q+x_3^2x_4^2 2Q-x_3^2x_4^4Q=K_3. \tag{4.57}$$

Функцию Ляпунова V возьмем в виде

$$V = K_3 + \lambda_1 K_1^2 + \lambda_2 K_2; \qquad (4.58)$$

значения постоянных множителей λ_1 и λ_2 будут выбраны позднее. Полная производная по времени от этой функции обращается тождественно в нуль: $dV/dt \equiv 0$, так как V является линейной комбинацией постоянных. На основании теоремы Ляпунова для устойчивости рассматриваемого решения достаточно, чтобы при надлежаще подобранных коэффициентах λ_1 и λ_2 разложение функции V по степеням аргументов x_i начиналось со знакоопределенной квадратичной формы. Используя (4.54), (4.56) и (4.57), нетрудно установить, что линейная часть функции (4.58) имеет вид $x_3 Q(\lambda_2 + 2\dot{\alpha}_0)$ и для ее исключения следует выбрать $\lambda_2 = -2\dot{\alpha}_0$; тогда функция Ляпунова запишется следующим образом:

$$V = \dot{x}_1^2 B + (x_2 + x_3)^2 \lambda_1 + x_3^2 P + x_4^2 2(\dot{\alpha}_0 C^R \omega_0 - Gs - \dot{\alpha}_0^2 Q) + \\ + \{-(x_2 + x_3) x_4^2 2\lambda_1 \dot{\alpha}_0 - x_2 x_3 x_4^2 2\lambda_1 + x_3^2 x_4^2 2(Q - \lambda_1) + \\ + x_4^4 \dot{\alpha}_0^2 (Q + \lambda_1) + x_2^2 x_4^4 (\lambda_1 - Q)\}. \qquad (4.59)$$

Члены, заключенные в фигурные скобки, имеют порядок малости выше второго и не влияют на дальнейшее исследование. Квадратичная форма, образованная первыми четырьмя слагаемыми, будет определенно-положительной, если

$$\lambda_1 > 0$$

и

$$\dot{\alpha}_0 C^R \omega_0 - Gs - \dot{\alpha}_0^2 Q \geqslant 0, \qquad (4.60)$$

ибо коэффициенты B и P заведомо положительны. Первому требованию можно удовлетворить всегда, взяв в качестве λ_1 любое положительное число. Следовательно, в качестве единственного, но теперь уже достаточного условия устойчивости остается неравенство (4.60), которое совпадает с полученным ранее условием положительности коэффициента восстанавливающей силы $r(\dot{\alpha})$ в формуле (4.49). Тем самым показано, что найденные выше условия (4.50) и (4.51) устойчивости рассматриваемого движения относительно переменных β, $\dot{\beta}$, $\dot{\alpha}$ и $\dot{\gamma}$ являются необходимыми и достаточными.

4.4. Уход астатического симметричного гироскопа в кардановом подвесе

Гироскоп в кардановом подвесе будет астатическим, если распределение масс ротора и внутренней рамки таково, что их общий центр масс совпадает с точкой подвеса (точкой пересечения осей карданова подвеса); ось такого гироскопа может сохранять любое направление в пространстве. Однако в отличие от одного твердого

тела, например опирающегося на острие в центре тяжести, астатический гироскоп в кардановом подвесе нельзя считать свободным от действия внешних сил, так как на систему могут передаваться через подшипники внешней рамки возникающие в них реактивные моменты, векторы которых перпендикулярны оси внешней рамки. Возможно, что при колебаниях оси ротора моменты могут привести к изменению ее среднего направления, т. е. к уходу (дрейфу) гироскопа. Этот эффект играет особую роль при практических приложениях гироскопа в кардановом подвесе, поэтому рассмотрим его подробнее на одном примере и укажем способ приближенного аналитического исследования.

Если в результатах, полученных в предыдущих параграфах, положить $s = 0$, то они будут относиться к астатическому гироскопу в кардановом подвесе. Особенно нас интересуют точные решения, которые могут быть найдены путем численного интегрирования

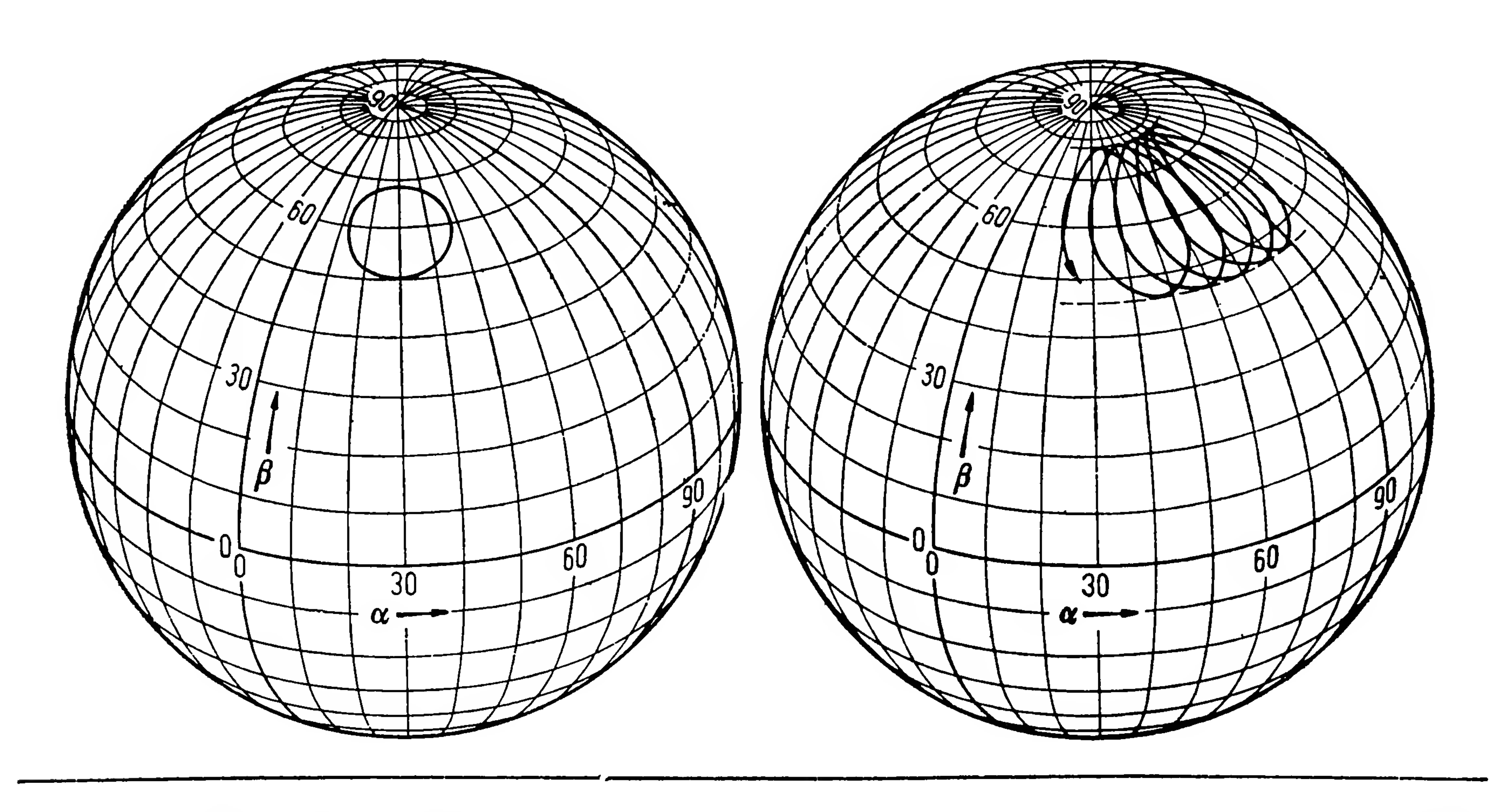


Рис 4.10. Траектория вершины астатического гироскопа, опирающегося на острие (слева) и в кардановом подвесе (справа).

уравнения (4.41). Два из них показаны на рис. 4.10. Слева изображена траектория вершины астатического гироскопа без карданова подвеса (гироскопа, опирающегося на острие), соответствующая его нутационным колебаниям [1]). В этом случае ось гироскопа движется по поверхности прямого кругового конуса, поэтому на единичной сфере с центром в начале координат траектория представляет собой окружность — кривую пересечения конуса нутации со сферой. Справа показана траектория вершины гироскопа в кардановом подвесе при тех же самых начальных условиях. Кроме

[1]) Для астатического симметричного гироскопа без карданова подвеса решение уравнений движения выражается через элементарные функции. — *Прим. ред.*

деформации траектории, здесь наблюдается смещение среднего положения оси ротора вдоль одной из параллелей. Сама траектория лежит между двумя граничными параллелями.

Для применяемых на практике быстровращающихся гироскопов амплитуда нутационных колебаний мала, и мы воспользуемся этим обстоятельством в процессе приближенного решения уравнений движения, имеющих вид

$$\ddot{\alpha}\,[A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta] - \dot{\alpha}\dot{\beta}\,(A^R + A^J - C^J)\sin 2\beta + \\ + \dot{\beta}C^R\omega_0\cos\beta = 0, \quad (4.61)$$
$$\ddot{\beta}B + \dot{\alpha}^2(A^R + A^J - C^J)\sin\beta\cos\beta - \dot{\alpha}C^R\omega_0\cos\beta = 0.$$

Первое уравнение мы получили дифференцированием по времени равенства (4.36), второе следует из (4.45) при $s = 0$.

Уравнения (4.61) имеют частное решение $\dot{\alpha} = 0$, $\beta = \beta_0$, означающее, что ось вращающегося гироскопа может принимать и сохранять произвольное фиксированное в пространстве направление. Для близких движений положим

$$\beta = \beta_0 + x, \qquad \dot{x} = \dot{\beta}, \quad (4.62)$$

где отклонение x считается достаточно малым, чтобы можно было пренебречь его квадратом и считать $\sin\beta \approx \sin\beta_0 + x\cos\beta_0$, $\cos\beta \approx \cos\beta_0 - x\sin\beta_0$. Тогда уравнения (4.61) переходят в систему уравнений

$$\ddot{\alpha}A^0 + \dot{\beta}C^R\omega_0\cos\beta_0 = R_\alpha, \\ \ddot{\beta}B - \dot{\alpha}C^R\omega_0\cos\beta_0 = R_\beta. \quad (4.63)$$

Здесь введены обозначения

$$R_\alpha = \dot{\alpha}\dot{\beta}\,(A^R + A^J - C^J)\sin 2\beta_0 + x\,[\ddot{\alpha}\,(A^R + A^J - C^J)\sin 2\beta_0 + \\ + \dot{\alpha}\dot{\beta}\,(A^R + A^J - C^J)\,2\cos 2\beta_0 + \dot{\beta}C^R\omega_0\cos\beta_0],$$
$$R_\beta = -\dot{\alpha}^2\,(A^R + A^J - C^J)\sin\beta_0\cos\beta_0 - \\ - x\,[\dot{\alpha}^2(A^R + A^J - C^J)\cos 2\beta_0 + \dot{\alpha}C^R\omega_0\sin\beta_0],$$
$$A^0 = A\cos^2\beta_0 + (A^A + C^J)\sin^2\beta_0.$$

Правые части R_α и R_β представляют совокупность оставленных в уравнениях нелинейных членов. Уравнения будем решать методом итераций, причем на первом итерационном шаге полагаем $R_\alpha = R_\beta = 0$. Полученная система линейных однородных уравнений имеет решение

$$\alpha = \alpha_A\cos\omega_N t, \\ \beta = \beta_0 + \beta_A\sin\omega_N t = \beta_0 + \alpha_A\sqrt{A^0/B}\,\sin\omega_N t. \quad (4.64)$$

Через α_A обозначена амплитуда нутационных колебаний по углу α, частота которых ω_N определяется формулой

$$\omega_N = \frac{C^R \omega_0 \cos \beta_0}{\sqrt{A^0 B}}. \tag{4.65}$$

Траекторией вершины гироскопа на картинной плоскости, соответствующей решению (4.64), будет эллипс, параметры которого зависят от моментов инерции и от угла β_0.

Чтобы сделать второй итерационный шаг, следует подставить найденное в первом приближении решение (4.64) в уравнения (4.63); получится система линейных неоднородных уравнений, правые части которых содержат периодические слагаемые с частотами ω_N, $2\omega_N$, $3\omega_N$ и постоянные слагаемые, возникающие при перемножении тригонометрических функций. Мы будем искать только среднюю скорость ухода. Исключая из рассмотрения налагающиеся на уход колебания, осредним полученные уравнения за малый период нутации $T_N = 2\pi/\omega_N$. Средние значения правых частей будут равны

$$\begin{aligned} \bar{R}_\alpha &= \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} R_\alpha \, dt = 0, \\ \bar{R}_\beta &= \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} R_\beta \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \alpha_A^2 \omega_N \sin \beta_0 \left[C^R \omega_0 \sqrt{\frac{A^0}{B}} - (A^R + A^J - C^J) \, \omega_N \cos \beta_0 \right], \end{aligned} \tag{4.66}$$

а средние значения производных от углов α и β определяются, как следует из (4.63), равенствами

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\bar{R}_\beta}{C^R \omega_0 \cos \beta_0}, \quad \bar{\dot{\beta}} = \frac{\bar{R}_\alpha}{C^R \omega_0 \cos \beta_0}.$$

Используя (4.65) и (4.66), окончательно находим

$$\bar{\dot{\alpha}} = -\frac{\alpha_A^2 C^R \omega_0 \sin \beta_0 (A^A + C^J)}{2 A^0 B}, \quad \bar{\dot{\beta}} = 0. \tag{4.67}$$

Таким образом, осредненное движение оси гироскопа совершается по поверхности прямого кругового конуса, ось которого совпадает с осью внешней рамки, со средней угловой скоростью $\bar{\dot{\alpha}}$, пропорциональной квадрату амплитуды нутационных колебаний α_A и собственному кинетическому моменту $C^R \omega_0$; кроме того, средняя скорость ухода зависит от среднего угла поворота β_0 внутренней рамки и моментов инерции. При $\beta_0 = 0$ ухода гироскопа не происходит. Средний угол поворота β_0 внутренней рамки остается постоянным, так как $\bar{\dot{\beta}} = 0$.

Механическое объяснение того факта, что движение оси гироскопа, вдоль которой направлен вектор собственного кинетического момента, происходит только в азимутальном направлении, состоит в следующем: при отсутствии трения через подшипники вертикальной оси внешней рамки могут передаваться только моменты, векторы которых лежат в горизонтальной плоскости, поэтому конец вектора кинетического момента может двигаться только вдоль параллели.

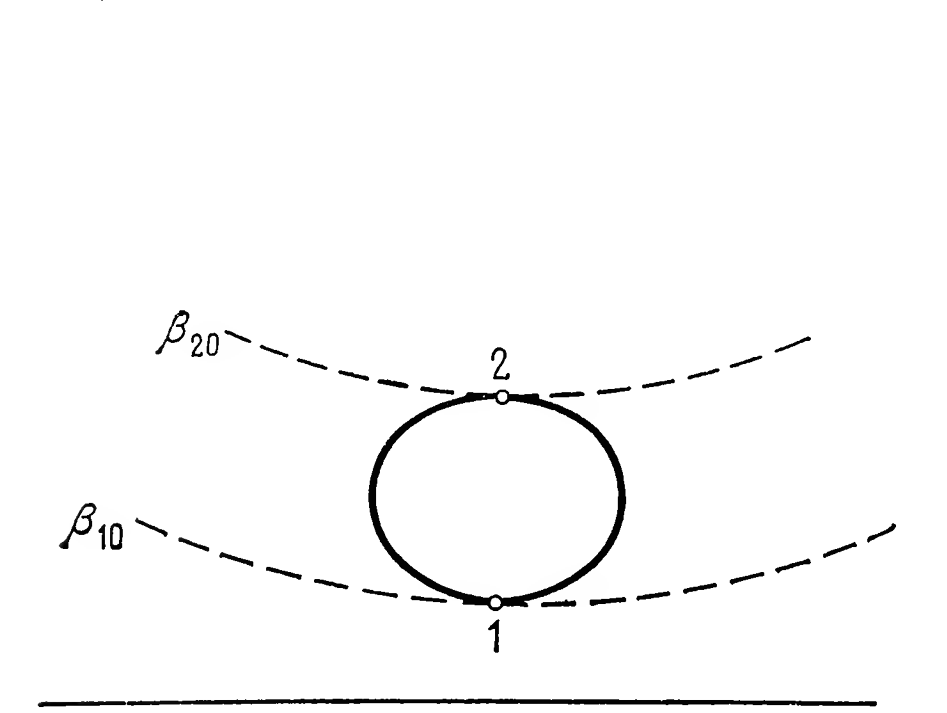


Рис. 4.11. К качественному объяснению явления ухода астатического гироскопа в кардановом подвесе под влиянием нутационных колебаний.

Рис. 4.12 Зависимость момента инерции A^0 всей системы относительно оси внешней рамки от угла β_0 наклона гироскопа.

Другое наглядное объяснение того же явления можно дать с помощью закона сохранения энергии. В первом приближении вершина гироскопа движется по замкнутой кривой между двумя граничными параллелями (рис. 4.11). В положениях 1 и 2 имеем $\dot\beta = 0$, поэтому в этих точках энергия всей системы

$$T = {}^1/_2 A^0 \dot\alpha^2 + {}^1/_2 C^R \omega_0^2. \qquad (4.68)$$

Второе слагаемое здесь постоянно, значит, первое слагаемое в положениях 1 и 2 должно иметь одинаковые значения. График, показывающий зависимость (4.63/3) момента инерции A^0 всей системы относительно вертикальной оси от угла β_0, построен на рис. 4.12, где

$$A^0(\beta_{20}) < A^0(\beta_{10})$$

и, следовательно,

$$|\dot\alpha(\beta_{20})| > |\dot\alpha(\beta_{10})|.$$

Таким образом, если $\beta_0 > 0$, то азимутальная скорость на верхней граничной параллели больше, чем на нижней, так что действительная траектория не будет замкнутой, и средний уход совершается в направлении, совпадающем с направлением движения в точке 2, лежащей на верхней граничной параллели.

Нутационные колебания гироскопа, будучи свободными колебаниями, неизбежно должны затухать. При уменьшении амплитуды α_A нутационных колебаний средняя скорость ухода $\bar{\dot{\alpha}}$ тоже уменьшается, так что при $\bar{\dot{\alpha}} \to 0$ угол ухода гироскопа стремится к конечному значению.

4.5. Устойчивость астатического несимметричного гироскопа в кардановом подвесе

Устойчивые движения гироскопа в кардановом подвесе с несимметричным ротором коренным образом отличаются от известных устойчивых движений одного твердого тела в случае Эйлера (гл. 2), когда устойчивыми являются вращения вокруг двух главных осей инерции, а вращение вокруг третьей оси неустойчиво. Для гироскопа в кардановом подвесе тоже возможны вращения вокруг осей, с которыми совпадают главные оси инерции всех трех тел. Их устойчивость зависит не только от формы одного ротора, но и от распределения масс обеих рамок. Оказывается, например, что в описанном ниже устройстве, с помощью которого Прандтль демонстрировал устойчивость эйлеровых вращений, можно также

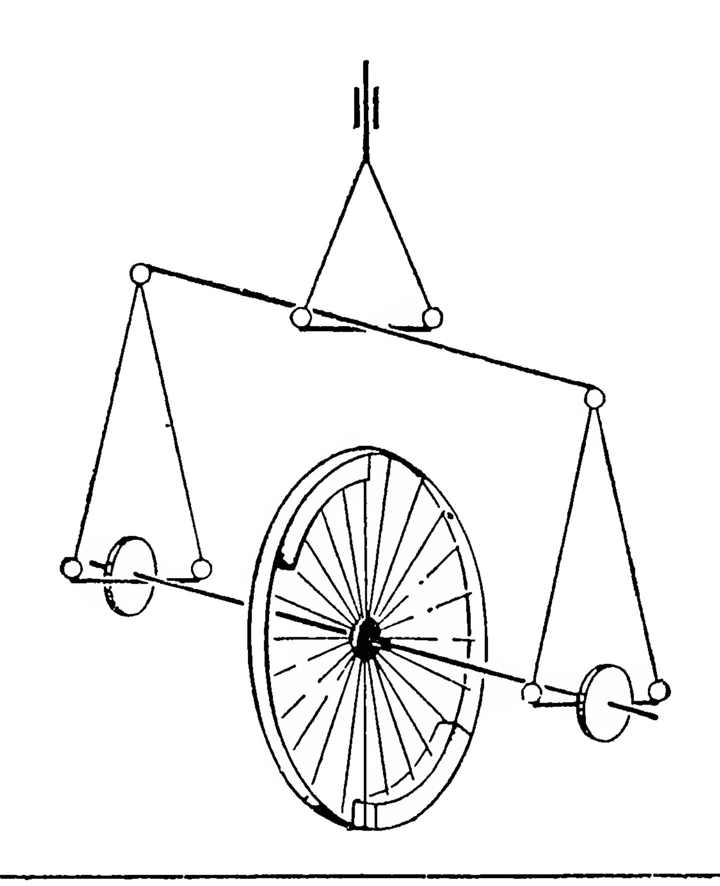


Рис. 4.13. Колесо Прандтля.

получить устойчивые вращения ротора вокруг всех трех его главных осей или случай, когда вращение ротора вокруг одной из главных осей устойчиво, а вокруг двух остальных неустойчиво.

Остроумный прибор Прандтля представляет собой выложенный свинцом обод велосипедного колеса, которому с помощью стержневого подвеса обеспечено свободное вращение вокруг трех осей (рис. 4.13). На ободе закреплены еще два дополнительных груза, поэтому его главные моменты инерции попарно не равны.

Стационарными движениями в рассматриваемом устройстве являются

1) вращение вокруг оси ротора,

2) вращение вокруг вертикальной оси подвеса при таком положении невращающегося ротора, что дополнительные грузы находятся на наибольшем расстоянии от вертикальной оси,

3) то же, что и в случае 2, но при повернутом на 90° роторе. Эти движения мы будем называть *вращениями Прандтля*.

С помощью других дополнительных грузов, помещенных на удлиненной оси ротора, можно изменять моменты инерции всей системы и добиться того, чтобы момент инерции относительно оси ротора оказался наибольшим, средним или наименьшим среди главных моментов инерции всей системы.

Три вращения Прандтля по существу можно указать и для гироскопа в кардановом подвесе. При этом указанные выше отличия от эйлеровых движений проявляются даже лучше, чем для колеса Прандтля. Кроме того, гироскоп в кардановом подвесе допускает любой угол поворота вокруг оси внутренней рамки, в то время как соответствующий угол поворота стержневого подвеса колеса Прандтля ограничен возможностью опрокидывания. В то же время оказывается, что наклон внутренней рамки существенно влияет на устойчивость вращения вокруг оси ротора. Это будет показано ниже.

4.5.1. Уравнения движения и частные решения. В силу (4.31) и (4.32) кинетическая энергия несимметричного гироскопа в кардановом подвесе записывается в виде

$$T = {}^1/_2 \{\dot\alpha^2 [\cos^2\beta\,(A^R\cos^2\gamma + B^R\sin^2\gamma + A^J + A^A) + \sin^2\beta\,(C^R + C^J + A^A)] + \dot\beta^2 (A^R\sin^2\gamma + B^R\cos^2\gamma + B^J) + \dot\gamma^2 C^R + \dot\alpha\dot\beta\,(A^R - B^R)\cos\beta\sin 2\gamma + \dot\alpha\dot\gamma 2C^R\sin\beta\}. \quad (4.69)$$

Это выражение при $A^R = B^R$ переходит в (4.34). Но теперь вместе с производной от угла γ в него входит и сам угол, который уже не является циклической координатой. Поэтому здесь не удается получить достаточное количество интегралов уравнений движения, чтобы найти их общее решение, как это было сделано в случае симметричного ротора в п. 4.3. Мы выпишем сами уравнения движения и укажем некоторые частные решения.

Уравнения движения, полученные из (1.87) и (4.69), имеют при $U = 0$ следующий вид:

$$\ddot\alpha\,[\cos^2\beta\,(A^R\cos^2\gamma + B^R\sin^2\gamma + A^J + A^A) + \sin^2\beta\,(C^R + C^J + A^A)] + \ddot\beta\,{}^1/_2\,(A^R - B^R)\cos\beta\sin 2\gamma + \ddot\gamma C^R\sin\beta - \dot\alpha\dot\beta\sin 2\beta\,(A^R\cos^2\gamma + B^R\sin^2\gamma + A^J - C^R - C^J) - \dot\alpha\dot\gamma\,(A^R - B^R)\cos^2\beta\sin 2\gamma - \dot\beta^2\,{}^1/_2\,(A^R - B^R)\sin\beta\sin 2\gamma + \dot\beta\dot\gamma\cos\beta\,[(A^R - B^R)\cos 2\gamma + C^R] = 0, \quad (4.70)$$

$$\ddot{\alpha}{}^1/_2(A^R - B^R)\cos\beta\sin 2\gamma + \ddot{\beta}(A^R\sin^2\gamma + B^R\cos^2\gamma + B^J) +$$
$$+ \dot{\alpha}^2{}^1/_2\sin 2\beta(A^R\cos^2\gamma + B^R\sin^2\gamma + A^J - C^R - C^J) +$$
$$+ \dot{\alpha}\dot{\gamma}\cos\beta[(A^R - B^R)\cos 2\gamma - C^R] + \dot{\beta}\dot{\gamma}(A^R - B^R)\sin 2\gamma = 0, \quad (4.71)$$

$$\ddot{\alpha}C^R\sin\beta + \ddot{\gamma}C^R + \dot{\alpha}^2{}^1/_2(A^R - B^R)\cos^2\beta\sin 2\gamma -$$
$$- \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta[(A^R - B^R)\cos 2\gamma - C^R] - \dot{\beta}^2{}^1/_2(A^R - B^R)\sin 2\gamma = 0. \quad (4.72)$$

Эта система трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка имеет следующие частные решения:

1) вращение ротора вокруг своей оси

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0, \quad (4.73)$$

где α_0, β_0, $\dot{\gamma}_0$ — произвольные постоянные;

2) вращение вокруг оси внешней рамки

a) $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$ (4.74)

b) $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \pi/2,$ (4.75)

c) $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0, \quad \beta = \pi/2, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0,$ (4.76)

где $\dot{\alpha}_0$ и $\dot{\gamma}_0$ — произвольные постоянные;

3) вращение вокруг оси внутренней рамки

a) $\alpha = \alpha_0, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0, \quad \gamma = 0,$ (4.77)

b) $\alpha = \alpha_0, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0, \quad \gamma = \pi/2,$ (4.78)

где α_0 и $\dot{\beta}_0$ — произвольные постоянные.

Вращениям Прандтля соответствуют случаи 1, 2a и 2b. Случай 2c, когда ось ротора совпадает с осью внешней рамки и рамки складываются, мы рассматривать не будем.

Далее будет исследована только устойчивость вращений Прандтля; относительно случаев 3a и 3b см. [31].

4.5.2. Вращение вокруг оси ротора. Для движений, близких к перманентному вращению (4.73), введем вариации x_1, x_2, x_3 переменных с помощью равенств

$$\alpha = \alpha_0 + x_1, \quad \beta = \beta_0 + x_2, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 + \dot{x}_3. \quad (4.79)$$

Уравнение (4.72) примет вид

$$C^R(\ddot{x}_1\sin\beta_0 + \ddot{x}_3) = Q_\gamma(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь через Q_γ обозначена совокупность членов, имеющих относительно вариаций второй или более высокий порядок малости. В первом приближении этими членами можно пренебречь, тогда

имеем $\ddot{x}_3 = -\ddot{x}_1 \sin\beta_0$. С учетом данного равенства уравнения движения (4.70) и (4.71) запишутся следующим образом:

$$\ddot{x}_1[\cos^2\beta_0(A^R\cos^2\gamma + B^R\sin^2\gamma + A^J + A^A) + \sin^2\beta_0(C^J + A^A)] + \\ + \ddot{x}_2{}^1/_2(A^R - B^R)\cos\beta_0\sin 2\gamma - \dot{x}_1\dot{\gamma}_0(A^R - B^R)\cos^2\beta_0\sin 2\gamma + \\ + \dot{x}_2\dot{\gamma}_0\cos\beta_0[(A^R - B^R)\cos 2\gamma + C^R] = Q_\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad (4.80)$$

$$\ddot{x}_1{}^1/_2(A^R - B^R)\cos\beta_0\sin 2\gamma + \ddot{x}_2(A^R\sin^2\gamma + B^R\cos^2\gamma + B^J) + \\ + \dot{x}_1\dot{\gamma}_0\cos\beta_0[(A^R - B^R)\cos 2\gamma - C^R] + \dot{x}_2\dot{\gamma}_0(A^R - B^R)\sin 2\gamma = \\ = Q_\beta(x_1, x_2, x_3). \quad (4.81)$$

Левые части этих уравнений состоят из линейных относительно x_1 и x_2 слагаемых с переменными коэффициентами (угол γ линейно возрастает со временем: $\gamma = \dot{\gamma}_0 t$).

Довольно громоздкие уравнения (4.80) и (4.81) можно привести к обозримой форме, если вместо производных $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$, совпадающих с вариациями угловых скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, использовать переменные u и v, которые являются вариациями компонент ω_1^R и ω_2^R угловой скорости ротора. На основании (4.32) переход от старых переменных к новым дается преобразованием

$$\begin{aligned} u &= \dot{x}_1\cos\beta_0\cos\gamma + \dot{x}_2\sin\gamma, \\ v &= -\dot{x}_1\cos\beta_0\sin\gamma + \dot{x}_2\cos\gamma, \end{aligned} \quad (4.82)$$

означающим введение системы координат, связанной с ротором. После замены (4.82) уравнения (4.80) и (4.81) приводятся к следующему виду:

$$(A^R + \Theta^S)\dot{u} - [(B^R + \Theta^S) - C^R]v\dot{\gamma}_0 = \\ = -\Theta^D[(\dot{u} - \dot{\gamma}_0 v)\cos 2\gamma - (\dot{v} + \dot{\gamma}_0 u)\sin 2\gamma] + Q_\alpha\frac{\cos\gamma}{\cos\beta_0} + Q_\beta\sin\gamma,$$

$$(B^R + \Theta^S)\dot{v} - [C^R - (A^R + \Theta^S)]u\dot{\gamma}_0 = \\ = -\Theta^D[(\dot{u} - \dot{\gamma}_0 v)\sin 2\gamma + (\dot{v} + \dot{\gamma}_0 u)\cos 2\gamma] - Q_\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\beta_0} + Q_\alpha\cos\gamma, \quad (4.83)$$

$$\Theta^S = \frac{1}{2}(A^J + B^J) + \frac{1}{2}C^J\,\mathrm{tg}^2\beta_0 + \frac{A^A}{2\cos^2\beta_0} = \Theta^S(\beta_0),$$

$$\Theta^D = \frac{1}{2}(A^J - B^J) + \frac{1}{2}C^J\,\mathrm{tg}^2\beta_0 + \frac{A^A}{2\cos^2\beta_0} = \Theta^D(\beta_0).$$

В величинах Θ^S и Θ^D находит свое выражение влияние инерционности карданова подвеса. Для безынерционных рамок $\Theta^S = \Theta^D = 0$, и в этом случае левые части уравнений (4.83) совпадают с левыми частями двух первых уравнений Эйлера, записанных для ротора. Величины Θ^S и Θ^D можно толковать как добавки, которые следует присоединить к моментам инерции ротора, чтобы учесть влияние рамок, причем оно зависит от положения внутренней рамки,

Соответственно принятому в теории малых колебаний подходу мы пренебрежем величинами Q_α и Q_β, которые имеют порядок малости выше первого. В результате получим систему линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами, которая в двух особых случаях может быть решена элементарно. Таковыми являются

$$1)\quad \Theta^D = 0 \tag{4.84}$$

или

$$2)\quad \begin{aligned} \dot{u} - \dot{\gamma}_0 v &= 0, \\ \dot{v} + \dot{\gamma}_0 u &= 0. \end{aligned} \tag{4.85}$$

Случай 1) с достаточной точностью реализуется колесом Прандтля (рис. 4.13), подвес которого подобен карданову подвесу; случай 2) имеет место для стержнеобразного ротора, у которого $C^R = 0$, $A^R = B^R$. В обоих случаях в уравнениях (4.83) остаются только их левые части, т. е. приходим к системе линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами, решением которой будет

$$\begin{gathered} u = u_0 \cos(\nu t - \varphi), \qquad v = v_0 \sin(\nu t - \varphi), \\ \nu = \sqrt{\frac{(A^R + \Theta^S - C^R)(B^R + \Theta^S - C^R)}{(A^R + \Theta^S)(B^R + \Theta^S)}}, \\ \frac{v_0}{u_0} = -\dot{\gamma}_0 \sqrt{\frac{(A^R + \Theta^S)(A^R + \Theta^S - C^R)}{(B^R + \Theta^S)(B^R + \Theta^S - C^R)}}. \end{gathered} \tag{4.86}$$

Необходимым условием устойчивости движения, описываемого равенствами (4.86), является условие

$$\nu^2 > 0, \quad \text{или} \quad (A^R + \Theta^S - C^R)(B^R + \Theta^S - C^R) > 0. \tag{4.87}$$

Отсюда можно заключить, что движение будет заведомо неустойчивым, если

$$A^R > C^R - \Theta^S > B^R. \tag{4.88}$$

Если условие (4.88) не выполняется, то линеаризованная система (4.83) с отброшенными правыми частями будет устойчива в смысле Ляпунова. Тем самым найдено необходимое условие устойчивости для исходной нелинейной системы уравнений (4.70)—(4.72). Но, согласно известной теореме Ляпунова, это условие не является достаточным.

Условие неустойчивости (4.88) было получено только для двух особых случаев, а именно для (4.84) и (4.85). Оказывается, однако, что в первом приближении оно справедливо для системы (4.83) и в общем случае. Действительно, данную систему с периодическими коэффициентами можно решать, например, методом итераций. Этим методом находятся последовательно приближенные решения и условия их устойчивости или неустойчивости с возрастающей точностью. Такой способ последовательных приближений

осуществлен в работе [33]. В первом приближении этим методом получается именно условие (4.88). Во втором приближении находится более точное условие неустойчивости

$$A^R > \Theta(\beta_0) > B^R, \tag{4.89}$$

$$\Theta(\beta_0) = \frac{8(A^R + \Theta^S)(B^R + \Theta^S)(C^R - \Theta^S) + (\Theta^D)^2(2A^R + 2B^R + 5\Theta^S - C^R)}{8(A^R + \Theta^S)(B^R + \Theta^S) - (\Theta^D)^2}.$$

Это условие при $\Theta^D = 0$ снова переходит в (4 88). Графики функции $\Theta(\beta_0)$ для гироскопа в кардановом подвесе при трех различных значениях массы внутренней рамки приведены на рис. 4.14. Кривая 1 соответствует изображенной на рис. 4.2 модели карданова подвеса, внутренняя рамка которого не имеет добавочных грузов.

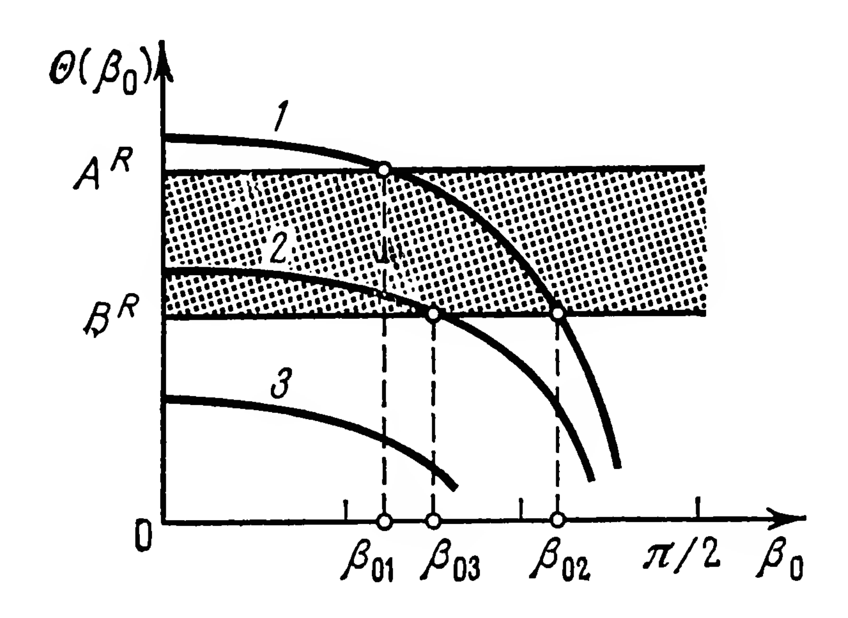


Рис. 4.14. К определению устойчивости несимметричного гироскопа в кардановом подвесе.

Условие (4.89) выполняется тогда, когда график функции $\Theta(\beta_0)$ лежит в затененной критической полосе. Для кривой 1 оно выполняется в интервале $\beta_{01} < \beta_0 < \beta_{02}$. При углах наклона внутренней рамки, лежащих в этом интервале, движение будет заведомо неустойчивым. При $\beta_0 < \beta_{01}$ и $\beta_0 > \beta_{02}$ устойчивость возможна.

Если на внутреннюю рамку поместить добавочные грузы, то график функции $\Theta(\beta_0)$ изменится, что иллюстрируется кривыми 2 и 3. При добавочном грузе, которому соответствует кривая 2, неустойчивость имеет место, если $\beta_0 < \beta_{03}$, в то время как движение с бóльшими, чем β_{03}, углами β_0 наклона внутренней рамки может быть устойчивым. Наконец, еще большему добавочному грузу соответствует кривая 3, которая не пересекает критическую полосу. В этом случае устойчивость возможна при любых значениях угла β_0.

Найденные в теории результаты могут быть подтверждены экспериментально. Далее, если сделать соответствующую оценку, то окажется, что уточненное условие неустойчивости (4.89) в рассматриваемом случае лишь незначительно отличается от условия

(4.88), полученного в первом приближении. Поэтому достаточно точными будут результаты, даваемые более простым условием (4.88).

Результаты, о которых говорилось выше, допускают наглядное механическое толкование, позволяющее одновременно установить связь с устойчивостью движения твердого тела в случае Эйлера. Если ротор гироскопа в кардановом подвесе рассматривать как одно из тел системы, то влияние рамок можно учесть, заменив ротор свободным твердым телом с соответственно увеличенными эффективными моментами инерции $A^* = A^R + \Theta^S$ и $B^* = B^R + \Theta^S$. Добавочное слагаемое Θ^S, как следует из (4.83), в интересующей нас области монотонно возрастает с ростом угла β_0. Поэтому эффективные моменты инерции A^* и B^* при увеличении наклона внутренней рамки тоже увеличиваются. Пусть при $\beta_0 = 0$ выполняются неравенства $C^R > A^* > B^*$; тогда существует такая область значений угла наклона, где $A^* > C^R > B^*$, а при еще бóльших значениях угла β_0 получим $A^* > B^* > C^R$. Таким образом, увеличение наклона внутренней рамки эквивалентно увеличению ее массы путем присоединения добавочных грузов. Если обобщить для гироскопа в кардановом подвесе понятия, определенные для одного твердого тела, то можно сказать, что при наклоне внутренней рамки гироскоп, вращающийся вокруг наименьшей оси эффективного эллипсоида инерции, превращается в гироскоп, вращающийся вокруг средней оси, а затем вокруг наибольшей оси; при этом распределение масс всех трех составляющих тел не изменяется.

4.5.3. Вращение вокруг оси внешней рамки. Из двух вращений Прандтля (4.74) и (4.75) достаточно рассмотреть только первое, так как при изменении угла γ на 90° и одновременной замене A^R на B^R и B^R на A^R уравнения движения остаются прежними. Поэтому условия устойчивости для второго вращения получаются из найденных ниже, если поменять местами A^R и B^R.

Для движения, близкого к (4.74), положим $\dot\alpha = \dot\alpha_0 + \dot x$, значения величин β и γ будем считать отличными от нуля, но достаточно малыми. Тогда из (4.70) получаем

$$\ddot x (A^R + A^J + A^A) = Q_\alpha.$$

Следовательно, скорость изменения величины $\dot\alpha$ имеет по меньшей мере второй порядок малости. Если снова пренебречь включенными в правую часть Q_α членами, порядок малости которых выше первого, то в первом приближении получим $\dot\alpha \approx \dot\alpha_0$. Тогда уравнения движения (4.71) и (4.72) принимают вид

$$\begin{aligned} &\ddot\beta (B^R + B^J) + \beta\dot\alpha_0^2 (A^R + A^J - C^R - C^J) + \dot\gamma\dot\alpha_0 (A^R - B^R - C^R) = Q_\beta, \\ &\ddot\gamma C^R + \gamma\dot\alpha_0^2 (A^R - B^R) - \dot\beta\dot\alpha_0 (A^R - B^R - C^R) = Q_\gamma. \end{aligned} \qquad (4.90)$$

Линейные части этих уравнений имеют постоянные коэффициенты, и им соответствует характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (B^R + B^J)\lambda^2 + \dot{\alpha}_0^2(A^R + A^J - C^R - C^J) & \dot{\alpha}_0(A^R - B^R - C^R)\lambda \\ -\dot{\alpha}_0(A^R - B^R - C^R)\lambda & C^R\lambda^2 + \dot{\alpha}_0^2(A^R - B^R) \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$a\left(\frac{\lambda}{\dot{\alpha}_0}\right)^4 + b\left(\frac{\lambda}{\dot{\alpha}_0}\right)^2 + c = 0, \qquad (4.91)$$

где

$$a = C^R(B^R + B^J),$$
$$b = (A^R - B^R)(A^R + B^J - C^R) + C^R(A^J + B^R - C^J),$$
$$c = (A^R - B^R)(A^R + A^J - C^R - C^J).$$

В характеристическом уравнении отсутствуют нечетные степени λ, поэтому система может быть в лучшем случае устойчивой по Ляпунову. Но она будет заведомо неустойчива, если не будут выполняться необходимые условия устойчивости. Таковыми, кроме всегда справедливого условия $a > 0$, являются

$$b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4ac > 0. \qquad (4.92)$$

Третье неравенство приводится к следующей форме:

$$b^2 - 4ac = [(A^R - B^R)(A^R - C^R + B^J) - C^R(B^R + A^J - C^J)]^2 - \\ - 4C^R(A^R - B^R)(A^R + B^R - C^R)(A^J + B^J - C^J) > 0. \qquad (4.93)$$

Выражения $A^R + B^R - C^R$ и $A^J + B^J - C^J$ вследствие неравенств треугольника (1.10) будут положительными, поэтому при $A^R < B^R$ условие (4.93) выполняется. Кроме того, оно выполняется при дискообразном роторе ($C^R = A^R + B^R$), как это имеет место, например, для колеса Прандтля, и при $A^J + B^J - C^J = 0$, когда вся масса внутренней рамки сосредоточена в плоскости осей 1 и 2. Однако последний случай едва ли представляет интерес. Гораздо интереснее, что условие (4.93) выполняется и в том случае, когда дискообразная внутренняя рамка расположена в плоскости 2-3, т. е. имеет вид, изображенный на рис. 4.2. Действительно, коэффициент b можно записать следующим образом:

$$b = a + c + (A^R - B^R - C^R)(B^J + C^J - A^J).$$

Если $B^J + C^J = A^J$, то $b = a + c$, следовательно, $b^2 - 4ac = (a - c)^2 > 0$.

Ниже будем предполагать, что данное соотношение между моментами инерции приблизительно сохраняется и при внесении на внутреннюю рамку добавочных грузов. Таким образом, далее для простоты рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, близ-

кий к показанному на рис. 4.2, для которого $A^J \approx B^J + C^J$, хотя нет никаких принципиальных препятствий к тому, чтобы учесть условие (4.93) в общем случае. У нас остаются только два первых условия (4.92), из них самое первое условие вследствие того, что $b = a + c$ и $a > 0$, является более слабым, чем второе. Поэтому остается единственное необходимое условие устойчивости

$$c = (A^R - B^R)(A^R + A^J - C^R - C^J) > 0. \tag{4.94}$$

Нарушение этого условия означает неустойчивость первого вращения Прандтля (4.74). В соответствии со сказанным выше соответствующее условие для второго вращения Прандтля (4.75) имеет вид

$$c^* = (B^R - A^R)(B^R + A^J - C^R - C^J) > 0. \tag{4.95}$$

4.5.4. Устойчивость вращений Прандтля. Рассмотрим, как влияют на устойчивость перманентных вращений Прандтля (вращений ротора гироскопа в кардановом подвесе вокруг его главных осей инерции) различные добавочные грузы, помещаемые на внутреннюю рамку. Экспериментально это влияние можно проверить с помощью колеса Прандтля (рис. 4.13) либо гироскопа в кардановом подвесе (рис. 4.2), если дополнительные массы закрепить на удлиненной оси ротора (колесо Прандтля) или в местах соединения оси ротора с внутренней рамкой (гироскоп в кардановом подвесе) так, чтобы моменты инерции A^J и B^J внутренней рамки увеличились в одинаковой мере:

$$A^J = A_0^J + \Theta, \quad B^J = B_0^J + \Theta. \tag{4.96}$$

Добавочный момент инерции Θ будем считать параметром, принимающим различные значения. Влияние его на устойчивость мы и должны исследовать.

Так как для первого вращения Прандтля (4.73) интересным является только случай $\beta_0 = 0$, то, используя выражение (4.83) для $\Theta^S(\beta_0)$, найдем

$$\Theta^S(0) = {}^1/_2\,(A^J + B^J + A^A).$$

Принимая во внимание это равенство и (4.96), запишем левые части неравенств (4.87), (4.94) и (4.95), которые являются необходимыми условиями устойчивости для каждого из трех вращений Прандтля соответственно, в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_1 &= [A^R - C^R + {}^1/_2(A_0^J + B_0^J + A^A) + \Theta][B^R - C^R + \\ &\qquad\qquad + {}^1/_2(A_0^J + B_0^J + A^A) + \Theta], \\ S_2 &= (A^R - B^R)(A^R - C^R + A_0^J - C^J + \Theta), \\ S_3 &= (B^R - A^R)(B^R - C^R + A_0^J - C^J + \Theta). \end{aligned} \tag{4.97}$$

Графики функций $S_i(\Theta)$ даны на рис. 4.15. Точки Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, где графики пересекают ось абсцисс, находятся непосредственно

из (4.97). Сама ось абсцисс этими точками разбивается на пять интервалов, каждый из которых характеризуется либо устойчивостью, либо неустойчивостью рассматриваемых движений. Для

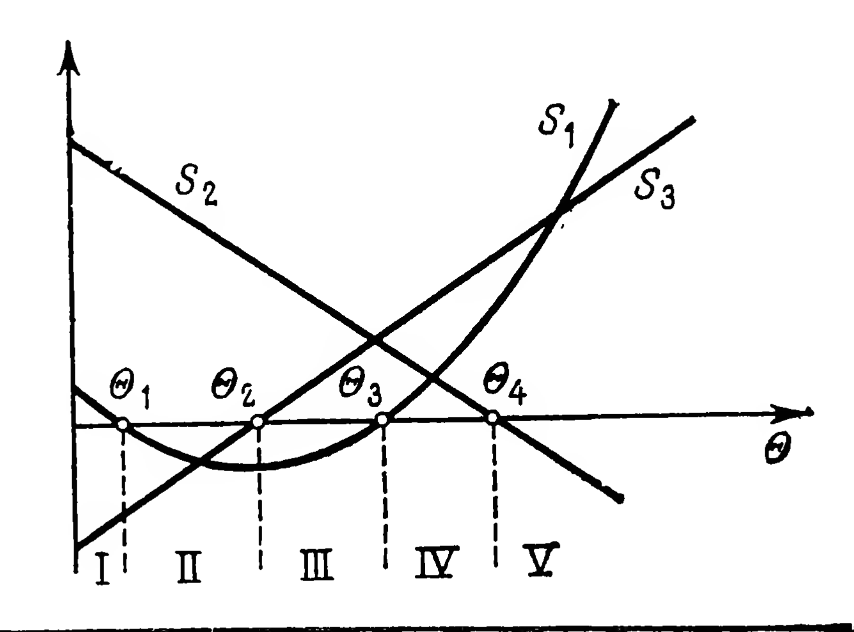


Рис. 4.15. Графики функций, определяющих устойчивость вращений Прандтля несимметричного гироскопа в кардановом подвесе.

гироскопа в кардановом подвесе, которому соответствует рис. 4.15, справедлива следующая таблица.

Вращение Прандтля	Интервалы значений Θ				
	I $\Theta<\Theta_1$	II $\Theta_1<\Theta<\Theta_2$	III $\Theta_2<\Theta<\Theta_3$	IV $\Theta_3<\Theta<\Theta_4$	V $\Theta_4<\Theta$
Вращение первого типа (4.73), условие устойчивости (4.87)	+	−	−	+	+
Вращение второго типа (4.74), условие устойчивости (4.94)	+	+	+	+	−
Вращение третьего типа (4.75), условие устойчивости (4.95)	−	−	+	+	+

Знак «плюс» означает, что соответствующее условие устойчивости выполняется, знак «минус» указывает на неустойчивость. В интервалах I, III и V устойчивы вращения двух типов, в то время как третье вращение, происходящее вокруг *средней* главной оси, неустойчиво, что соответствует устойчивости вращений твердого тела в случае Эйлера. Такое соответствие нарушается в интервалах II и IV: при $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$ устойчиво только одно вращение Прандтля, а при $\Theta_3 < \Theta < \Theta_4$ устойчивы вращения всех трех типов. Это явление было подтверждено экспериментально, причем оказалось, что необходимые условия устойчивости, найденные из уравнений первого приближения, хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Глава 5

Гироскопические системы

5.1. Уравнения движения в форме Лагранжа

В гл. 1 были найдены различные виды уравнений движения одного твердого тела. При выводе этих уравнений можно было исходить из выражения для энергии (уравнения Лагранжа) или применить теорему о кинетическом моменте (уравнения Эйлера). Уравнения соответствующих типов можно получить и для системы твердых тел. Мы сделаем это ниже, обратив внимание на особенности, присущие гироскопическим системам.

Для гироскопических систем характерно наличие так называемых циклических координат. Уравнения движения систем с циклическими координатами можно существенно упростить. Основными достижениями в этом направлении мы обязаны Томсону и Тэту [34]. Достаточно полное представление о новых результатах дают монографии Меркина [8] и Циглера [35].

В качестве исходных возьмем уравнения Лагранжа второго рода (см. п. 1.5.4*b*)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\xi}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\xi}=Q_\xi \quad (\xi=1,\ \ldots,\ n). \tag{5.1}$$

Через Q_ξ обозначены обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_ξ, число n которых равно числу степеней свободы системы. Обобщенные координаты должны полностью описывать состояние системы.

Обобщенная координата $q_\varkappa$ называется циклической, если для нее выполняются условия

$$\frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}=0 \quad \text{и} \quad Q_\varkappa=0. \tag{5.2}$$

Из (5.1) следует, что для циклической координаты

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}=p_\varkappa=\mathrm{const}. \tag{5.3}$$

Величину $p_\varkappa$ назовем обобщенным импульсом. Таким образом, каждой циклической координате соответствует в силу уравнений движения постоянный обобщенный импульс.

5.1.1. Исключение циклических координат. Для того чтобы преобразовать уравнения движения, разобьем обобщенные координаты на две группы:

a) Пусть нециклическими координатами будут $q_1, \ldots, q_m$. Мы снабдим их индексами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, которые принимают значения от 1 до m.

b) Циклические координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ отметим индексами $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$, принимающими значения от $m+1$ до n $(n > m)$.

Рассмотрим далее кинетическую энергию. Кинетическая энергия T любой системы масс может быть записана в виде

$$T = {}^1/_2 \int \dot{x}^2\, dm. \tag{5.4}$$

Здесь через x обозначены декартовы координаты; зависимость их от обобщенных координат пусть выражается равенствами

$$x = x(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{5.5}$$

Системы с такого типа *уравнениями связей* называются *голономными* и *склерономными*: голономными потому, что в уравнениях связей нет скоростей; склерономными, поскольку в эти уравнения не входит явно время.

Дифференцируя (5.5), получаем

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_\xi} \dot{q}_\xi \quad (\xi = 1, \ldots, n). \tag{5.6}$$

По индексам, которые входят в формулу дважды, следует, согласно введенному выше правилу, производить суммирование. Подставив (5.6) в (5.4), выразим кинетическую энергию T в виде двойной суммы

$$T = {}^1/_2 a_{\xi\eta} \dot{q}_\xi \dot{q}_\eta, \tag{5.7}$$

коэффициенты которой

$$a_{\xi\eta} = \int \frac{\partial x}{\partial q_\xi} \frac{\partial x}{\partial q_\eta} dm$$

будем называть *обобщенными массами*. Квадратичная форма (5.7) от обобщенных скоростей должна быть, очевидно, определенно-положительной.

Обобщенные массы удовлетворяют условию симметричности $a_{\xi\eta} = a_{\eta\xi}$, поэтому составленная из них квадратная матрица (матрица масс) будет тоже симметричной. В качестве обобщенной массы $a_{\xi\eta}$ может выступать момент инерции, если соответствующие ей обобщенные координаты q_ξ и q_η являются углами. Наконец, обобщенные массы в силу их определения могут зависеть только от нециклических координат q_α, для которых не выполняется (5.2), и не зависят от обобщенных скоростей $\dot{q}_\xi$.

В соответствии с данным выше разделением обобщенных координат на нециклические и циклические разобьем матрицу масс на четыре подматрицы:

$$a_{\xi\eta}=\left[\begin{array}{c:c} a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\varkappa} \\ \hdashline a_{\alpha\varkappa} & a_{\varkappa\lambda} \end{array}\right].$$

Тогда выражение (5.7) для кинетической энергии можно записать следующим образом:

$$T={}^1/_2 a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+a_{\alpha\varkappa}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\varkappa+{}^1/_2 a_{\varkappa\lambda}\dot{q}_\varkappa\dot{q}_\lambda. \tag{5.8}$$

Для циклических координат q_μ, учитывая (5.3), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}=a_{\alpha\mu}\dot{q}_\alpha+a_{\mu\lambda}\dot{q}_\lambda=p_\mu \quad (\mu=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{5.9}$$

Матрица $a_{\mu\lambda}$ является неособой, так как третья группа слагаемых в правой части равенства (5.8) представляет собой определенно-положительную квадратичную форму. Действительно, рассмотрим такие движения, для которых все нециклические координаты равны нулю; тогда кинетическая энергия будет квадратичной формой производных от циклических координат и по-прежнему должна быть определенно-положительной. Следовательно, указанные производные $\dot{q}_\lambda$ (циклические обобщенные скорости) можно однозначно найти из системы уравнений (5.9):

$$\dot{q}_\lambda=a_{\mu\lambda}^{-1}(p_\mu-a_{\alpha\mu}\dot{q}_\alpha) \quad (\lambda=m+1,\ \ldots,\ n). \tag{5.10}$$

Здесь через $a_{\mu\lambda}^{-1}$ обозначена матрица, обратная к $a_{\mu\lambda}$. С помощью (5.10) циклические скорости можно исключить из выражения (5.8) для кинетической энергии T, после чего T будет некоторой функцией от q_α, $\dot{q}_\alpha$ и $p_\varkappa$, которую мы обозначим через T^*. Таким образом,

$$T^*(q_1,\ \ldots,\ q_m,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_m,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n)=$$
$$=T(q_1,\ \ldots,\ q_m,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_n). \tag{5.11}$$

Продифференцируем это равенство по q_α и $\dot{q}_\alpha$, учитывая, что в силу (5.10) циклические скорости являются функциями от нециклических координат и скоростей: $\dot{q}_\lambda=\dot{q}_\lambda(q_1,\ \ldots,\ q_m,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_m)$; в результате получим

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}\frac{\partial \dot{q}_\varkappa}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+p_\varkappa\frac{\partial \dot{q}_\varkappa}{\partial q_\alpha},$$
$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\varkappa}\frac{\partial \dot{q}_\varkappa}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}+p_\varkappa\frac{\partial \dot{q}_\varkappa}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

Введем так называемую *функцию Рауса*

$$R=T^*-p_\varkappa\dot{q}_\varkappa=R(q_1,\ \ldots,\ q_m,\ \dot{q}_1,\ \ldots,\ \dot{q}_m,\ p_{m+1},\ \ldots,\ p_n), \tag{5.12}$$

для которой с учетом предыдущих равенств имеем

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha}-p_\varkappa\frac{\partial \dot q_\varkappa}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}=\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_\alpha}-p_\varkappa\frac{\partial \dot q_\varkappa}{\partial \dot q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}.$$

Итак, первые m уравнений исходной системы (5.1) можно записать в виде уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_\alpha}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \quad (\alpha=1,\ \ldots,\ m), \tag{5.13}$$

левые части которых не содержат циклических координат и их производных. Совместно с $n-m$ уравнениями (5.9) или (5.10) они образуют систему n уравнений для n обобщенных координат q_ξ. Циклические координаты не входят явно в уравнения (5.13), и поэтому их иногда называют скрытыми координатами[1]).

Следует заметить, что исключение всех циклических координат не является необходимым: некоторые из координат q_α могут быть тоже циклическими. Обычно из обобщенных координат выделяют те циклические координаты $q_\varkappa$, которые следует исключить как не представляющие интереса; среди остальных координат, существенных для описания состояния системы, могут быть и циклические. Примером координат первого типа являются углы поворота роторов гироскопов.

5.1.2. Уравнения Кельвина — Тэта. Уравнения движения (5.13) можно привести к более удобной форме, для чего используем некоторые свойства функции Рауса R. После подстановки (5.8) и (5.10) в (5.12) получим

$$R=\tfrac{1}{2}a_{\alpha\beta}\dot q_\alpha\dot q_\beta+a_{\alpha\varkappa}\dot q_\alpha a^{-1}_{\mu\varkappa}(p_\mu-a_{\beta\mu}\dot q_\beta)+$$
$$+\tfrac{1}{2}a_{\varkappa\lambda}a^{-1}_{\mu\varkappa}(p_\mu-a_{\alpha\mu}\dot q_\alpha)a^{-1}_{\nu\lambda}(p_\nu-a_{\beta\nu}\dot q_\beta)-p_\varkappa a^{-1}_{\mu\varkappa}(p_\mu-a_{\alpha\mu}\dot q_\alpha). \tag{5.14}$$

Если раскрыть скобки, то окажется, что по отношению к нециклическим скоростям функция R состоит из квадратичной формы, линейной формы и постоянного слагаемого:

$$R=R_2+R_1-R_0,$$

для которых на основании свойств операции умножения матриц имеем следующие выражения:

$$R_2=\tfrac{1}{2}\left(a_{\alpha\beta}-a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\alpha\varkappa}a_{\beta\lambda}\right)\dot q_\alpha\dot q_\beta,$$
$$R_1=a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\alpha}p_\lambda\dot q_\alpha, \tag{5.15}$$
$$R_0=\tfrac{1}{2}a^{-1}_{\varkappa\lambda}p_\varkappa p_\lambda.$$

[1]) Разумеется, при условии, что Q_α не зависят от циклических координат. Это условие часто включают в само определение циклических координат (см., например, Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961). — *Прим. ред.*

Уравнения (5.13) теперь принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial R_2}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial R_0}{\partial q_\alpha}. \qquad (5.16)$$

Два средних слагаемых в правой части мы можем объединить:

$$\frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\beta}p_\lambda\right)-\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\alpha}p_\lambda\right)\right]\dot{q}_\beta=g_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta=G_\alpha, \qquad (5.17)$$

где

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\beta}p_\lambda\right)-\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(a^{-1}_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\alpha}p_\lambda\right)=-g_{\beta\alpha}. \qquad (5.18)$$

Величины G_α назовем *обобщенными гироскопическими силами.* Как следует из (5.17), они линейно зависят от обобщенных скоростей, соответствующих неисключенным обобщенным координатам. Гироскопические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ образуют кососимметричную матрицу, поэтому, в частности, $g_{\alpha\alpha}=0$.

Уравнения движения (5.16) могут быть теперь записаны в форме, которую указали Томсон и Тэт:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial R_2}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha+G_\alpha-\frac{\partial R_0}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=1,\ \ldots,\ m) \qquad (5.19)$$

(уравнения Кельвина — Тэта). Из этих уравнений видно, что при аналитическом исследовании движений системы можно поступить так, как если бы имелись только нециклические координаты, изменение которых существенно влияет на состояние системы (их называют также позиционными координатами). Чтобы получить уравнение (5.19), нужно с соответствующими исходными уравнениями Лагранжа проделать следующие три операции.

1. К внешним обобщенным силам Q_α добавляются обобщенные гироскопиче кие силы G_α. Об этих силах ниже будет сказано более подробно.

2. К внешним силам следует добавить также *динамические нагрузки* — $\partial R_0/\partial q_\alpha$. Это могут быть, например, центробежные силы, обусловленные существованием циклических координат. Величину R_0 можно рассматривать как потенциальную функцию таких сил.

3. Вместо кинетической энергии берется величина R_2, которая, как следует из (5.15), тоже является квадратичной формой скоростей $\dot{q}_\alpha$, однако ей соответствует другая матрица масс. Практически это означает, например, изменение моментов инерции.

Систему, у которой $G_\alpha=0$, будем называть гироскопически несвязанной. Из (5.17) непосредственно следует, что это будет,

например, при $a_{\varkappa\alpha} = 0$. Последнее условие, подставленное в (5.15), дает с учетом (5.9) следующие равенства:

$$R_0 = {}^1/_2 a_{\varkappa\lambda}\dot{q}_\varkappa\dot{q}_\lambda, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = {}^1/_2 a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta.$$

Таким образом, в данном случае R_2 действительно является кинетической энергией, соответствующей «видимым», т. е., вообще говоря, нециклическим позиционным координатам, а R_0 представляет собой кинетическую энергию, соответствующую скрытым, циклическим координатам. Уравнения движения (5.19) принимают форму уравнений Лагранжа, только в правые части добавляются консервативные силы (динамические нагрузки), получаемые из R_0 как из потенциальной функции.

Заметим в заключение, что уравнения движения подобного вида можно получить также для неголономных и реономных систем, для которых в уравнения связи (5.5) входят скорости и время (подробнее об этом см., например, [36]).

5.1.3. Гироскопические силы. Характерным для обобщенных гироскопических сил, определяемых равенством (5.17), является то обстоятельство, что они не совершают работы при движении системы. Действительно,

$$dA = G_\alpha\, dq_\alpha = G_\alpha\dot{q}_\alpha\, dt = g_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\, dt = {}^1/_2\,(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha})\,\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\, dt.$$

Вследствие $g_{\alpha\beta} = -g_{\beta\alpha}$ сумма, стоящая в скобках, равна нулю, поэтому $dA = G_\alpha dq_\alpha = 0$. Обратно, из требования, чтобы работа на любом перемещении равнялась нулю, вытекает кососимметричность матрицы $g_{\alpha\beta}$. Отсюда следует, что гироскопические силы можно определить как такие линейно зависящие от скоростей силы, работа которых на любом перемещении системы равна нулю. В силу такого общего определения в число гироскопических сил могут попасть и силы, которые не связаны с наличием в системе гироскопа или маховика. Так, например, было разработано чисто электрическое устройство — гиратор [37], с помощью которого в уравнениях электрической цепи могут быть получены гироскопические члены.

Следует упомянуть о двух общих свойствах матрицы $g_{\alpha\beta}$, которые непосредственно вытекают из ее кососимметричности:

$$\det g_{\alpha\beta}\begin{cases} = 0 & \text{при нечетном } m, \\ > 0 & \text{при четном } m \end{cases} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ m). \qquad (5.20)$$

Приведем три простых примера, в которых появляются гироскопические силы.

а) *Движение материальной точки относительно вращающейся системы отсчета.* Пусть материальная точка, масса которой равна m, движется с относительной скоростью $v_i = \dot{x}_i$ в системе от-

счета, вращающейся с угловой скоростью ω_i; тогда на нее действует кориолисова сила инерции

$$F_i = 2m\varepsilon_{ijk}v_j\omega_k, \tag{5.21}$$

работа которой на любом перемещении dx_i материальной точки равна нулю:

$$dA = F_i\,dx_i = F_i v_i\,dt = 2m\varepsilon_{ijk}v_j\omega_k v_i\,dt = 2m\varepsilon_{ijk}v_j v_k\omega_i\,dt = 0.$$

Матрицу g_{ij} можно легко найти, если (5.21) записать в матричной форме. Полагая $v_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ и $\omega_i = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, получаем

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 2m\begin{bmatrix} \dot{x}_2\omega_3 - \dot{x}_3\omega_2 \\ \dot{x}_3\omega_1 - \dot{x}_1\omega_3 \\ \dot{x}_1\omega_2 - \dot{x}_2\omega_1 \end{bmatrix} = 2m\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

или

$$F_i = g_{ij}\dot{x}_j = G_i \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где

$$g_{ij} = 2m\begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, какой вид имеют в данном примере уравнения Кельвина — Тэта (5.19), и при этом будем считать, что система отсчета вращается с постоянной угловой скоростью ω_3 вокруг оси x_3. Тогда кинетическая энергия

$$T = {}^1\!/_2 m\left[(\dot{x}_1 - \omega_3 x_2)^2 + (\dot{x}_2 + \omega_3 x_1)^2 + \dot{x}_3^2\right].$$

Если в направлении оси x_3 на материальную точку не действует внешняя сила, то координата x_3 будет циклической. Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 = p_3 = \text{const}.$$

Тогда в соответствии с (5.12) функцию Рауса можно представить в виде

$$R = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)}_{R_2} + \underbrace{m\omega_3\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right)}_{R_1} - \underbrace{\left[\frac{p_3^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega_3^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]}_{R_0}.$$

Систему уравнений Кельвина — Тэта, описывающих движение материальной точки, находим из (5.19):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= Q_1 + 2m\omega_3\dot{x}_2 + m\omega_3^2 x_1, \\ m\ddot{x}_2 &= Q_2 - 2m\omega_3\dot{x}_1 + m\omega_3^2 x_2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

В качестве гироскопических сил с матрицей

$$g_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 2m\omega_3 \\ -2m\omega_3 & 0 \end{bmatrix}=2m\omega_3\begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

здесь снова фигурируют кориолисовы силы инерции; вместе с ними на материальную точку действуют динамические нагрузки, порождаемые центробежной силой.

b) *Движение электрона в магнитном поле.* На носитель электрического заряда, например на электрон, движущийся со скоростью v_i в магнитном поле с напряженностью H_i, действует лоренцева сила

$$F_i=\frac{e}{c}\varepsilon_{ijk}v_jH_k,$$

где e — величина заряда, а c — скорость света. Зависимость этой силы от скорости v_i имеет такой же характер, как и в разобранном выше примере [см. формулу (5.21)]. Точно так же легко показать, что сила, с которой магнитное поле действует на движущийся электрический заряд, не производит работы. Гироскопической матрицей в данном примере будет матрица

$$g_{ij}=\frac{e}{c}\begin{bmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.23}$$

c) *Симметричный гироскоп при* $Q_\varphi=0$. Для кинетической энергии симметричного гироскопа ранее [гл. 1, формула (1.62)] было найдено следующее выражение:

$$T={}^1/_2A(\dot\vartheta^2+\dot\psi^2\sin^2\vartheta)+{}^1/_2C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\vartheta)^2. \tag{5.24}$$

Вследствие равенств $\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$ и $Q_\varphi=0$ угол φ будет циклической координатой. Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}=C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\vartheta)=p_\varphi=\text{const}.$$

Функцию Рауса составим в соответствии с (5.12):

$$R=\frac{1}{2}A(\dot\vartheta^2+\dot\psi^2\sin^2\vartheta)+\frac{p_\varphi^2}{2C}-p_\varphi\dot\varphi.$$

Учитывая, что $\dot\varphi\doteq p_\varphi/C-\dot\psi\cos\vartheta$, получаем окончательно

$$R=\underbrace{\frac{1}{2}A(\dot\vartheta^2+\dot\psi^2\sin^2\vartheta)}_{R_2}+\underbrace{\dot\psi p_\varphi\cos\vartheta}_{R_1}-\underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2C}}_{R_0}. \tag{5.25}$$

Отсюда находим уравнения Кельвина — Тэта, описывающие движение симметричного гироскопа:

$$\begin{aligned} A\ddot{\vartheta} - A\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\psi}^2 &= Q_\vartheta - p_\varphi \sin\vartheta\dot{\psi}, \\ A\sin^2\vartheta\ddot{\psi} + 2A\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\psi} &= Q_\psi + p_\varphi\sin\vartheta\dot{\vartheta}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Динамические нагрузки в этом случае отсутствуют, так что в уравнения движения входят в качестве дополнительных сил только гироскопические силы

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} G_\vartheta \\ G_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_\varphi\sin\vartheta \\ p_\varphi\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = g_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta$$

с кососимметричной матрицей

$$g_{\alpha\beta} = p_\varphi \sin\vartheta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2. Малые колебания гироскопических систем

Для приближенного исследования гироскопических систем особенно плодотворными оказались два метода: метод малых колебаний и метод, которым изучаются системы с быстровращающимися гироскопами. Здесь мы обсудим первый из названных методов, а в § 5.3 будут рассмотрены метод исследования и упрощения для систем с быстровращающимися гироскопами.

Исходным пунктом в методе малых колебаний является линеаризация уравнений движения. В качестве малых величин берутся отклонения координат системы от известных постоянных значений, соответствующих положению равновесия системы, или в более общем случае от известных функций времени $q_{\alpha 0}(t)$, описывающих некоторое движение системы. Эти функции должны, очевидно, удовлетворять уравнениям движения.

Нас интересует, как изменят данное состояние системы малые возмущения. Координаты, описывающие возмущенное движение, положим равными

$$q_\alpha(t) = q_{\alpha 0}(t) + x_\alpha(t) \quad (\alpha = 1, \ldots, m), \tag{5.27}$$

где отклонения $x_\alpha(t)$ должны рассматриваться как малые по модулю величины. Если $q_{\alpha 0}$ — не зависящие от времени постоянные величины, то они соответствуют положению равновесия. Более важным для гироскопических систем является, однако, случай, когда $q_{\alpha 0}$ представляют собой функции времени.

5.2.1. Уравнения возмущенного движения. Используя выражение кинетической энергии

$$T = {}^1\!/_2 a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \tag{5.28}$$

и учитывая, что обобщенные массы $a_{\alpha\beta}$ могут зависеть от координат q_γ, найдем производные, входящие в уравнения движения (5.1):

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma}=\frac{1}{2}(a_{\gamma\beta}\dot{q}_\beta+a_{\alpha\gamma}\dot{q}_\alpha)=a_{\alpha\gamma}\dot{q}_\alpha,\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma}\right)=a_{\alpha\gamma}\ddot{q}_\alpha+\dot{a}_{\alpha\gamma}\dot{q}_\alpha=a_{\alpha\gamma}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\dot{q}_\alpha,\\ \frac{\partial T}{\partial q_\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta.\end{gathered}\tag{5.29}$$

Здесь мы предположим, что $a_{\alpha\gamma}$ не зависят явно от времени. Уравнения движения (5.1) принимают вид

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta=Q_\gamma\qquad(\gamma=1,\ \dots,\ m).\tag{5.30}$$

Обобщенные массы

$$a_{\alpha\gamma}(q_1,\ \dots,\ q_m)=a_{\alpha\gamma}(q_{10}+x_1,\ \dots,\ q_{m0}+x_m)$$

и входящие в (5.30) их частные производные можно разложить в ряды Тейлора по степеням малых величин x_α:

$$\begin{gathered}a_{\alpha\gamma}=a_{\alpha\gamma0}+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0 x_\delta+\ \dots,\\ \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}=\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta\,\partial q_\beta}\right)_0 x_\beta+\ \dots\ .\end{gathered}$$

Индексом 0 обозначены значения соответствующих величин для невозмущенного движения. Подстановка этих разложений в выражения (5.29) дает с учетом (5.27) следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\gamma}\right)&=a_{\alpha\gamma0}\ddot{q}_{\alpha0}+a_{\alpha\gamma0}\ddot{x}_\alpha+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0\ddot{q}_{\alpha0}x_\delta+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0\dot{q}_{\delta0}\dot{q}_{\alpha0}+\\ &+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0(\dot{q}_{\delta0}\dot{x}_\alpha+\dot{q}_{\alpha0}\dot{x}_\delta)+\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta\,\partial q_\beta}\right)_0\dot{q}_{\alpha0}\dot{q}_{\delta0}x_\beta+\ \dots\ ,\\ \frac{\partial T}{\partial q_\gamma}&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right)_0\dot{q}_{\alpha0}\dot{q}_{\beta0}+\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right)_0(\dot{q}_{\alpha0}\dot{x}_\beta+\dot{q}_{\beta0}\dot{x}_\alpha)+\right.\\ &\left.+\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma\,\partial q_\delta}\right)_0\dot{q}_{\alpha0}\dot{q}_{\beta0}x_\delta\right]+\ \dots\end{aligned}$$

Если для обобщенных сил использовать аналогичные разложения

$$Q_\gamma=Q_{\gamma0}+\left(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\delta}\right)_0 x_\delta+\left(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \dot{q}_\delta}\right)_0\dot{x}_\delta+\ \dots$$

и учесть, что в силу (5.30) для исходного решения справедливы тождества

$$a_{\alpha\gamma 0}\ddot{q}_{\alpha 0}+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\delta}\right)_0\dot{q}_{\alpha 0}\dot{q}_{\delta 0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right)_0\dot{q}_{\alpha 0}\dot{q}_{\beta 0}-Q_{\gamma 0}=0,$$

то уравнения движения (5.1) запишутся следующим образом:

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha+b_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha+c_{\alpha\gamma}x_\alpha=P_\gamma\qquad(\gamma=1,\ \ldots,\ m).\tag{5.31}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_{\alpha\gamma}&=a_{\alpha\gamma 0},\\
b_{\alpha\gamma}&=\left[\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha}\right)_0-\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_\gamma}\right)_0\right]\dot{q}_{\beta 0}+\left(\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q_\beta}\right)_0\dot{q}_{\beta 0}-\left(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_0,\\
c_{\alpha\gamma}&=\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha}\right)_0\ddot{q}_{\beta 0}+\left[\left(\frac{\partial^2 a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha\,\partial q_\delta}\right)_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{\beta\gamma}}{\partial q_\alpha\,\partial q_\gamma}\right)_0\right]\dot{q}_{\beta 0}\dot{q}_{\delta 0}-\left(\frac{\partial Q_\gamma}{\partial q_\alpha}\right)_0.
\end{aligned}\tag{5.32}$$

Выражения P_γ состоят из обозначенных выше многоточиями членов второго и более высокого порядка малости относительно x_α. В методе малых колебаний этими членами пренебрегают, т. е. полагают $P_\gamma=0$. Тогда из (5.31) получаем систему линейных уравнений, которые называются уравнениями первого приближения. Ляпунов показал, что решение системы первого приближения в том случае верно отражает характер поведения возмущенных движений в окрестности исходного решения, когда корни характеристического уравнения этой системы имеют отличные от нуля вещественные части. В случае когда хотя бы у одного корня вещественная часть равна нулю, требуются более подробные исследования с учетом нелинейных членов P_γ (см., например, книгу Четаева [32]).

Для дальнейших исследований нам понадобится несколько преобразовать систему уравнений (5.31). Матрица масс по определению симметрична ($a_{\alpha\gamma}=a_{\gamma\alpha}$); матрицы $b_{\alpha\gamma}$ и $c_{\alpha\gamma}$ представим в виде сумм симметричной и кососимметричной матриц

$$b_{\alpha\gamma}=d_{\alpha\gamma}+g_{\alpha\gamma},$$

где

$$d_{\alpha\gamma}={}^1/_2(b_{\alpha\gamma}+b_{\gamma\alpha}),\qquad d_{\alpha\gamma}=d_{\gamma\alpha},$$
$$g_{\alpha\gamma}={}^1/_2(b_{\alpha\gamma}-b_{\gamma\alpha}),\qquad g_{\alpha\gamma}=-g_{\gamma\alpha},$$

и

$$c_{\alpha\gamma}=f_{\alpha\gamma}+e_{\alpha\gamma},\tag{5.33}$$

где

$$f_{\alpha\gamma}={}^1/_2(c_{\alpha\gamma}+c_{\gamma\alpha}),\qquad f_{\alpha\gamma}=f_{\gamma\alpha},$$
$$e_{\alpha\gamma}={}^1/_2(c_{\alpha\gamma}-c_{\gamma\alpha}),\qquad e_{\alpha\gamma}=-e_{\gamma\alpha}.$$

Тогда линейные уравнения движения, полученные из (5.31) при $P_\gamma=0$, можно записать в виде

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha+d_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha+g_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha+f_{\alpha\gamma}x_\alpha+e_{\alpha\gamma}x_\alpha=0\qquad(\gamma=1,\ \ldots,\ m).\tag{5.34}$$

Каждый из входящих сюда членов можно механически интерпретировать как обобщенную силу. Рассмотрим подробнее эту интерпретацию.

$A_\gamma = -a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha$ — суть *силы инерции*; своим происхождением они обязаны кинетической энергии — определенно-положительной квадратичной форме (5.7).

$D_\gamma = -d_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha$ — являются зависящими от скоростей *неконсервативными силами*, которые изменяют количество энергии в системе. Этим силам ставится в соответствие функция Рэлея

$$D = {}^1/_2 d_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\gamma. \tag{5.35}$$

Если D — определенно-положительная квадратичная форма скоростей, то энергия в системе рассеивается и движение затухает. В этом случае D называется *диссипативной функцией*.

$G_\gamma = -g_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha$ — уже упоминавшиеся *гироскопические силы*, не производящие работы при любом движении системы. Если обобщенные силы Q_γ не зависят от скоростей $\dot{x}_\alpha$, то $g_{\alpha\gamma}$ совпадают с $b_{\alpha\gamma}$, выражение которых дается равенствами (5.32).

$F_\gamma = -f_{\alpha\gamma}x_\alpha$ — *консервативные позиционные силы*, потенциалом для которых служит квадратичная форма

$$U = {}^1/_2 f_{\alpha\gamma}x_\alpha x_\gamma. \tag{5.36}$$

Если движение системы происходит вблизи статически устойчивого положения равновесия, то U будет определенно-положительной квадратичной формой.

$E_\gamma = -e_{\alpha\gamma}x_\alpha$ — *неконсервативные позиционные силы*, которые, как и силы демпфирования, могут изменять энергию системы. Их называют также циркуляционными силами. С такого рода силами мы встретимся, например, при рассмотрении гироскопических навигационных устройств (гл. 12).

Влияние совокупности всех указанных сил на движение системы рассматривается в следующем пункте.

5.2.2. Общие теоремы об устойчивости движения линейных систем. Для стационарных невозмущенных движений коэффициенты уравнений (5.34), описывающих возмущенное движение, будут постоянными. В этом случае можно доказать несколько общих утверждений об устойчивости движения и о возможности стабилизации движения. Эти результаты являются существенными для конструирования гироскопических приборов и для понимания ги-

роскопических систем, поэтому мы приведем их сводку и по мере необходимости будем давать соответствующие пояснения.

Прежде всего следует указать на то, что все приведенные ниже утверждения справедливы для системы, движение которой описывается линейными уравнениями (5.34). Однако при условии, что мы не имеем дело с критическим случаем, когда действительные части корней характеристического уравнения равны нулю, все эти результаты могут быть перенесены и на исходную обычно нелинейную систему (5.31).

Движение линейной системы будет устойчивым, если действительные части $\mathrm{Re}(\lambda)$ корней λ характеристического уравнения не положительны, причем в случае $\mathrm{Re}(\lambda)=0$ не должно быть кратных корней. Возможным в этом случае незатухающим колебаниям соответствуют отклонения координат, не выходящие за определенные пределы; при достаточно малых начальных возмущениях они остаются малыми. Это дает основание считать движение устойчивым. Если бы критический случай $\mathrm{Re}(\lambda)=0$ был исключен, то все консервативные системы должны были бы считаться неустойчивыми, что не соответствует нашим обычным представлениям. Если для всех λ выполняется условие $\mathrm{Re}(\lambda)<0$, то система *асимптотически устойчива.*

Используемое здесь общепринятое понятие устойчивости связано с поведением системы при $t \to \infty$. Это может вызвать затруднения при некоторых практических применениях, так как во многих случаях нас интересует поведение системы на конечном интервале времени. В частности, некоторые из применяемых на практике и весьма полезные гироскопические приборы должны быть названы в силу употребляемой здесь терминологии неустойчивыми.

Для определения условий устойчивости линейной динамической системы часто применяются критерии, которые в алгебраической форме были найдены Эрмитом, Раусом, Гурвицем и др., в эквивалентной геометрической форме — Найквистом, Леонардом, Михайловым и Неймарком. Насколько ценными и полезными являются эти критерии при исследовании заданной системы, настолько трудной оказывается часто физическая интерпретация получаемых результатов. Между тем в процессе проектирования или синтеза гироскопических систем физически наглядное истолкование результатов имеет особое значение.

Известно несколько общих теорем, удовлетворяющих этому условию физической наглядности; некоторые из них связаны с именами Лагранжа и Дирихле, но большинство принадлежит Томсону и Тэту [34]. Хотя ими в первую очередь рассматривались консервативные системы, удалось также исследовать и влияние неконсервативных сил. Мы намерены собрать здесь вместе результаты, достигнутые в этой области к настоящему времени, причем указать лишь теоремы с наиболее общими формулировками. Преимущество теорем, указанных в приведенной ниже таблице,

состоит в том, что они позволяют сделать заключение о влиянии сил различного рода на устойчивость системы. Конструктору эти теоремы дают указание на то, какие силы следует применить, чтобы достичь желаемой работы прибора; аналитику же часто достаточно одного взгляда на набор имеющихся сил, чтобы заключить, будет ли система устойчивой или неустойчивой.

В уравнениях движения (5.34) мы встречаем силы пяти видов: силы инерции A_γ, неконсервативные линейные относительно скоростей силы D_γ, гироскопические силы G_γ, консервативные F_γ и неконсервативные E_γ позиционные силы. Чтобы упорядочить множество систем с различными комбинациями сил, введем классификацию систем так, как показано в таблице. При этом следует учесть, что силы инерции A_γ всегда существуют. Судя по наличию или отсутствию сил других типов в системе, ее однозначно относят в одну из шестнадцати клеток таблицы, отмеченных соответствующими сокращенными обозначениями (индексы при буквах в них опущены). Из таблицы видно, что возможна, например, следующая классификация систем:

ненагруженные консервативными силами — первая и вторая строки,
нагруженные консервативными силами — третья и четвертая строки,
негироскопические — первый и второй столбцы,
гироскопические — третий и четвертый столбцы,
с демпфирующими (или ускоряющими) силами — второй и четвертый столбцы,
консервативные (должно быть одновременно $d \equiv 0$ и $e \equiv \equiv 0$) — клетки A, AG, AF, AGF[1]).

В клетках имеются номера от 1 до 20; они относятся к формулируемым ниже в тексте теоремам. Некоторые теоремы носят общий характер, они справедливы для систем нескольких типов, на что указывают в таблице отрезки прямых, соединяющие различные клетки. Сами теоремы даются для наиболее общих систем, для которых они справедливы. Доказательство теорем может быть найдено в литературных источниках, приводимых после каждой теоремы. Таковыми будут, вообще говоря, не первые публикации авторов теорем, а современные работы, в которых эти результаты представлены наиболее полно; здесь прежде всего следует указать книгу Форбата [38] и монографию Меркина [8].

Для лучшего понимания к некоторым теоремам даются дальнейшие разъяснения. Кроме того, для каждой из соответствующих систем указывается конкретный пример.

[1]) Здесь в число консервативных автор включает и системы с гироскопическими силами, что согласуется с определением консервативной системы как системы, для которой имеет место интеграл энергии. — *Прим. ред.*

Сводная таблица общих теорем, справедливых для различных систем, и их взаимосвязей

		$g \equiv 0$		$g \not\equiv 0$	
		$d \equiv 0$	$d \not\equiv 0$	$d \equiv 0$	$d \not\equiv 0$
$f \equiv 0$	$e \equiv 0$	A	AD	AG 1	ADG 2
	$e \not\equiv 0$	AE	ADE	AGE	ADGE 3 (4) 5
$f \not\equiv 0$	$e \equiv 0$	AF 6	ADF	AGF (7) 8 9 10	ADGF 11 12 13 14 15
	$e \not\equiv 0$	AFE 16	ADFE 17	AGFE	ADGFE (18) 19 (20)

AG-системы (пример: движение твердого тела в состоянии невесомости или движущийся по инерции космический корабль, когда не учитывается градиент поля гравитации).

1. *Положение равновесия системы, на которую действуют только гироскопические силы* G_γ, *будет устойчиво тогда и только тогда, когда* $\det(g_{\alpha\gamma}) \neq 0$ [8, стр. 126[1])].

Из этой теоремы сразу же следует, что система, на которую действуют только гироскопические силы, будет неустойчива, когда число m нециклических координат нечетно, ибо тогда $\det(g_{\alpha\gamma}) = 0$ в силу (5.20).

ADG-системы (пример: движение твердого тела в состоянии невесомости под действием сил, пропорциональных скорости).

2. *Положение равновесия системы, на которую действуют только гироскопические и диссипативные силы* G_γ *и* D_γ, *всегда устойчиво,*

[1]) Здесь и далее теоремы приводятся в формулировках автора книги, а не цитируются по указанным им источникам. — *Прим. ред.*

если функция Рэлея D (5.35) *определенно-положительна* [8, стр. 163].

Положительная определенность D означает, что движение по всем степеням свободы задемпфировано. Силы D_γ вызывают диссипацию, а не возрастание энергии. В дальнейшем мы будем использовать понятие диссипативных сил именно в этом смысле.

ADGE-системы (пример: вращающийся в состоянии невесомости космический корабль, ориентацией которого управляют с помощью E-сил. Этими силами кинетическая ось приводится к желаемому направлению).

3. *Если система не содержит консервативных сил F_γ, то при четном числе m нециклических координат для осуществления асимптотической устойчивости необходимо помимо диссипативных сил D_γ присоединить гироскопические силы G_γ* [8, стр. 214][1]).

4. *Для системы, у которой $F_\gamma \equiv 0$, при нечетном значении m не может быть осуществлена асимптотическая устойчивость никакими гироскопическими, диссипативными и ускоряющими силами G_γ и D_γ* [8, стр. 214].

5. *Неустойчивое положение равновесия неконсервативной системы, у которой $F_\gamma \equiv 0$, может быть стабилизировано только тогда, когда добавляются как диссипативные, так и гироскопические силы D_γ и G_γ* [39, стр. 33].

AF-системы (пример: масса на пружине, совершающая незатухающие колебания).

6. *Характеристическое уравнение консервативной системы, у которой $G_\gamma \equiv 0$ и потенциальная энергия U* (5.36) *не является знакоопределенной квадратичной формой, имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

Характеристическое уравнение AF-системы имеет вид $\det(a_{\alpha\gamma}\lambda^2 + f_{\alpha\gamma}) = 0$. Существует преобразование координат, с помощью которого матрицы $a_{\alpha\gamma}$ и $f_{\alpha\gamma}$ одновременно приводятся к диагональному виду [40, гл. 10]. Если потенциальная энергия не является знакоопределенной, то хотя бы один диагональный элемент преобразованной матрицы $f_{\alpha\gamma}$ будет отрицательным. Отсюда следует существование корня характеристического уравнения, у которого $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

AGF-системы (примеры: гироскопический маятник, вагон монорельсовой дороги без демпфирующего устройства, волчок без трения).

[1]) Как показано в рабоге [8], теоремы 3 и 4 не распространяются на полную (нелинеаризованную) систему уравнений движения. — *Прим. ред.*

7. *Все корни характеристического уравнения консервативной системы, положение равновесия которой устойчиво, имеют вещественные части, равные нулю* [38, стр. 49].

Устойчивое положение равновесия может быть только при определенно-положительной потенциальной энергии U. Из приведенной теоремы, восходящей еще к Лагранжу, следует, что консервативная система, будучи выведена из устойчивого положения равновесия, совершает незатухающие колебания.

8. *Неустойчивое положение равновесия консервативной системы при нечетном числе неустойчивых степеней свободы не может быть стабилизировано никакими гироскопическими силами* G_γ [8, стр. 176].

Число неустойчивых степеней свободы равно числу корней λ, у которых $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

9. *Неустойчивое положение равновесия консервативной системы может быть стабилизировано гироскопическими силами* G_γ, *если* 1) $\det(g_{\alpha\gamma}) \neq 0$, 2) *потенциальная энергия* U *знакоопределенна,* 3) *характеристическое уравнение не имеет кратных корней,* 4) *кинетический момент* H *достаточно велик* [8, стр. 179].

Теоремы 8 и 9 содержат классические результаты Томсона и Тэта [34]. Их практическое значение, однако, невелико, так как они относятся только к консервативным системам. У реальных систем энергия всегда рассеивается, вследствие чего состояние устойчивости может коренным образом измениться, как это будет видно из теоремы 11.

10. *Устойчивое положение равновесия консервативной системы не может быть сделано неустойчивым добавлением гироскопических сил* G_γ [38, стр. 49].

ADGF-системы (пример: гироскопический маятник с демпфированием).

11. *Если функция Рэлея* D *определенно-положительна и матрица* $f_{\alpha\gamma}$ *не имеет равных нулю собственных значений, то устойчивость или неустойчивость не зависит от демпфирующих и гироскопических сил* D_γ *и* G_γ [41, стр. 47].

Эта теорема чрезвычайно важна. В качестве гипотезы ее предложили Томсон и Тэт, а позднее сформулировал и доказал Четаев [32]. Окончательно он показал, что полная $ADGF$-система, описываемая уравнениями движения

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha + d_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha + g_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha + f_{\alpha\gamma}x_\alpha = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.37}$$

будет устойчивой, если устойчива соответствующая AF-система, описываемая укороченными уравнениями движения

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha + f_{\alpha\gamma}x_\alpha = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.38}$$

Иными словами, устойчивость $ADGF$-системы определяется исключительно собственными значениями матрицы $f_{\alpha\gamma}$, т. е. корнями уравнения $\det(f_{\alpha\gamma} - \lambda\delta_{\alpha\gamma}) = 0$. С помощью теоремы 11 доказывается, что устойчивая система добавлением демпфирующих сил D_γ может быть сделана неустойчивой. Например, можно показать, что гироскоп Лагранжа с верхним расположением центра тяжести (а также и волчок) при учете демпфирующих воздействий неустойчив, если применить введенное выше понятие устойчивости. Этому не противоречит тот факт, что воздействие сил трения на волчок ведет к его выпрямлению и исчезновению прецессионного движения. При $t \to \infty$ кинетический момент станет настолько мал, что волчок опрокинется. Известную всем устойчивость волчка при достаточно большом кинетическом моменте следует поэтому назвать *устойчивостью на конечном интервале времени* или *практической устойчивостью.*

12. *Если функция Рэлея D определенно-положительна, то число корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью равно числу отрицательных собственных значений матрицы $f_{\alpha\gamma}$* [41, стр. 47].

13. *Устойчивое положение равновесия остается устойчивым при добавлении произвольных гироскопических сил G_γ и демпфирующих сил D_γ со знакопостоянной положительной функцией Рэлея D* [8, стр. 202].

В случае знакопостоянной положительной функции Рэлея D колебания системы по одной или нескольким степеням свободы будут незатухающими, в то время как все другие колебания затухают.

14. *При знакопостоянной положительной функции Рэлея D и произвольных гироскопических силах G_γ движение системы неустойчиво, если все собственные значения матрицы $f_{\alpha\gamma}$ отрицательны* [41, стр. 48].

15. *Устойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым при добавлении сил D_γ с положительно определенной функцией Рэлея D и произвольных гироскопических сил G_γ* [8, стр. 203].

AFE-системы (пример: двойной маятник, причем на нижний маятник действует постоянная по величине сила, направление которой связано с этим маятником).

16. *Положение равновесия консервативной системы при $G_\gamma \equiv 0$ может быть сделано устойчивым или неустойчивым добавлением неконсервативных позиционных сил E_γ* [35, стр. 108].

ADFE-системы (пример: двойной маятник, такой же, как и выше, но с добавлением демпфирующих или ускоряющих сил).

17. *Если положение равновесия системы при $G_\gamma \equiv 0$ неустойчиво, то его нельзя стабилизировать добавлением неконсервативных позиционных сил E_γ* [39, стр. 33].

ADGFE-системы (примеры: гироскопический маятник с корректирующим устройством Сперри и демпфированием, вагон монорельсовой дороги со стабилизирующим устройством или вращающийся по околоземной орбите спутник с управляемой ориентацией).

18. *Положение равновесия системы с определенно-отрицательной потенциальной функцией U при нечетном числе нециклических позиционных координат не может быть стабилизировано добавлением каких угодно сил D_γ, G_γ или E_γ* [8, стр. 215].

19. *Положение равновесия системы с определенно-отрицательной потенциальной функцией U при четном числе нециклических позиционных координат и наличии сил D_γ с определенно-положительной функцией Рэлея D может быть стабилизировано, если добавить вместе с гироскопическими силами G_γ неконсервативные позиционные силы E_γ* [8, стр. 215].

20. *Движение системы неустойчиво при произвольных силах G_γ, F_γ и E_γ, если след матрицы $d_{\alpha\gamma}$ отрицателен* [8, стр. 213].

Условие $\mathrm{sp}(d_{\alpha\gamma}) > 0$ физически означает, что демпфирующая часть функции Рэлея является преобладающей по отношению к ускоряющей части. Действительно, матрицу $d_{\alpha\gamma}$ некоторым преобразованием координат можно привести к диагональному виду, и тогда положительные диагональные элементы будут соответствовать затухающим, а отрицательные — нарастающим колебаниям. Если сумма положительных элементов больше, чем сумма абсолютных величин отрицательных элементов, то преобладает демпфирование. Но сумма диагональных элементов матрицы, т. е. ее след, инвариантна относительно преобразования координат, поэтому преобладание демпфирующей или ускоряющей части определяется следом исходной матрицы $d_{\alpha\gamma}$.

5.3. Приближенное исследование систем с быстровращающимися гироскопами

Технические гироскопические приборы, как правило, содержат быстровращающиеся гироскопы, так как кинетический момент, необходимый для удовлетворительного функционирования прибора, желательно достичь при возможно меньшем весе. При обычных движениях таких устройств гироскопические силы доминируют над другими силами — силами инерции, позиционными силами и силами трения.

В этом случае, сделав ряд пренебрежений, можно прийти к значительно более простому, но достаточно точному способу приближенного аналитического исследования системы. Благодаря такому упрощенному подходу весьма сложные приборы оказываются доступными для изучения. Такого рода приближенные исследования объединяются под названием *«техническая* (или *инженерная*) *теория гироскопов»*, соответственно говорят о *технических уравнениях гироскопа* (или *уравнениях прецессионной теории*). Рассмотрим теперь подробнее исходные положения указанной теории и границы ее применения.

5.3.1. Уравнения системы с быстровращающимися симметричными гироскопами. Выражение для кинетической энергии, разложенное, согласно (5.8), на три части, послужило отправным пунктом для исключения циклических координат. Подобный подход будет применен и в рассматриваемом здесь специальном случае.

В качестве циклических координат, определяющих положение имеющихся в системе роторов гироскопов, выберем углы $\varphi_\varkappa$ поворотов роторов относительно их кожухов. Эти повороты совершаются вокруг осей симметрии роторов, моменты инерции относительно которых обозначим через $C_\varkappa$. Тогда кинетическая энергия (5.8) записывается в виде

$$T = {}^1\!/_2 a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + {}^1\!/_2 C_\varkappa(\dot{\varphi}_\varkappa + h_{\varkappa\alpha}\dot{q}_\alpha)^2. \qquad (5.39)$$

Индексы α и β принимают значения от 1 до m, индекс $\varkappa$ — от $m+1$ до n. Величина $h_{\varkappa\alpha}$ равна косинусу угла между направлением оси симметрии $\varkappa$-го гироскопа и направлением вектора угловой скорости $\dot{q}_\alpha$. При этом должны учитываться лишь те индексы α, которые соответствуют переносным вращениям для $\varkappa$-го гироскопа. Сумма, стоящая в формуле (5.39) в круглых скобках, равна проекции абсолютной угловой скорости $\varkappa$-го гироскопа на его ось симметрии.

Предположение, что $\varphi_\varkappa$ являются циклическими координатами, означает, что моменты, действующие относительно осей симметрии, взаимно уравновешиваются ($Q_\varkappa = 0$). Из (5.1) тогда следует

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_\varkappa} = C_{(\varkappa)}(\dot{\varphi}_\varkappa + h_{\varkappa\alpha}\dot{q}_\alpha) = H_\varkappa = \text{const}. \qquad (5.40)$$

По индексу, заключенному в скобки, здесь и в дальнейшем суммирование, в виде исключения из общего правила, не производится. Подстановкой (5.40) в (5.39) получаем

$$T = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \frac{1}{2} C_\varkappa\left(\frac{H_\varkappa}{C_\varkappa}\right)^2.$$

Для функции Рауса имеем из (5.12)

$$R = T^* - H_\varkappa\dot{\varphi}_\varkappa = \underbrace{\frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta}_{R_2} + \underbrace{H_\varkappa h_{\varkappa\alpha}\dot{q}_\alpha}_{R_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{H_\varkappa^2}{C_\varkappa}}_{R_0}. \qquad (5.41)$$

Вследствие постоянства R_0 уравнения движения (5.16) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial R_2}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha=1, \ldots, m). \quad (5.42)$$

Эти общие уравнения упрощаются, если в случае быстровращающихся гироскопов предположить, что часть R_2 кинетической энергии пренебрежимо мала по сравнению с R_1. Физически это означает, что энергия движения, соответствующая вращениям $\dot{q}_\alpha$, т. е. перемещениям масс кожухов гироскопов и их подвесов, считается малой по сравнению с энергией роторов гироскопов. Такого рода предположение оказывается допустимым для многих технических гироскопических приборов.

Таким образом, приближенные уравнения движения, как следует из (5.42), будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial R_1}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \quad (\alpha=1, \ldots, m). \quad (5.43)$$

Иными словами, приближенные уравнения движения получаются из уравнений движения Лагранжа второго рода, если в них кинетическую энергию T заменить на линейно зависящую от угловых скоростей $\dot{q}_\alpha$ часть функции Рауса

$$R_1=H_\varkappa h_{\varkappa\alpha}\dot{q}_\alpha. \quad (5.44)$$

Уравнения (5.43) можно тогда привести к виду

$$H_\varkappa\left(\frac{\partial h_{\varkappa\beta}}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial h_{\varkappa\alpha}}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha=g_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha=Q_\beta \quad (\beta=1, \ldots, m). \quad (5.45)$$

Кососимметричность матрицы $g_{\alpha\beta}$ гироскопических сил здесь видна непосредственно. Из (5.45) также следует, что движение системы в основном определяется равновесием между внешними силами Q_β и гироскопическими силами G_β. Силы инерции выпали, так как они получаются из отброшенной части R_2 функции Рауса.

При практическом использовании приближенных уравнений их можно еще больше упростить, если учесть, что в выражениях (5.40) для кинетических моментов $H_\varkappa$ слагаемые, соответствующие переносным движениям, пренебрежимо малы по сравнению с первым слагаемым, соответствующим собственному вращению гироскопа: $\dot{\varphi}_\varkappa \gg h_{\varkappa\alpha}\dot{q}_\alpha$.

Итак, технический расчет гироскопических устройств может состоять из следующих четырех шагов:

1) берем в качестве постоянных кинетических моментов гироскопов их собственные кинетические моменты, т. е. полагаем $H_\varkappa \approx C_{(\varkappa)}\dot{\varphi}_\varkappa$;

2) находим укороченную функцию Рауса (5.44);

3) выписываем уравнения движения (5.43);

4) решаем эти уравнения.

Порядок приближенных уравнений, получаемых на третьем шаге, ниже, чем порядок точных уравнений, что видно, например, из сравнения уравнений (5.45) с уравнениями (5.30). Это значит, что решения приближенных уравнений могут быть найдены не для любых начальных условий. Иначе говоря, приближенный подход годится не для любых допустимых движений гироскопической системы, хотя во многих случаях удовлетворительное описание поведения системы с помощью приближенных уравнений оказывается возможным. Вопрос, при каких условиях это возможно, еще требует дальнейшего разъяснения. Мы здесь ограничимся общим замечанием, что в невырожденных случаях приближение будет тем точнее, чем больше кинетические моменты имеющихся в системе гироскопов.

Некоторые вопросы, возникающие при исследовании гироскопических приборов с помощью приближенных уравнений, будут обсуждены ниже в § 10.1.

5.3.2. Формы движения и собственные частоты системы с быстровращающимися гироскопами. Для того чтобы получить более глубокое представление о картине движения гироскопической системы, мы ограничимся исследованием консервативной системы и примем во внимание упрощения, вытекающие из предположения о быстром вращении гироскопов.

В силу (5.34) уравнения, описывающие движение в окрестности стационарного режима, будут

$$a_{\beta\gamma}\ddot{x}_\beta + g_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta + f_{\beta\gamma}x_\beta = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, m). \tag{5.46}$$

Решение линейных дифференциальных уравнений (5.46) в случае постоянных коэффициентов можно искать в виде

$$x_\beta = A_\beta e^{\lambda t}. \tag{5.47}$$

Для неизвестных амплитуд A_β получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$(a_{\beta\gamma}\lambda^2 + g_{\beta\gamma}\lambda + f_{\beta\gamma})\, A_\beta = 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, m). \tag{5.48}$$

Нетривиальное решение этой системы существует только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \det(a_{\beta\gamma}\lambda^2 + g_{\beta\gamma}\lambda + f_{\beta\gamma}) = 0. \tag{5.49}$$

Таким образом, собственные значения λ должны быть корнями характеристического уравнения (5.49), которое является алгебраическим уравнением степени $2m$ и содержит только четные степени λ. К последним двум выводам мы придем, если раскроем определитель и убедимся затем, что вместе с корнем λ имеется и ко-

рень $-\lambda$. Действительно, учитывая равенства $a_{\beta\gamma}=a_{\gamma\beta}$, $g_{\beta\gamma}=-g_{\gamma\beta}$, $f_{\beta\gamma}=f_{\gamma\beta}$, имеем

$$\begin{aligned}\Delta(-\lambda)&=\det\left(a_{\beta\gamma}(-\lambda)^2-g_{\beta\gamma}\lambda+f_{\beta\gamma}\right)=\\&=\det\left(a_{\gamma\beta}\lambda^2+g_{\gamma\beta}\lambda+f_{\gamma\beta}\right)=\\&=\det\left(a_{\beta\gamma}\lambda^2+g_{\beta\gamma}\lambda+f_{\beta\gamma}\right)=\Delta(\lambda).\end{aligned}$$

Здесь при переходе от второй строки к третьей было использовано известное свойство определителя: величина определителя не меняется, если его строки и столбцы поменять местами.

Далее мы ограничимся случаем, когда тривиальное решение дифференциальных уравнений устойчиво. Принимая во внимание указанное выше обстоятельство, что вместе с корнем λ характеристического уравнения должен быть и корень $-\lambda$, следует в данном случае считать все корни чисто мнимыми:

$$\lambda_\delta=i\omega_\delta,\quad \lambda_{m+\delta}=-i\omega_\delta\quad (\delta=1,\ \ldots,\ m). \tag{5.50}$$

Это означает, что движение складывается из незатухающих колебаний.

Не вычисляя явно круговые частоты этих колебаний (для этого требуется решить характеристическое уравнение), мы можем получить некоторые общие результаты с помощью следующих рассуждений. В виду предположения, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней, общее решение будет линейной комбинацией частных решений вида

$$x_{\beta\delta}=A_{\beta(\delta)}e^{\lambda_\delta t},$$

которые, будучи подставлены в исходные уравнения (5.46), дают систему уравнений

$$\left(a_{\beta\gamma}\lambda_\delta^2+g_{\beta\gamma}\lambda_\delta+f_{\beta\gamma}\right)A_{\beta(\delta)}=0\quad (\gamma=1,\ \ldots,\ m). \tag{5.51}$$

Амплитудные множители $A_{\beta\delta}$ могут оказаться комплексными. Но в силу того, что коэффициенты системы являются действительными величинами, амплитудные множители, соответствующие паре корней (5.50), должны быть комплексно сопряженными:

$$A_{\beta\delta}=B_{\beta\delta}+iC_{\beta\delta},\quad A_{\beta(m+\delta)}=B_{\beta\delta}-iC_{\beta\delta}=\bar{A}_{\beta\delta}. \tag{5.52}$$

Умножим уравнения системы (5.51) на $\bar{A}_{\gamma\delta}$ и просуммируем по γ:

$$\left(a_{\beta\gamma}\lambda_\delta^2+g_{\beta\gamma}\lambda_\delta+f_{\beta\gamma}\right)A_{\beta(\delta)}\bar{A}_{\gamma(\delta)}=0. \tag{5.53}$$

Учитывая (5.52) и то, что матрицы $a_{\beta\gamma}$ и $f_{\beta\gamma}$ симметричны, а матрица $g_{\beta\gamma}$ кососимметрична, преобразуем выражения, входящие в (5.53):

$$\begin{aligned}a_{\beta\gamma}A_{\beta(\delta)}\bar{A}_{\gamma(\delta)}&=a_{\beta\gamma}\left[B_{\beta(\delta)}B_{\gamma(\delta)}+C_{\beta(\delta)}C_{\gamma(\delta)}\right]=a_\delta>0,\\ g_{\beta\gamma}A_{\beta(\delta)}\bar{A}_{\gamma(\delta)}&=ig_{\beta\gamma}\left[C_{\beta(\delta)}B_{\gamma(\delta)}-C_{\gamma(\delta)}B_{\beta(\delta)}\right]=ig_\delta,\\ f_{\beta\gamma}A_{\beta(\delta)}\bar{A}_{\gamma(\delta)}&=f_{\beta\gamma}\left[B_{\beta(\delta)}B_{\gamma(\delta)}+C_{\beta(\delta)}C_{\gamma(\delta)}\right]=f_\delta.\end{aligned} \tag{5.54}$$

Здесь a_δ, g_δ, f_δ — действительные величины, причем величина a_δ является суммой двух определенно-положительных квадратичных форм и поэтому тоже положительна. Квадратичные формы, сумма которых равна f_δ, в силу (5.36) будут определенно-положительными только для статически устойчивого положения равновесия; билинейная форма g_δ может быть как положительной, так и отрицательной. Уравнение (5.53) с учетом (5.54) принимает вид

$$a_{(\delta)}\lambda_\delta^2 + ig_{(\delta)}\lambda_\delta + f_\delta = 0, \tag{5.55}$$

откуда

$$\lambda_\delta = -i\frac{g_{(\delta)}}{2a_{(\delta)}}\left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4a_{(\delta)}f_{(\delta)}}{g_{(\delta)}^2}}\right]. \tag{5.56}$$

В рассматриваемом случае устойчивых решений корни λ_δ должны быть, как отмечалось выше, чисто мнимыми, поэтому подкоренное выражение не должно быть отрицательным:

$$g_{(\delta)}^2 + 4a_{(\delta)}f_{(\delta)} \geqslant 0 \quad (\delta = 1, \ldots, m). \tag{5.57}$$

Отсюда непосредственно следует вывод, который уже приводился вместе с другими общими теоремами в п. 5.2.2, а именно: в случае статически устойчивого положения равновесия ($f_\delta > 0$) добавление гироскопических сил не нарушает устойчивости, статически неустойчивое положение равновесия может стать устойчивым (не асимптотически) только при достаточно больших гироскопических силах, т. е. при достаточно больших кинетических моментах гироскопов.

Полученные выше результаты позволяют достичь некоторых упрощений для случая быстро вращающихся гироскопов. Введем для этого параметр H, имеющий размерность кинетического момента, положив

$$H_\varkappa = k_\varkappa H, \tag{5.58}$$

и будем рассматривать предельный случай, когда $H \to \infty$. Из (5.58) следует, что

$$g_{\beta\gamma} = Hg_{\beta\gamma}^*, \quad g_\delta = Hg_\delta^*, \qquad (5.59$$

где величины $g_{\beta\gamma}^*$ и g^* уже не зависят от H, так как элементы гироскопической матрицы в силу (5.45) зависят линейно от $H_\varkappa$.

Подставим (5.59) в (5.56) и, разлагая радикал в ряд по степеням $1/H$, получим следующие приближенные выражения для корней:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{\delta 1} &\approx i\frac{f_{(\delta)}}{Hg_{(\delta)}^*} \\ \lambda_{\delta 2} &\approx -i\frac{Hg_{(\delta)}^*}{a_{(\delta)}} \end{aligned}\right\} \quad (\delta = 1, \ldots, m). \tag{5.60}$$

Корни $\lambda_{\delta 1}$, приближенная формула для которых получена с учетом двух членов ряда, при $H \to \infty$ стремятся к нулю; им соответствуют медленные прецессионные колебания гироскопической системы. Корни $\lambda_{\delta 2}$, приближенное выражение которых получено с учетом одного члена ряда, растут пропорционально H; с ними следует сопоставить быстрые нутационные колебания. Таким образом, справедливо следующее общее утверждение:

Собственные частоты устойчивой консервативной гироскопической системы при $\det(g_{\beta\gamma}) \neq 0$ *распадаются на две группы; при большом кинетическом моменте H частоты одной группы можно приближенно считать пропорциональными* $1/H$, *а частоты другой группы — пропорциональными H.*

Очевидно, что такое разбиение частот на две группы возможно только в случае четного m. Вследствие (5.50), кроме корней (5.60), имеется еще m корней, модули которых равны модулям соответствующих корней (5.60), а знаки противоположны. Нетрудно показать, что эти корни получаются при перемене местами индексов β и γ в (5.53). Следовательно, каждому значению δ можно поставить в соответствие четыре корня, поэтому степень $2m$ характеристического уравнения должна делиться на 4, что имеет место в случае четного m.

Условие четности m содержится в более строгом требовании $\det(g_{\beta\gamma}) \neq 0$. Необходимость этого требования вытекает из рассмотрения характеристического уравнения (5.49). Запишем его левую часть в виде полинома степени $2m$:

$$\Delta(\lambda) = b_{2m}\lambda^{2m} + b_{2m-2}\lambda^{2m-2} + \ldots + b_2\lambda^2 + b_0 = 0. \tag{5.61}$$

Если m четное, то здесь содержится член

$$b_m\lambda^m, \qquad b_m(H) = \det\left(g^*_{\alpha\beta}\right)H^m + \ldots .$$

Наивысшая степень параметра H входит в $b_m(H)$ с множителем $\det\left(g^*_{\alpha\beta}\right)$. Соседние с b_m коэффициенты тоже суть многочлены от H, но их степень тем меньше числа m, чем более они удалены от среднего коэффициента. Крайние коэффициенты $b_{2m} = \det(a_{\alpha\beta})$ и $b_0 = \det(f_{\alpha\beta})$ не зависят от H. В предельном случае быстровращающихся гироскопов, когда $H \to \infty$, в выражениях для коэффициентов доминируют члены со старшими степенями H. Эти степени в выражении

$$\Delta_1(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-2}\lambda^{m-2} + \ldots + b_2\lambda^2 + b_0 \tag{5.62}$$

убывают, а в выражении

$$\Delta_2(\lambda) = b_{2m}\lambda^{2m} + b_{2m-2}\lambda^{2m-2} + \ldots + b_m\lambda^m \tag{5.63}$$

возрастают. Если положить оба этих выражения равными нулю, то из условия $\Delta_1 = 0$ получим корни, модули которых приблизительно пропорциональны $1/H$, в то время как модули корней уравнения

$\Delta_2 = 0$ приблизительно пропорциональны H. Приближенное выражение для корней уравнения $\Delta_1 = 0$ совпадает с $\lambda_{\delta 1}$ из (5.60), а приближенное выражение для корней уравнения $\Delta_2 = 0$ совпадает с $\lambda_{\delta 2}$. Примененный здесь прием замены характеристического уравнения двумя уравнениями оправдывается существованием двух групп корней.

Из наших рассуждений следует, что полное разбиение корней на две группы возможно только при $\det(g'_{\beta\gamma}) \neq 0$. В случае особой гироскопической матрицы, когда $\det(g'_{\beta\gamma}) = 0$, но среди миноров порядка $m - 1$ хотя бы один не равен нулю, коэффициенты b_{m+2}, b_m и b_{m-2} имеют одинаковый порядок роста относительно величины H. Поэтому в предельном случае $H \to \infty$ существуют два корня характеристического уравнения, которые стремятся к предельному значению, не зависящему от H. Следовательно, движения, соответствующие этим корням, не будут ни прецессией, ни нутацией. Мы назовем их *маятниковыми колебаниями.*

У системы с нечетным m существует по крайней мере один вид маятниковых колебаний, так как в этом случае оба средних коэффициента b_{m-1} и b_{m+1} имеют одинаковый порядок роста относительно H. Чем выше дефект матрицы $g_{\beta\gamma}$, тем больше может оказаться видов маятниковых колебаний.

Таким образом, можно сказать, что в общем случае корни характеристического уравнения при $H \to \infty$ разбиваются на три группы, которым соответствуют прецессионные, нутационные и маятниковые колебания.

После надлежащего преобразования характеристического уравнения можно найти приближенные выражения для корней. Так, например, в первом приближении для корня с наименьшим модулем справедливо следующее выражение:

$$\lambda_1 \approx i\sqrt{b_0/b_2},$$

а для корня с наибольшим модулем

$$\lambda_m \approx i\sqrt{b_{2m-2}/b_{2m}},$$

Известными методами эти приближения могут быть улучшены. Однако для того, чтобы найти собственные частоты системы, совсем не обязательно исходить из характеристического уравнения. При расчетах, связанных с гироскопическими устройствами, вообще говоря, целесообразно использовать непосредственно уравнения движения. Если кинетический момент H достаточно велик, то в силу равенств $g_{\beta\gamma} = Hg'_{\beta\gamma}$ в уравнениях (5.46) доминируют средние члены. Для медленных движений силы инерции весьма малы. Следовательно, такие движения можно приближенно исследовать, исходя из условия равновесия между гироскопическими и позиционными силами, что приводит к приближенным уравнениям

$$g_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta + f_{\beta\gamma}x_\beta \approx 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, m). \tag{5.64}$$

Мы вновь пришли к приближенным уравнениям (5.45), полученным ранее другим способом. Их решение дает, за исключением вырожденных случаев, прецессионное движение, соответствующее корням $\lambda_{\delta 1}$ из (5.60). На этом основании в теории гироскопов уравнения (5.64) называют *уравнениями прецессионной теории.*

Если же, наоборот, исследуются быстрые движения (нутация), то силы инерции будут существенно больше, чем позиционные. Тогда приближенные уравнения движения записывают, исходя из условия равновесия между силами инерции и гироскопическими силами:

$$a_{\beta\gamma}\ddot{x}_\beta + g_{\beta\gamma}\dot{x}_\beta \approx 0 \quad (\gamma = 1, \ldots, m). \tag{5.65}$$

Их решение дает, опять же за исключением вырожденных случаев, нутационные колебания, соответствующие корням $\lambda_{\delta 2}$ из (5.60).

Уравнения (5.64) и (5.65) образуют систему дифференциальных уравнений, порядок которой в два раза ниже порядка полной системы (5.46)[1], поэтому найти их решение гораздо проще. Однако довольно сложно получить оценку погрешности, возникшей от замены точных уравнений приближенными. Поэтому очень важным является знание условий, достаточных для того, чтобы ошибка приближения стремилась к нулю при $H \to \infty$. Меркиным [8, стр. 185] указаны следующие три условия:

(5.66):
1) должно выполняться неравенство $\det(g_{\beta\gamma}) \neq 0$, откуда следует, что m должно быть четным;
2) решения приближенной системы (5.45) или соответственно (5.64) должны быть устойчивыми;
3) система первого приближения не должна иметь кратных корней.

Условия (5.66) по существу уже были использованы выше. Следует, однако, отметить, что невыполнение этих условий не обязательно приводит к отказу от приближенного метода исследования. Это будет более подробно пояснено на примере.

5.3.3. Пример: несвободный гироскоп в трехрамном подвесе. Схематически изображенный на рис. 5.1 гироскоп в трехрамном подвесе представляет систему четырех предполагаемых абсолютно твердыми тел: ротора *1*, внутренней рамки *2*, промежуточной рамки *3* и внешней рамки *4*. Углы последовательных относительных поворотов этих тел обозначим соответственно через φ, β, α, δ, причем δ является углом поворота внешней рамки относительно неподвижного основания. Центр тяжести подсистемы, состоящей из ротора и внутренней рамки, находится на оси ротора и в общем случае не совпадает с точкой пересечения осей подвеса, т. е. на систему действуют моменты силы тяжести. Кроме того, в

[1] Для системы (5.65) понижение порядка достигается с помощью подстановки $\dot{x}_\beta = y_\beta$. — *Прим. ред.*

горизонтальное положение равновесия внешнюю рамку приводят пружины.

Для данной гироскопической системы составим технические уравнения, которые в случае малых отклонений линеаризуем и решим. Затем для случая малых колебаний исследуем общие уравнения, чтобы таким путем найти приближенные значения для собственных частот системы.

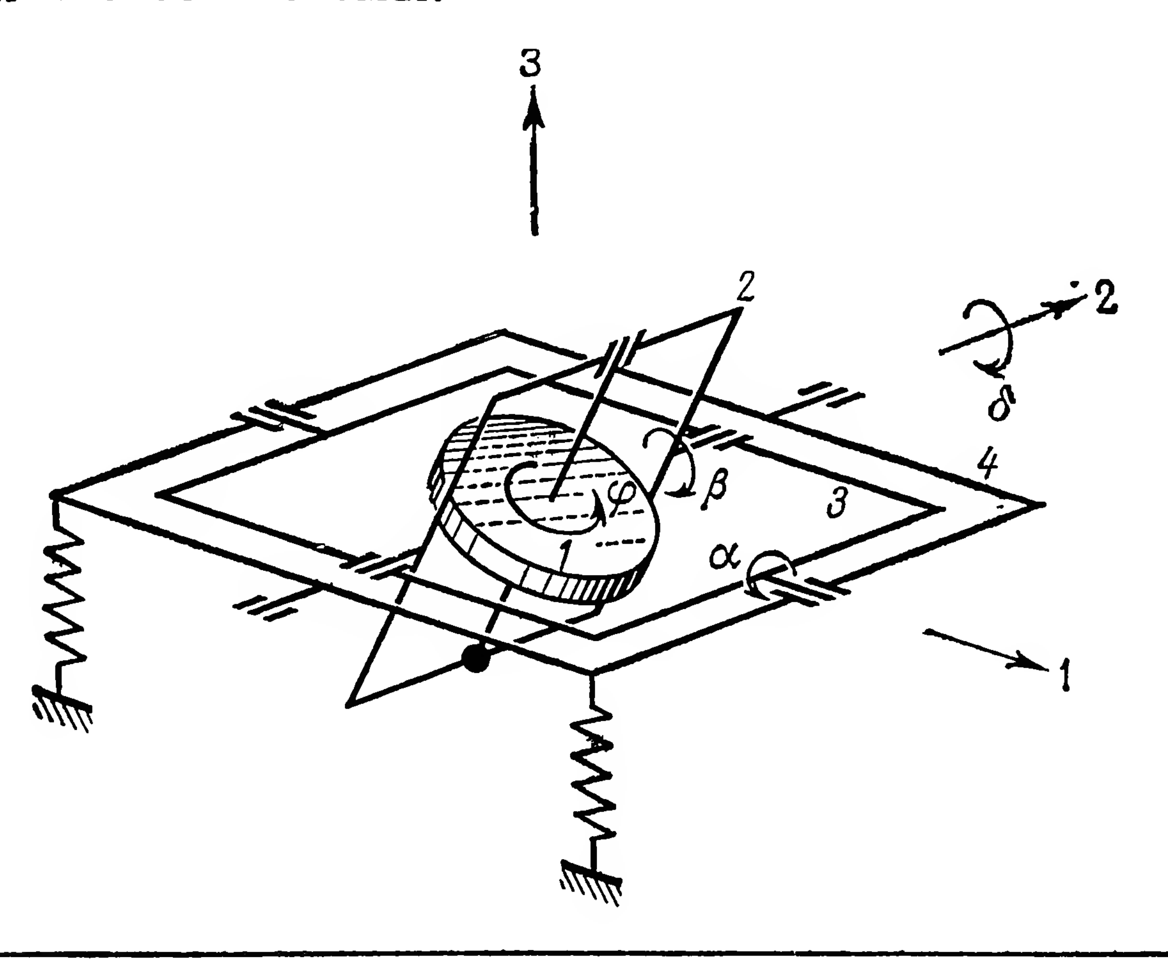


Рис. 5.1. Тяжелый гироскоп в трехрамном подвесе на пружинах.

Для вывода приближенных уравнений используем данные в п. 5.3.1 рекомендации. Здесь имеется только один ротор, поворот которого вокруг оси симметрии описывается циклической координатой φ, поэтому будет один постоянный кинетический момент

$$H_1 \approx C_1\dot{\varphi} = H.$$

Далее найдем, согласно (5.44), укороченную функцию Рауса

$$R_1 = H_\kappa h_{\kappa\alpha}\dot{q}_\alpha = H(\dot{\alpha}\sin\beta - \dot{\delta}\sin\alpha\cos\beta)$$

и, согласно (5.43), приближенные уравнения движения, справедливые для случая быстровращающегося гироскопа:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}H\cos\beta + \dot{\delta}H\cos\alpha\cos\beta &= Q_\alpha, \\ -\dot{\alpha}H\cos\beta - \dot{\delta}H\sin\alpha\sin\beta &= Q_\beta, \\ -\dot{\alpha}H\cos\alpha\cos\beta + \dot{\beta}H\sin\alpha\sin\beta &= Q_\delta. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Обобщенные силы Q можно определить с помощью потенциала $U = U(\alpha, \beta, \delta)$. Выписывая потенциал, сразу же ограничимся

случаем малых отклонений углов α, β, δ от значений $\alpha = \delta = \beta = 0$, соответствующих положению равновесия; тогда

$$U \approx {}^1/_2 mgs[\alpha^2 + (\beta + \delta)^2] + {}^1/_2 c_\delta \delta^2.$$

Мы положили $U(0, 0, 0) = 0$ и пренебрегли всеми членами, порядок которых относительно α, β, γ выше второго; через c_δ обозначен постоянный коэффициент упругости пружины. Положив $c = mgs$, найдем обобщенные силы

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -c\alpha,$$

$$Q_\beta = -\frac{\partial U}{\partial \beta} = -c(\beta + \delta),$$

$$Q_\delta = -\frac{\partial U}{\partial \delta} = -c(\beta + \delta) - c_\delta \delta.$$

Следовательно, линеаризованная для малых отклонений система (5.67) имеет вид

$$\begin{aligned} H\dot\beta + H\dot\delta + c\alpha &= 0, \\ -H\dot\alpha + c\beta \ + c\delta &= 0, \\ -H\dot\alpha + c\beta \ + (c + c_\delta)\delta &= 0. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Из сравнения с (5.64) видно, что матрицы, введенные выше, для данной системы будут такими:

$$g_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & H & H \\ -H & 0 & 0 \\ -H & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & c & c + c_\delta \end{bmatrix}. \tag{5.69}$$

Отсюда непосредственно видно, что $\det(g_{\beta\gamma}) = 0$ и число $m = 3$ здесь будет нечетным. Рассмотрим характеристическое уравнение системы (5.68)

$$\Delta^*(\lambda) = \det(g_{\beta\gamma}\lambda + f_{\beta\gamma}) = \begin{vmatrix} c & H\lambda & H\lambda \\ -H\lambda & c & c \\ -H\lambda & c & c + c_\delta \end{vmatrix} = c_\delta(H^2\lambda^2 + c^2) = 0. \tag{5.70}$$

Его корням

$$\lambda = \pm ic/H \tag{5.71}$$

соответствует прецессионное движение. Хотя в данном случае условие (5.66/1) не выполняется, мы получили вполне достоверный результат, что будет показано ниже с помощью точного решения [см. формулы (5.77)].

Если ограничить свободу движения системы путем арретирования внешней рамки, то $\delta \equiv 0$ и третье из уравнений (5.68)

совпадет со вторым. Гироскопическая матрица для системы оставшихся двух уравнений будет

$$g_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{bmatrix},$$

откуда $\det(g_{\beta\gamma}) = H^2 \neq 0$. Из характеристического уравнения этой системы

$$\Delta^{**}(\lambda) = \begin{vmatrix} c & H\lambda \\ -H\lambda & c \end{vmatrix} = H^2\lambda^2 + c^2 = 0$$

находим снова пару корней (5.71), которым, следовательно, приближенно соответствует прецессионное движение и в случае арретированной внешней рамки. Однако на этот раз полученное приближение обосновано выполнением условий (5.66).

Если внутреннюю рамку жестко связать с промежуточной рамкой, то свобода движения системы ограничивается условием $\beta \equiv 0$, поэтому второе из уравнений (5.68) можно опустить. Для системы оставшихся уравнений вновь $\det(g_{\beta\gamma}) = H^2 \neq 0$, а характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta^{***}(\lambda) = \begin{vmatrix} c & H\lambda \\ -H\lambda & c + c_\delta \end{vmatrix} = H^2\lambda^2 + c(c + c_\delta) = 0$$

и имеет корни

$$\lambda = \pm i \frac{\sqrt{c(c + c_\delta)}}{H}. \tag{5.72}$$

Это приближение тоже является законным, так как и здесь выполняются условия (5.66). Таким образом, приближенные уравнения, справедливые для рассматриваемой системы с быстровращающимся гироскопом, в трех указанных случаях оказываются вполне пригодными, причем для двух последних случаев этот факт обоснован выполнением условий (5.66).

Учтем теперь ту часть R_2 энергии, которая была отброшена при выводе приближенных уравнений. В случае малых отклонений от положения равновесия имеем

$$R_2 = {}^1/_2 [(A_1 + A_2 + A_3)\dot{\alpha}^2 + (B_1 + B_2)\dot{\beta}^2 + \\ + 2(B_1 + B_2)\dot{\beta}\dot{\delta} + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)\dot{\delta}^2]. \tag{5.73}$$

Через A и B с индексами обозначены соответственно моменты инерции ротора и рамок относительно двух осей, которые в положении равновесия совпадают с осями 1 и 2; индексы соответствуют обозначениям рис. 5.1. Используя (5.42) и введя величины

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \quad B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \quad B^* = B_1 + B_2,$$

получим вместо (5.68) систему уравнений движения, в которых сохранены вторые производные от координат:

$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + H\dot{\delta} + c\alpha = 0,$$
$$B^*\ddot{\beta} + B^*\ddot{\delta} - H\dot{\alpha} + c\beta + c\delta = 0,$$
$$B^*\ddot{\beta} + B\ddot{\delta} - H\dot{\alpha} + c\beta + (c + c_\delta)\,\delta = 0.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A\lambda^2 + c & H\lambda & H\lambda \\ -H\lambda & B^*\lambda^2 + c & B^*\lambda^2 + c \\ -H\lambda & B^*\lambda^2 + c & B\lambda^2 + c + c_\delta \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$b_6\lambda^6 + b_4\lambda^4 + b_2\lambda^2 + b_0 = 0 \tag{5.75}$$

с коэффициентами

$$b_6 = AB^*(B_3 + B_4),$$
$$b_4 = H^2(B_3 + B_4) + c(A + B^*)(B_3 + B_4) + c_\delta AB^*,$$
$$b_2 = H^2 c_\delta + c^2(B_3 + B_4) + cc_\delta(A + B^*),$$
$$b_0 = c^2 c_\delta.$$

При заданных численных значениях моментов инерции и параметров H, c, c_δ нетрудно вычислить корни уравнения (5.75). Мы займемся здесь только случаем $H \to \infty$, чтобы иметь возможность провести сравнение с ранее найденными приближенными решениями. Оставив в коэффициентах уравнения (5.75) только высшие степени H, заменим его следующим приближенным уравнением:

$$\lambda^6 AB^*(B_3 + B_4) + \lambda^4 H^2(B_3 + B_4) + \lambda^2 H^2 c_\delta + c^2 c_\delta = 0. \tag{5.76}$$

Используя то обстоятельство, что при $H \to \infty$ коэффициенты этого уравнения являются величинами существенно разных порядков, мы можем приближенно найти его корни, приравняв нулю сумму двух соседних слагаемых. Тогда

$$\lambda_1^2 \approx -\frac{c^2}{H^2}, \qquad \lambda_2^2 \approx -\frac{c_\delta}{B_3 + B_4}, \qquad \lambda_3^2 \approx -\frac{H^2}{AB^*}. \tag{5.77}$$

Корню λ_1 здесь соответствует прецессионное движение, корню λ_2 — маятниковые колебания, корню λ_3 — нутационные колебания. Корень λ_1 совпадает с приближенным значением (5.71), уже найденным другим способом. Собственные частоты трех типов движения системы при большом кинетическом моменте достаточно удалены одна от другой, поэтому приближенное решение, найденное выше, оказывается все же полезным для технических приложений, хотя $\det(g_{\beta\gamma}) = 0$.

В случае ограниченной свободы движения, например при арретировании внешней рамки ($\delta \equiv 0$), в характеристическом уравнении (5.75) следует сделать предельный переход $c_\delta \to \infty$, и тогда из числа корней (5.77) останутся только λ_1 и λ_3. Маятниковые колебания при арретировании внешней рамки исчезают.

В случае арретирования внутренней рамки ($\beta \equiv 0$) лучше всего обратиться к следующей системе, получаемой для этого случая из (5.74):

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\delta} + c\alpha &= 0, \\ B\ddot{\delta} - H\dot{\alpha} + (c + c_\delta)\,\delta &= 0. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^4 AB + \lambda^2 [H^2 + c(A + B) + c_\delta A] + c(c + c_\delta) = 0$$

при большом кинетическом моменте $H \to \infty$ имеют приближенные значения

$$\lambda_1^2 \approx -\frac{c(c + c_\delta)}{H^2}, \qquad \lambda_2^2 \approx -\frac{H^2}{AB}. \tag{5.79}$$

Корень λ_1 здесь снова совпадает с приближенным выражением (5.72), найденным другим способом, в то время как λ_2 соответствует частоте нутации. Механический смысл полученных результатов очевиден: изменению направления в пространстве оси гироскопа теперь должно сопутствовать и движение внешней рамки; при этом как частота прецессии (корень λ_1), так и частота нутации (корень λ_2) отличны от значений (5.77) для случая неарретированной внутренней рамки: первая — за счет воздействия пружин, вторая — за счет увеличения моментов инерции движущихся масс.

5.4. Уравнения движения типа уравнений Эйлера

Эйлеровы уравнения движения твердого тела в форме (1.83) мы смогли получить из векторного равенства, выражающего теорему о кинетическом моменте, спроектировав это равенство на оси связанной с телом системы отсчета; началом координат служил либо центр масс S, либо произвольная точка тела или пространства. Если требуется исследовать движение системы тел, то соответствующие уравнения можно написать для каждого входящего в систему тела. При совместном рассмотрении этих уравнений возникают следующие три затруднения:

1) системы отсчета для различных составляющих тел вращаются одна относительно другой,
2) начала координат тоже могут перемещаться одно относительно другого,
3) реакции и их моменты, возникающие при взаимодействии тел системы, должны учитываться при составлении уравнений движения и входят в них как дополнительные неизвестные,

Вращение связанных с телами систем отсчета следует принимать во внимание потому, что все входящие величины затем пересчитывают для одной, надлежащим образом выбранной системы отсчета. Такой системой отсчета может оказаться, например, система главных осей инерции того из тел, которое нас главным образом интересует. Так, если исследуются вращательные движения спутника, внутри которого имеются подвижные массы, то целесообразнее всего использовать систему отсчета, связанную с оболочкой спутника.

Если общая система отсчета вращается с угловой скоростью Ω_i, то векторное равенство, выражающее в этой системе теорему о кинетическом моменте всех тел, записывается вместо (1.85) следующим образом:

$$\dot{H}_i = \overset{\circ}{H}_i + \varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k = M_i. \tag{5.80}$$

Здесь H_i — общий кинетический момент всех составляющих тел, а $\overset{\circ}{H}_i$ — локальная производная по времени в выбранной системе отсчета. Величины H_i зависят весьма сложно от относительных движений отдельных тел, поэтому в дальнейшем целесообразно равенство (5.80) рассмотреть подробнее. При этом из-за возможных относительных перемещений тел нельзя ограничиться только их вращательными движениями. Следует совместно использовать теоремы о количестве движения и о кинетическом моменте. Формально такое исследование можно довольно просто провести путем объединения вектора количества движения и вектора кинетического момента в некоторый объект более высокого порядка (импульсмотор) и получить обозримые уравнения (см., например, [42]), однако при решении конкретных задач эти уравнения необходимо проектировать на оси координат, что не дает существенных упрощений. Мы хотим привести уравнения к такому виду, чтобы был облегчен переход к их матричной форме, удобной для решения на вычислительных машинах. Существенными достижениями в этом направлении мы обязаны Лурье [43], Роберсону и Виттенбургу [44].

5.4.1. Уравнения движения для одного из тел системы. В п. 1.5.3 было установлено, что равенство, выражающее теорему о кинетическом моменте, принимает простую форму в системе отсчета, началом которой служит центр масс S:

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta_{ij}^S \omega_j\right) = \Theta_{ij}^S \frac{d^*\omega_j}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j \Theta_{kl}^S \omega_l = M_i^S. \tag{5.81}$$

Здесь, как и ранее, через $dx_i/dt = \dot{x}_i$ обозначен результат дифференцирования в инерциальной системе, а через $d^*x_i/dt = \overset{*}{x}_i$ — результат дифференцирования в системе, связанной с телом. Если

v_i^S — вектор скорости центра масс, то теорема о количестве движения выражается равенством

$$\frac{dI_i}{dt} = m\dot{v}_i^S = F_i. \tag{5.82}$$

Далее равенство (5.81) нужно преобразовать для случая, когда начало координат находится не в точке S, а в некоторой другой

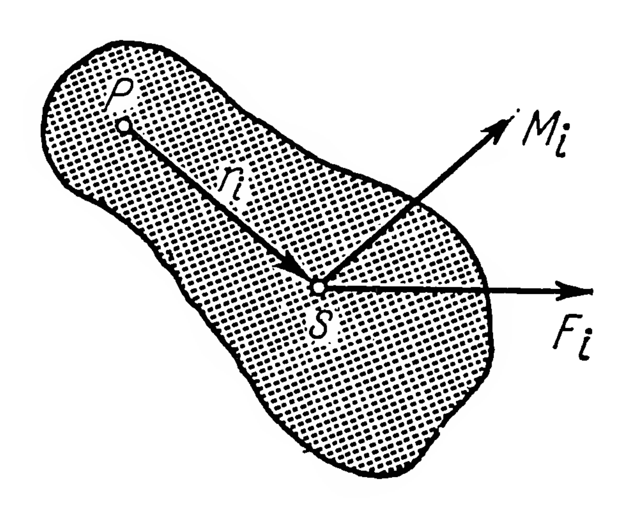


Рис. 5.2. К выводу теоремы о кинетическом моменте для тела, входящего в систему.

точке P тела (рис. 5.2). На основании соотношения Гюйгенса — Штейнера (1.17) имеем

$$\Theta_{ij}^S = \Theta_{ij}^P - m\left(r_k r_k \delta_{ij} - r_i r_j\right).$$

Умножим это равенство на ω_j:

$$\Theta_{ij}^S \omega_j = \Theta_{ij}^P \omega_j - m\left(r_k r_k \omega_i - r_i r_j \omega_j\right);$$

отсюда, учитывая (1.8), получаем

$$\Theta_{ij}^S \omega_j = \Theta_{ij}^P \omega_j - m\varepsilon_{ijk} r_j \varepsilon_{klm} \omega_l r_m. \tag{5.83}$$

Примем во внимание еще соотношения

$$M_i^S = M_i^P - \varepsilon_{ijk} r_j F_k,$$
$$v_i^S = v_i^P + \varepsilon_{ijk} \omega_j r_k,$$
$$\dot{v}_i^S = \dot{v}_i^P + \varepsilon_{ijk} \dot{\omega}_j r_k + \varepsilon_{ijk} \omega_j \varepsilon_{klm} \omega_l r_m,$$

тогда из (5.81) и (5.82) следует равенство

$$\Theta_{ij}^P \overset{*}{\omega}_j + \varepsilon_{ijk} \omega_j \Theta_{kl}^P \omega_l + m\varepsilon_{ijk} r_j \dot{v}_k^P = M_i^P, \tag{5.84}$$

которое выражает теорему о кинетическом моменте для одного тела в системе отсчета, началом которой служит точка P, движущаяся вместе с телом. Этот результат соответствует полученному ранее уравнению (1.76).

Допустим теперь, что имеется N составляющих систему тел K^α $(\alpha=1, \ldots, N)$, и мы рассматриваем их движение относительно системы координат, вращающейся с угловой скоростью Ω_i. Осями такой системы координат могут быть, например, главные оси инерции тела K, которое является телом отсчета для рассматриваемой совокупности тел. Если через ω_i^α обозначить относительную угловую скорость тела с номером α, то его абсолютная угловая скорость будет

$$\omega_i=\Omega_i+\omega_i^\alpha.$$

Далее имеем

$$\dot{\Omega}_i=\overset{\circ}{\Omega}_i=\overset{*}{\Omega}_i+\varepsilon_{ijk}\omega_j^\alpha\Omega_k,$$

$$\dot{\omega}_i^\alpha=\overset{\circ}{\omega}{}_i^\alpha+\varepsilon_{ijk}\Omega_j\omega_k^\alpha=\overset{*}{\omega}{}_i^\alpha+\varepsilon_{ijk}\Omega_j\omega_k^\alpha,$$

$$\overset{*}{\omega}_i=\overset{*}{\Omega}_i+\overset{*}{\omega}{}_i^\alpha=\overset{\circ}{\Omega}_i+\overset{\circ}{\omega}{}_i^\alpha+\varepsilon_{ijk}\Omega_j\omega_k^\alpha.$$

Разобьем главный момент, приложенный к указанному телу, на два слагаемых: момент $M_i^{B\alpha}$, возникающий от взаимодействия

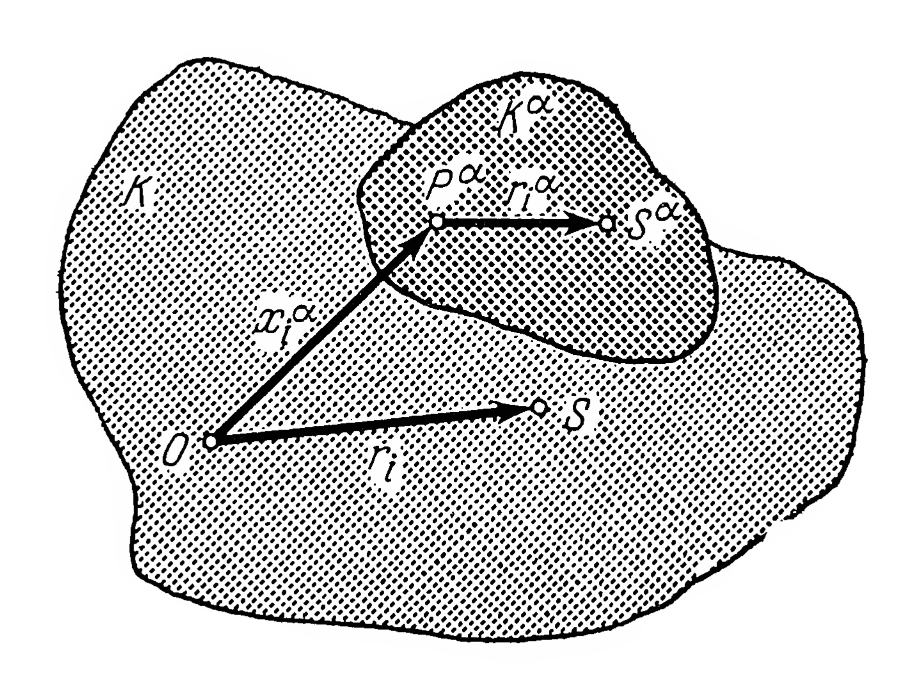


Рис. 5.3. Система твердых тел. тело отсчета K и тела K^α.

с телом отсчета, и сумму прочих моментов $M_i^{P\alpha}$; тогда из (5.84) следует

$$\Theta_{ij}^{P\alpha}\left(\overset{\circ}{\Omega}_j+\overset{\circ}{\omega}{}_j^\alpha+\varepsilon_{jkl}\Omega_k\omega_l^\alpha\right)+\varepsilon_{ijk}\left(\Omega_j+\omega_j^\alpha\right)\Theta_{kl}^{P\alpha}\left(\Omega_l+\omega_l^\alpha\right)+$$
$$+m^\alpha\varepsilon_{ijk}r_j^\alpha\dot{v}_k^{P\alpha}=M_i^{P\alpha}+M_i^{B\alpha}. \qquad (5.85)$$

Кроме того, запишем для тела равенство (5.82), выражающее теорему о количестве движения, обозначив через $F_i^{B\alpha}$ силу взаимодействия с телом отсчета и через F_i^α сумму сил, действующих со стороны остальных тел:

$$m^\alpha\dot{v}_i^{S\alpha}=F_i^\alpha+F_i^{B\alpha}. \qquad (5.86)$$

Для самого тела отсчета K теоремы о количестве движения и о кинетическом моменте дают следующие равенства (началом отсчета служит точка O; см. рис. 5.3):

$$m\dot{v}_i^S = F_i - \sum_\alpha F_i^{B\alpha}, \tag{5.87}$$

$$\Theta_{ij}^O \overset{\circ}{\Omega}_j + \varepsilon_{ijk}\Omega_j\Theta_{kl}^O\Omega_l + m\varepsilon_{ijk}r_j\dot{v}_k^O = M_i^O - \sum_\alpha M_i^{B\alpha} - \sum_\alpha \varepsilon_{ijk}x_j^\alpha F_k^{B\alpha}. \tag{5.88}$$

Здесь реакции $F_i^{B\alpha}$ и реактивные моменты $M_i^{B\alpha}$ взяты со знаком минус.

5.4.2. Уравнения движения для системы твердых тел. Реакции и их моменты, вообще говоря, нас не интересуют; чтобы их исключить, следует объединить уравнения для отдельных тел. Так, из (5.86) и (5.87) получаем уравнение, выражающее теорему о количестве движения для всей системы:

$$m\dot{v}_i^S + \sum_\alpha m^\alpha \dot{v}_i^{S\alpha} = F_i + \sum_\alpha F_i^\alpha = R_i, \tag{5.89}$$

где R_i — главный вектор всех внешних сил, приложенных к системе.

Прибавлением N уравнений (5.85) к (5.88) можно исключить $M_i^{B\alpha}$. Учитывая (5.86) и относя все внешние моменты к началу отсчета O, получим следующее векторное уравнение:

$$\begin{aligned}\left(\Theta_{ij}^O + \sum_\alpha \Theta_{ij}^{P\alpha}\right)\overset{\circ}{\Omega}_j + \varepsilon_{ijk}\Omega_j\left(\Theta_{kl}^O + \sum_\alpha \Theta_{kl}^{P\alpha}\right)\Omega_l + \\ + \sum_\alpha \left[\Theta_{ij}^{P\alpha}\left(\overset{\circ}{\omega}_j^\alpha + \varepsilon_{jkl}\Omega_k\omega_l^\alpha\right) + \varepsilon_{ijk}\Omega_j\Theta_{kl}^{P\alpha}\omega_l^\alpha + \right. \\ \left. + \varepsilon_{ijk}\omega_j^\alpha\Theta_{kl}^{P\alpha}\left(\Omega_l + \omega_l^\alpha\right) + m^\alpha\varepsilon_{ijk}\left(r_j^\alpha\dot{v}_k^{P\alpha} + x_j^\alpha\dot{v}_k^{S\alpha}\right)\right] + \\ + m\varepsilon_{ijk}r_j\dot{v}_k^O = M_i^O + \sum_\alpha M_i^{O\alpha} = M_i^{OR},\end{aligned} \tag{5.90}$$

где M_i^{OR} — главный момент относительно точки O всех внешних сил, действующих на систему.

Практическое использование векторного уравнения (5.90) требует значительных вычислительных усилий, так как при переходе к общей системе отсчета придется использовать матрицы преобразований, дающие переход от систем координат, связанных с телами, к общей системе, причем элементы этих матриц в общем случае изменяются во времени.

Уравнения такого рода уже применялись при исследовании гироскопа в кардановом подвесе с несимметричным ротором в п. 4.5.1 [см. уравнения (4.70)—(4.72)].

При решении конкретных задач ситуация значительно упрощается, когда составляющие систему тела оказываются симме-

тричными роторами с осями симметрии, жестко связанными с телом отсчета. Решение может также облегчить специальное расположение центров тяжести S^{α} отдельных тел. В общих случаях необходимые преобразования могут быть проведены до конца только с помощью вычислительных машин. При надлежащем программировании можно даже автоматизировать вывод уравнений в координатах с последующим их решением. Соответствующие алгоритмы даны Виттенбургом [45]; они предусматривают одновременно возможность исследовать различные связи между составляющими систему телами. Часто встречающийся случай, когда некоторые из кинематических параметров системы изменяются незначительно, и получающиеся в нем упрощения исследовали Роберсон и Ликинс [46].

Полученные уравнения движения можно дополнительно преобразовать. Так, Шилен [47] вместо тензора инерции второго ранга использовал величины третьего ранга, описывающие геометрию масс, и ввел тензор второго ранга для задания положений отдельных тел. В качестве начал отсчета были выбраны центры тяжести тел с тем, чтобы облегчить приложение к проблемам, связанным со спутниками. Таким способом получаются весьма компактные формулы. Более подробное изложение упомянутых здесь результатов читатель найдет в специальных работах.

Глава 6

Вращение не абсолютно твердых тел

При анализе особенностей движения Земли, связанных с проявлением гироскопических эффектов, были обнаружены расхождения между наблюдениями и теоретическими результатами, полученными в предположении, что Земля — абсолютно твердое тело. Более точные расчеты показали, что эти расхождения могут быть объяснены упругой податливостью тела Земли и изменениями в расположении масс, обусловленными перемещением воды на земной поверхности. Деформации маховика или вала могут заметно влиять и на поведение технических гироскопов. Для приближенного исследования подобных явлений можно было бы воспользоваться методами, изложенными в гл. 5. В этом случае деформируемое тело надо было бы представить в виде системы связанных между собой твердых тел, однако во многих случаях другие методы быстрее приводят к цели. Ниже рассматривается несколько наиболее типичных примеров; при этом анализ некоторых уже известных гироскопических явлений обобщается на случай не абсолютно твердых тел.

6.1. Деформируемый гироскоп

Влияние упругих деформаций на частоты нутации и прецессии вращающихся тел эллипсоидальной формы было подробно изучено Клейном и Зоммерфельдом [6]. Их цель состояла в том, чтобы выяснить и истолковать гироскопические эффекты в движении Земли. Оказалось, что в случае Земли, помимо упругих сил, необходимо учитывать и взаимное притяжение масс Земли. Было получено два важных результата:

1) упругие деформации гироскопа практически не влияют на период его прецессии; в отличие от этого

2) нутационный период деформируемого гироскопа, например Земли, больше, чем у такого же по форме, но абсолютно твердого гироскопа.

Из наблюдений за перемещением полюсов было установлено, что период нутации Земли составляет 14 месяцев — период Чанд-

лера. Расчет по формуле (2.38), справедливой для абсолютно твердого тела, дает для Земли время T_p обхода полодии, равное 10 месяцам. Если же учесть возможность малых упругих деформаций материала Земли, то можно получить хорошее совпадение теоретического периода с наблюдаемым. Для этого надо, полагая Землю однородным упругим телом, считать, что модуль упругости ее примерно на 25% больше, чем у стали. Таким образом, упругие деформации дают по крайней мере качественное объяснение наблюдаемых отклонений. Еще более точная теория должна учитывать, что Земля не является однородным телом и частично состоит из жидкости.

В гироскопической технике деформации роторов также могут оказывать столь существенное влияние, что должны приниматься во внимание. Деформироваться могут как вал, так и маховик ротора. Влияние этих деформаций на поведение гироскопа будет подробно рассмотрено в § 11.3.

У Перри [9] и Павлова [48] имеется описание опытов, в которых демонстрируются гироскопические явления и связанные с ними изменения формы *гибкого диска*. Диск из легко сгибающегося материала, например из бумаги или ткани, при быстром вращении приобретает свойства твердой пластины и может даже издавать звук при ударе по нему палочкой, как металлический диск. Если диск из такого гибкого материала, вращающийся вокруг оси 1, перпендикулярной его плоскости, дополнительно поворачивать вокруг оси, лежащей в плоскости диска, например вокруг оси 2, как это показано на рис. 6.1, то поверхность диска изгибается и принимает форму, наглядно демонстрирующую действие гироскопических сил (сил Кориолиса). В направлении деформации ясно видна тенденция к совмещению осей собственного и дополнительного вращений (совершаемых с угловыми скоростями ω_1 и ω_2).

Эти эффекты, в том числе и аналогия с поведением жесткого гироскопа, хорошо объясняются теорией. Покажем это на примере, в котором вместо гибкого диска рассмотрим гибкое кольцо (свернутую в кольцо цепочку). Кольцо приводится в быстрое равномерное вращение в плоскости 2-3 ведущей шайбой S (рис. 6.2). Тонкие нити, подобно спицам колеса, соединяют каждое звено цепочки с ведущей шайбой. Шайба вращается вокруг оси 1, и ее центр O неподвижен в пространстве. Если отдельные звенья цепочки достаточно малы, то ее можно считать сплошным гибким канатиком. Пусть положение отдельного звена длины ds с массой μds характеризуется вектором r_i, представляющим собой сумму векторов R_i и L_i, направленных соответственно по радиусу шайбы и вдоль нити. На это звено в качестве внешних сил действуют со стороны нити сила натяжения F_i и со стороны соседних звеньев силы K_i натяжения цепочки, которые можно свести к одной результирующей силе ΔK_i. Если пренебречь весом цепи

и сопротивлением воздуха, то уравнение движения отдельного звена можно представить в виде

$$\mu\, ds \frac{dv_i}{dt} = F_i + \Delta K_i = (f_i + \Delta k_i)\, ds. \qquad (6.1)$$

Для случая равномерного вращения ведущей шайбы с угловой скоростью $\omega_i = (\omega_{10}, 0, 0)$ нетрудно найти частное решение, согласно которому цепочка в виде кольца радиусом $R + L$ вра-

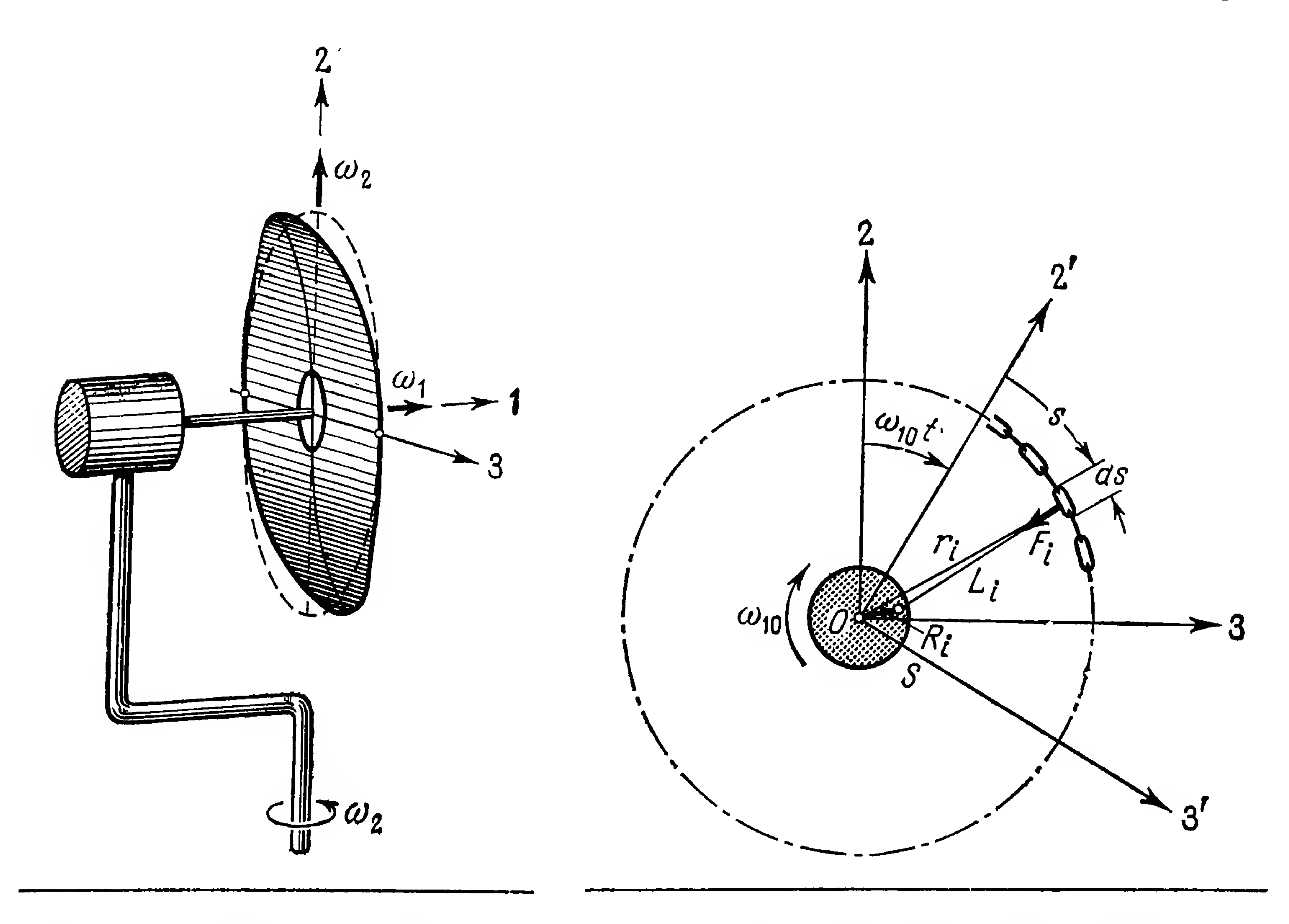


Рис. 6.1. Деформация быстровращающегося гибкого диска при дополнительном вращении вокруг оси 2.

Рис. 6.2. Вращающееся гибкое кольцо.

щается концентрично с ведущей шайбой в той же плоскости. Это решение таково:

$$\begin{aligned} &r_i = R_i \frac{R+L}{R}, \qquad r = R + L = r_0, \\ &v_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j r_k, \qquad v = r_0\omega_{10} = v_0, \\ &\frac{dv_i}{dt} = \varepsilon_{ijk}\omega_j \frac{dr_k}{dt} = -r_0\omega_{10}^2 \frac{R_i}{R}, \\ &\mu r_0 \omega_{10}^2 = f_0 + \Delta k_0. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Сила $F_0 + \Delta K_0$ направлена по радиусу и в точности уравновешивается центробежной силой.

Для того чтобы найти решения, близкие к (6.2), запишем уравнение (6.1) в системе координат, связанной с вращающейся шайбой. Согласно (1.55),

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d'v_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j v_k,$$

поэтому из (6.1) следует

$$\mu\left(\frac{d'v_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j v_k\right) = f_i + \Delta k_i. \tag{6.3}$$

Здесь v_i — абсолютная скорость звена цепочки.

Ограничимся тем, что выделим из системы (6.3) уравнение для малых отклонений от основного решения по одной только координате 1, т. е. будем рассматривать лишь отклонения звеньев цепочки от плоскости ведущей шайбы. Если опять положить $\omega_i = (\omega_{10}, 0, 0)$, то, учитывая, что $v_1 = \dot{r}_1$, левую часть (6.3) можно записать как $\mu\ddot{r}_1$. Проекцию силы натяжения нити в правой части при малых отклонениях можно приближенно выразить в виде

$$f_1 = -f_0 r_1/L.$$

Соответствующее выражение для проекции сил натяжения цепочки можно получить из тех соображений, что результирующий вектор этих сил должен совпадать с главной нормалью цепочки, имеющей теперь форму пространственной кривой. В первом приближении вектор главной нормали имеет координаты

$$r_0\left(\frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2},\ \frac{\partial^2 r_2}{\partial s^2},\ \frac{\partial^2 r_3}{\partial s^2}\right).$$

Если принять во внимание соотношение

$$K_0 = \Delta K_0 \frac{r_0}{ds} = \Delta k_0 r_0,$$

то проекция сил натяжения на ось 1 запишется в виде

$$\Delta k_1 = \Delta k_0 r_0 \frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2} = K_0 \frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2}.$$

Теперь можно выписать первое координатное уравнение системы (6.3):

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} + \frac{f_0}{L} r_1 = K_0 \frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2}. \tag{6.4}$$

Решение $r_1 = r_1(s, t)$ этого уравнения в частных производных зависит от переменных s и t. Оно определяет форму цепочки и перемещения ее звеньев вдоль направления 1. Рассмотрим решение этого уравнения для двух частных случаев.

Сначала положим, что $f_0 = 0$. Это соответствует полностью освобожденной цепочке, не испытывающей никакого воздействия со

стороны нитей. В этом случае уравнение (6.4) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2} \tag{6.5}$$

со скоростью распространения волны

$$c = \sqrt{K_0/\mu}.$$

Имея в виду, что $K_0 = \Delta k_0 r_0$, и учитывая последнее соотношение (6.2), получаем $K_0 = \mu r_0^2 \omega_{10}^2$, так что

$$c = r_0 \omega_{10} = v_0. \tag{6.6}$$

Таким образом, скорость распространения возмущения вдоль цепочки в точности совпадает с абсолютной скоростью движения ее звеньев, так что любое местное смещение звеньев, перпендикулярное плоскости невозмущенного движения, при распространении волны навстречу движению цепочки остается постоянным в пространстве. Все звенья поочередно пробегают неподвижную в пространстве впадину. Это явление представляет собой пространственный аналог известного свойства замкнутой цепочки сохранять свою форму при свободном движении в неподвижной плоскости — *эффект Редингера.*

Чтобы подчеркнуть гироскопический характер движения, рассмотрим случай, когда в начальный момент $t = 0$ цепочка в форме кольца вращается в неподвижной плоскости, слегка отклоненной от плоскости 2-3, как показано на рис. 6.3; при этом

$$r_{10} = A\cos(s/r_0), \qquad \dot r_{10} = -A\omega_{10}\sin(s/r_0).$$

Таким начальным условиям соответствует частное решение уравнения (6.5)

$$r_1 = A\cos(s/r_0 + \omega_{10} t). \tag{6.7}$$

Во вращающейся системе координат 2′, 3′ (рис. 6.2) максимальное значение A координаты r_1 соответствует точке $s + r_0\omega_{10} t = 0$ и перемещается вдоль цепочки *навстречу* движению ее звеньев со скоростью $v_0 = r_0\omega_{10}$. Относительно неподвижной системы координат 1, 2, 3 положение этой точки остается неизменным, а следовательно, неизменным остается положение всей плоскости кольца. Таким образом, вращающееся кольцо цепочки сохраняет неизменной в пространстве ориентацию оси собственного вращения точно так же, как обычный свободный гироскоп.

Однако уравнение (6.5) имеет и другое частное решение

$$r_1 = A\cos(s/r_0 - \omega_{10} t), \tag{6.8}$$

соответствующее начальным условиям

$$r_{10} = A\cos s/r_0, \qquad \dot r_{10} = A\omega_{10}\sin s/r_0.$$

В этом случае точка, соответствующая максимальному значению r_1, перемещается со скоростью $v_0 = r_0\omega_{10}$ *в том же направлении*, что и звенья цепочки, так что относительно неподвижного пространства ее скорость составит величину $2v_0$. В каждый момент все звенья цепочки по-прежнему лежат в одной плоскости, но сама плоскость теперь колеблется относительно ведущей шайбы с круговой частотой $2\omega_{10}$. Это полный аналог нутационного движения твердого гироскопа, имеющего форму диска; его нутационная частота всегда равна удвоенному значению угловой скорости собственного вращения.

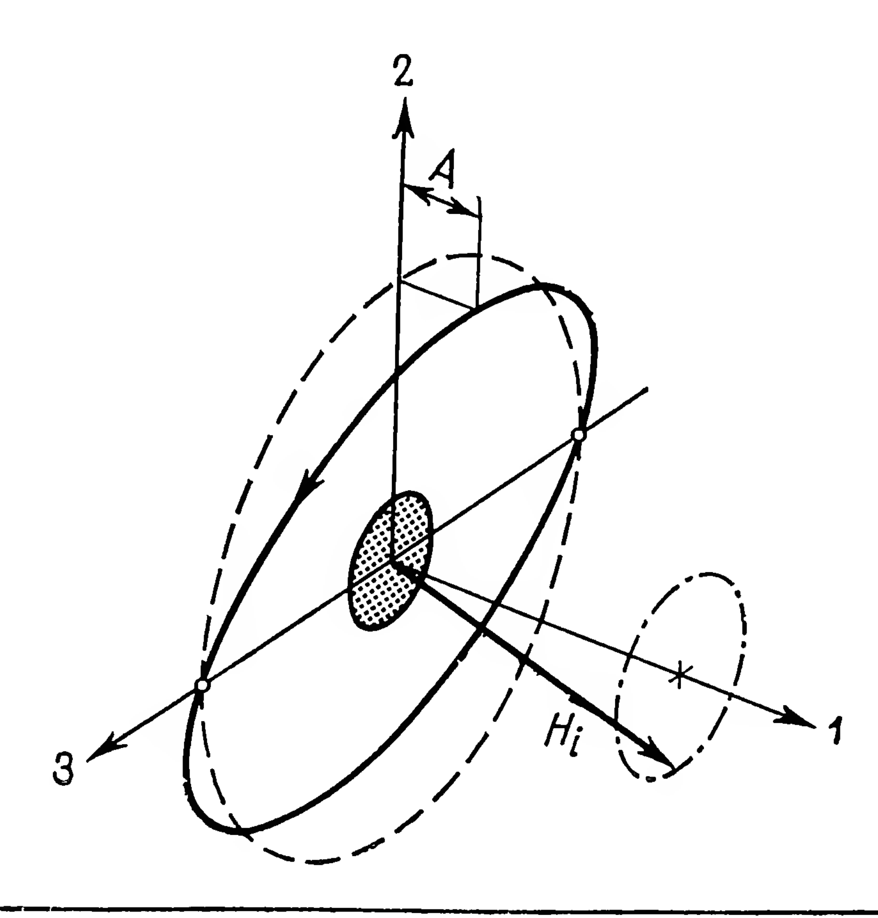


Рис. 6.3. Прецессия гибкого кольца.

При $f_0 \neq 0$ движение приобретает характер регулярной прецессии. Легко убедиться, что уравнение (6.4) имеет частное решение

$$r_1 = A\cos(s/r_0 + \nu t), \tag{6.9}$$

где

$$\nu^2 = \frac{K_0}{\mu r_0^2} + \frac{f_0}{\mu L} = \omega_{10}^2 + \frac{f_0}{\mu L} > \omega_{10}^2.$$

И в этом случае все кольцо цепочки лежит в одной плоскости. Относительно же неподвижного пространства нормаль к этой плоскости совершает коническое движение с круговой частотой $\nu - \omega_{10} > 0$ навстречу движению цепочки. Такое движение соответствует регулярной прецессии висячего симметричного гироскопа. Вектор кинетического момента H_i обегает поверхность кругового конуса, ось симметрии которого совпадает с направлением оси 1 (рис. 6.3).

В заключение найдем решение для случая, когда раскрученная цепочка участвует в дополнительном вынужденном вращении.

Положим, что ведущая шайба, помимо быстрого вращения с угловой скоростью ω_{10}, приводится в медленное вращение с угловой скоростью ω^* вокруг неподвижной в пространстве поперечной оси, например вокруг оси 2, как показано на рис. 6.4. Во вращающейся

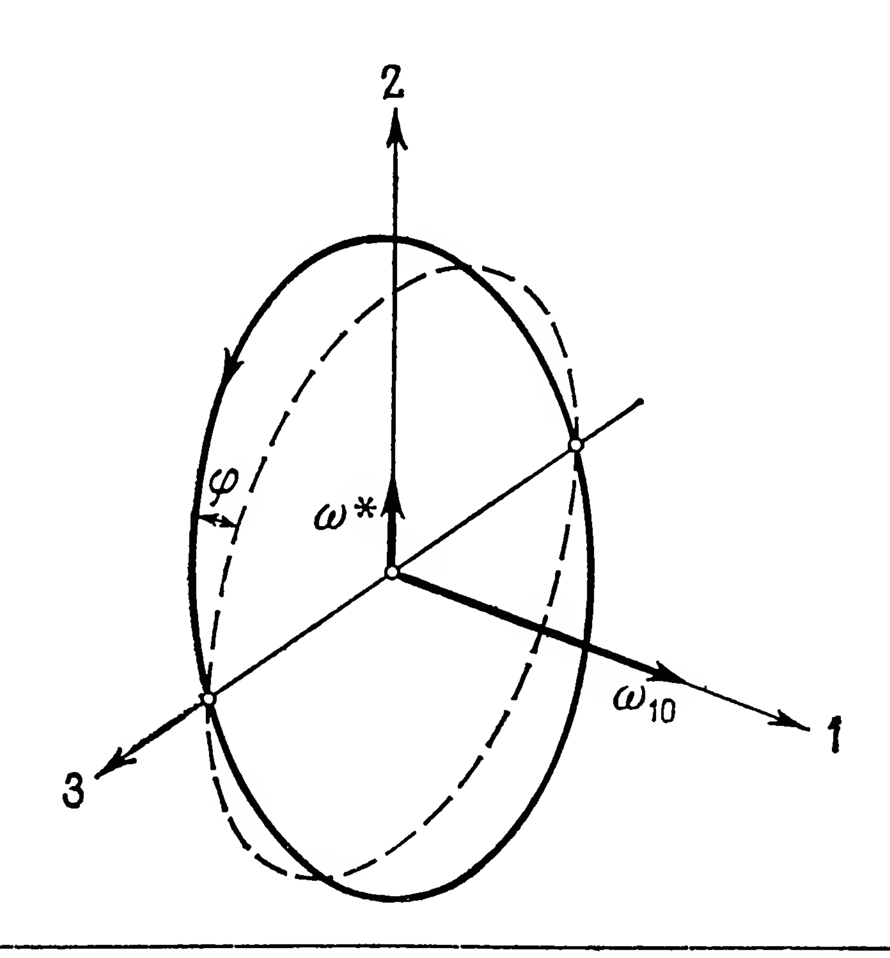


Рис. 6.4. Отклонение плоскости гибкого кольца при дополнительном вращении вокруг оси 2.

системе координат 1′, 2′, 3′ в этом случае имеем

$$\omega_i = (\omega_{10},\ \omega^* \cos \omega_{10} t,\ \ -\omega^* \sin \omega_{10} t),$$
$$v_i \approx (\dot{r}_1,\ \ -r_0 \omega_{10} \sin s/r_0,\ \ r_0 \omega_{10} \cos s/r_0).$$

Первое координатное уравнение системы (6.3) с учетом уже введенных обозначений принимает вид

$$\frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2} + r_0 \omega_{10} \omega^* \cos\left(\omega_{10} t + \frac{s}{r_0}\right) + \frac{f}{\mu L} r_1 = c^2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2}. \tag{6.10}$$

Оно имеет частное решение

$$r_1 = -\frac{\mu L r_0 \omega_{10} \omega^*}{f_0} \cos\left(\omega_{10} t + \frac{s}{r_0}\right). \tag{6.11}$$

Кольцо цепочки лежит в плоскости, отклоненной от плоскости 2-3 на угол

$$\varphi \approx \frac{r_{1\,\max}}{r_0} = \frac{\mu L \omega_{10} \omega^*}{f_0}.$$

Величина наклона пропорциональна угловой скорости вынужденного вращения ω^* и обратно пропорциональна усилию f_0. Направление наклона обнаруживает тенденцию к совмещению осей собственного и вынужденного вращения. Такое поведение цепочки

аналогично отклонению несвободного гироскопа, участвующего во вращении подвижной системы отсчета. Это свойство используется в гиротахометре (гл. 15) для измерения угловой скорости ω^*.

6.2. Гироскопы с жидким заполнением

В связи с попытками объяснить гироскопические явления в движении Земли были проведены и первые опыты с гироскопами, имеющими полости, заполненные жидкостью. Кельвин описал опыты с *жидкостным гиростатом*, представляющим собой тонкую оболочку в форме эллипсоида вращения, целиком заполненную жидкостью. Оказалось, что если оболочка имеет сплюснутую форму, то, после того как гиростат раскручен вокруг оси симметрии, он может двигаться на горизонтальной плоскости подобно волчку (рис. 6.5); между тем такой же гиростат в форме вытянутого эллипсоида падает, как только его отпустят. Подобный опыт можно

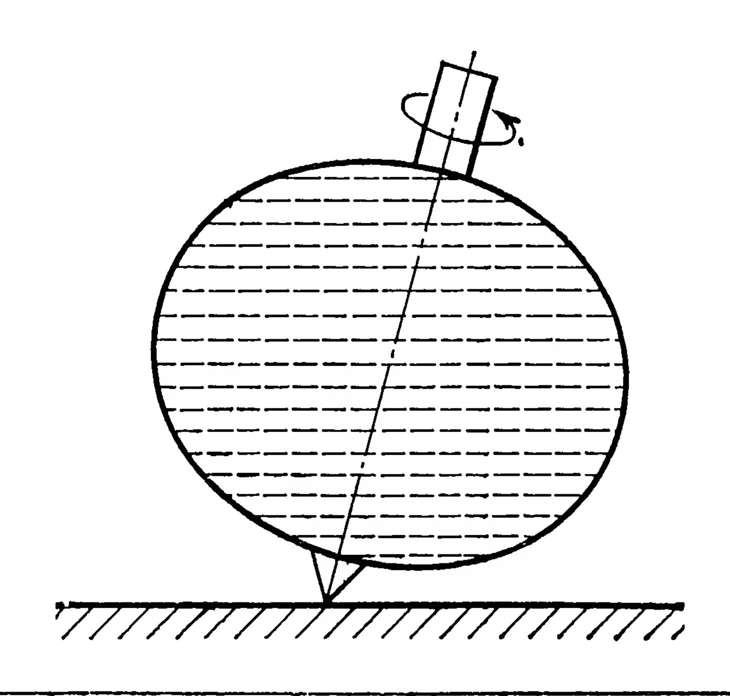


Рис. 6.5. Жидкостный гиростат Кельвина.

поставить и с цилиндрической оболочкой, как это сделал Перри [9].

Расчет такого явления весьма сложен, так как при точном описании движения жидкости необходимо пользоваться уравнениями непрерывного пространственного потока, поэтому теоретическое объяснение нашли лишь относительно простые случаи. При некоторых предпосылках оказывается возможным рассматривать движение оболочки, оперируя лишь с конечным числом переменных. Например, при изучении устойчивости движения интерес представляет главным образом поведение оболочки, характер же течения жидкости внутри полости имеет второстепенное значение. Правда, оба движения взаимодействуют одно с другим, так что уравнения движения должны учитывать наличие и оболочки, и жидкости. Мы рассмотрим некоторые аспекты такого анализа. Более подробное изложение можно найти в основополагающей работе Жуковского

[49] и в обзорном докладе Румянцева [50], наиболее полно обобщающем результаты по данному вопросу.

К гироскопу с жидким наполнением можно применить теорему о кинетическом моменте (1.75), учитывая при этом, что в данном случае кинетический момент системы выражается соотношением

$$H_i = H_i^K + H_i^F = \Theta_{ij}^K \omega_j + \rho \varepsilon_{ijk} \int\limits_V r_j v_k \, dV, \tag{6.12}$$

где интеграл взят по всему объему V, занятому жидкостью. Если жидкость идеальна (отсутствует внутреннее трение), несжимаема и целиком заполняет полость, то ее кинетический момент можно представить в виде

$$H_i^F = \Theta_{ij}^M \omega_j + H_i^*. \tag{6.13}$$

Здесь H_i^* — кинетический момент жидкости в ее движении относительно оболочки, а величина Θ_{ij}^M представляет собой тензор инерции жидкости, как бы застывшей в полости тела. Тензор Θ_{ij}^M относится не к точке опоры F, а к центру тяжести жидкости — точке M (см. рис. 6.6).

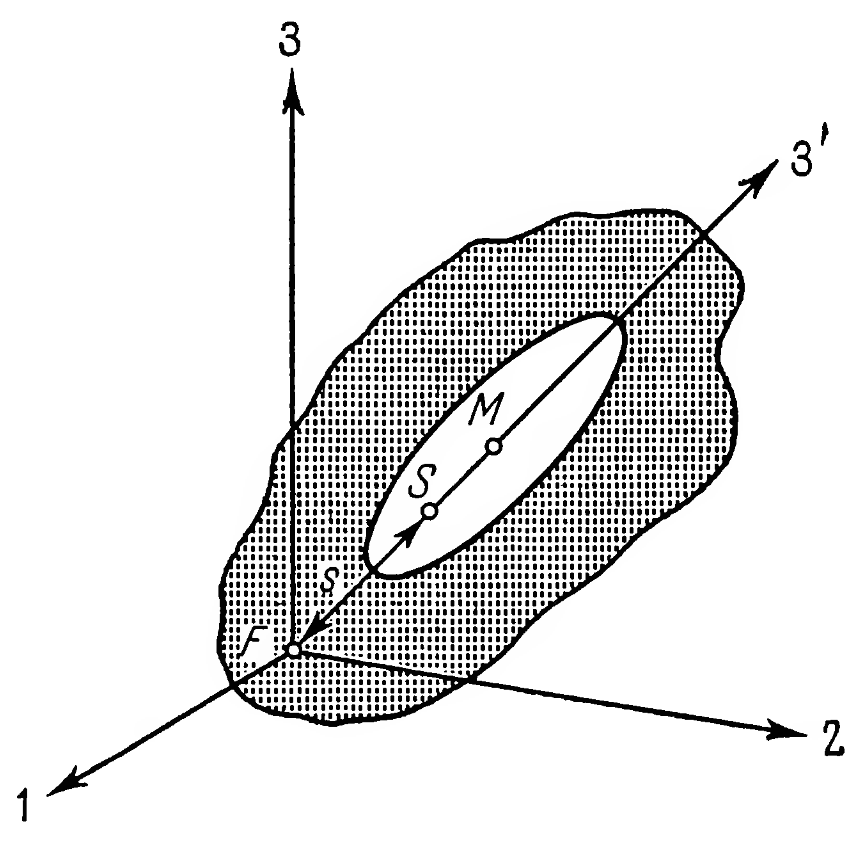


Рис. 6.6. Тяжелый гироскоп с симметричной полостью, заполненной жидкостью.

Тензоры инерции можно просуммировать:

$$\Theta_{ij}^K + \Theta_{ij}^M = \Theta_{ij}.$$

В случае совпадения главных осей инерции тела и полости для эффективных значений главных моментов инерции имеем следующие выражения:

$$A = A^K + A^M, \quad B = B^K + B^M, \quad C = C^K + C^M. \tag{6.14}$$

Уравнения движения целесообразно отнести к главным осям инерции:

$$\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 + \dot{H}_1^* - H_2^*\omega_3 + H_3^*\omega_2 = M_1,\\
&B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 + \dot{H}_2^* - H_3^*\omega_1 + H_1^*\omega_3 = M_2,\\
&C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 + \dot{H}_3^* - H_1^*\omega_2 + H_2^*\omega_1 = M_3.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Для определения составляющих кинетического момента H_1^*, H_2^* и H_3^* необходимо использовать уравнения течения жидкости. Жуковский показал, что эти составляющие сохраняют постоянные значения, если течение жидкости в полости потенциальное с постоянной циркуляцией. В частном случае, когда $H_i^* \equiv 0$, уравнения движения (6.15) переходят в известную форму уравнений Эйлера, и наличие жидкости здесь проявляется лишь в изменении моментов инерции согласно формулам (6.14). При $H_i^* \neq 0$ появляются дополнительные гироскопические моменты вращающейся жидкости, соответствующие дополнительным членам в уравнениях (6.15).

Рассмотрим тяжелый симметричный гироскоп с симметричной полостью, у которого центр тяжести S лежит на оси симметрии $3'$ на расстоянии s от точки опоры (рис. 6.6). В этом случае

$$A = B, \quad M_1 = Gsa_{32}, \quad M_2 = -Gsa_{31}.$$

Если предположить, что течение жидкости в полости является потенциальным, то из (6.15) получим несколько усложненную по сравнению с (3.35) систему уравнений

$$\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_2\omega_3 - H_2^*\omega_3 + H_3^*\omega_2 = Gsa_{32},\\
&A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 - H_3^*\omega_1 + H_1^*\omega_3 = -Gsa_{31},\\
&C\dot{\omega}_3 \qquad\qquad\qquad - H_1^*\omega_2 + H_2^*\omega_1 = 0.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Эта система имеет частное решение

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30} = \text{const},\\
&a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1,\\
&H_1^* = H_2^* = 0, \quad H_3^* = H_{30}^* = \text{const},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

соответствующее перманентному вращению вокруг оси симметрии, направленной по вертикали. Устойчивость такого движения может быть исследована известным способом — путем анализа уравнений в малых отклонениях. В выкладках полностью сохраняется аналогия с тяжелым симметричным гироскопом в случае Лагранжа (п. 3.3.2). В качестве необходимого и достаточного условия устойчивости движения (6.17) эти выкладки дают неравенство

$$(C\omega_{30} + H_{30}^*)^2 \geqslant 4GsA. \tag{6.18}$$

В отличие от выведенного ранее условия (3.70) здесь моменты инерции A и C изменены в соответствии с формулами (6.14). Если

жидкость не участвует во вращении тела, то $H_{30}^{*} = -C^{M}\omega_{30}$ и неравенство принимает вид

$$(C^{K}\omega_{30})^2 \geqslant 4Gs\,(A^{K} + A^{M}). \qquad (6.19)$$

В этом случае наличие жидкости ухудшает устойчивость системы по сравнению с гироскопом, имеющим те же значения величин A^{K}, C^{K} и Gs, но не содержащим жидкости. Вращение жидкости в сторону вращения тела улучшает устойчивость. Потенциальное движение, в частности, возможно и при нулевом значении относительного кинетического момента $H_{30}^{*} = 0$ (потенциальный вихрь). В этом случае неравенство (6.18) принимает вид

$$(C\omega_{30})^2 \geqslant 4GsA. \qquad (6.20)$$

Иные результаты получаются, если течение жидкости носит более общий характер. Примером может служить случай чистого вращения, когда жидкость вращается целиком, подобно твердому телу. В этом случае составляющие кинетического момента могут быть представлены в виде произведений моментов инерции на угловые скорости:

$$H_1^{*} = A^{*}\Omega_1, \quad H_2^{*} = B^{*}\Omega_2, \quad H_3^{*} = C^{*}\Omega_3, \qquad (6.21)$$

однако величины Ω_i должны быть найдены из уравнений Гельмгольца для вихревого течения. Поскольку речь идет о дополнительных дифференциальных уравнениях первого порядка, то общий порядок системы уравнений, описывающих движение, повышается. Приведем некоторые результаты.

Если оболочка гироскопа, имеющая форму эллипсоида вращения с полуосями a и c, достаточно тонка, так что можно пренебречь ее собственными моментами инерции, полностью заполнена идеальной несжимаемой жидкостью и подвешена, например в кардановом подвесе, так, что центр эллипсоида совпадает с неподвижной точкой (свободный гироскоп), то достаточные условия устойчивости перманентного вращения системы как одного твердого тела вокруг вертикальной оси симметрии можно получить в виде

$$a > c \quad \text{или} \quad 3a < c. \qquad (6.22)$$

Это означает, что полость должна быть либо сплюснутой, либо достаточно вытянутой, что совпадает с результатами опытов, проведенных Кельвином и другими исследователями. В этом состоит и объяснение известного факта, что сырое яйцо, даже сильно раскрученное, не может вращаться на носике вокруг своей оси подобно волчку. С вареным яйцом это удается без всякого труда. Такое положение оно принимает под действием сил трения, даже если первоначально его раскрутили вокруг поперечной оси (см. гл. 7).

Для случая перманентного вращения вокруг вертикальной оси тяжелого гироскопа с симметричной полостью при вихревом дви-

жении жидкости, вращающейся вместе с телом, Румянцевым получено достаточное условие устойчивости в виде

$$(C - A)\,\omega_{30}^2 \geqslant Gs. \tag{6.23}$$

Поскольку $C - A = C^K + C^M - A^K - A^M$, для тела с вытянутым эллипсоидом инерции ($C^K < A^K$) условие устойчивости (6.23) все же может быть выполнено при высокой скорости вращения, если полость с жидкостью достаточно сплюснута ($A^M < C^M$).

Условие (6.23) остается в силе, если жидкость, заполняющая полость, имеет конечную вязкость. В рассматриваемом случае, когда жидкость вращается вместе с телом как одно целое, вязкость жидкости не оказывает влияния на движение.

Следует отметить, что условие (6.23) не является необходимым. Оно всегда сильнее условия (6.20). Чтобы это показать, применим оба условия к твердому телу. Полагая $A = A^K$, $C = C^K$ и обозначая $x = C^K/A^K$, получаем из (6.20)

$$^1/_4\,(x\omega_{30})^2 \geqslant \frac{Gs}{A^K}, \tag{6.24}$$

а из (6.23)

$$(x - 1)\,\omega_{30}^2 \geqslant \frac{Gs}{A^K}. \tag{6.25}$$

Поскольку $(x/2 - 1)^2 \geqslant 0$, то $x^2/4 \geqslant x - 1$; следовательно, условие (6.25) более жесткое, чем (6.24). Для твердого тела (6.25) является излишне жестким, так как еще раньше (см. (3.70)) условие (6.24) было получено как необходимое и достаточное. В другом предельном случае, когда тело состоит из жидкости, заключенной в тонкую оболочку, массой которой можно пренебречь, условие (6.23) принимает вид

$$(C^M - A^M)\,\omega_{30}^2 \geqslant Gs, \tag{6.26}$$

что согласуется с опытами Кельвина, так как для гироскопа с вытянутым эллипсоидом инерции ($A^M > C^M$) при верхнем расположении центра тяжести ($s > 0$) условие (6.26) не может быть выполнено. Физическое объяснение установленного факта можно усмотреть в том, что в случае сплюснутой оболочки распределенные силы давления жидкости создают стабилизирующий момент, а в случае вытянутой оболочки — опрокидывающий.

Схематично это изображено на рис. 6.7. При наклоне оболочки в первый момент жидкость продолжает вращаться вокруг прежней оси, отмеченной на рисунке штрих-пунктирной линией. Результирующие составляющие центробежных сил жидкости накладывают на оболочку момент, знак которого зависит от ее формы. Момент пропорционален ω^2, так что жидкий гироскоп вытянутой формы не может быть стабилизирован за счет увеличения числа оборотов. При нижнем расположении центра тяжести ($s < 0$)

вытянутый гироскоп сохраняет устойчивость, пока его угловая скорость не превышает некоторого критического значения.

По-иному выглядят результаты в случае гироскопа с полостями, заполненными жидкостью лишь частично (примером может служить ракета с жидким горючим в топливных баках): здесь необходимо учитывать колебания свободной поверхности жидкости. При некоторых упрощающих предположениях Стюартсон [51] смог показать, что опасность потери устойчивости имеется всегда, когда собственная частота какой-либо формы свободных колебаний жидкости близка к частоте нутации несущего жидкость тела. Бесконечному числу форм свободных колебаний жидкости соответствует

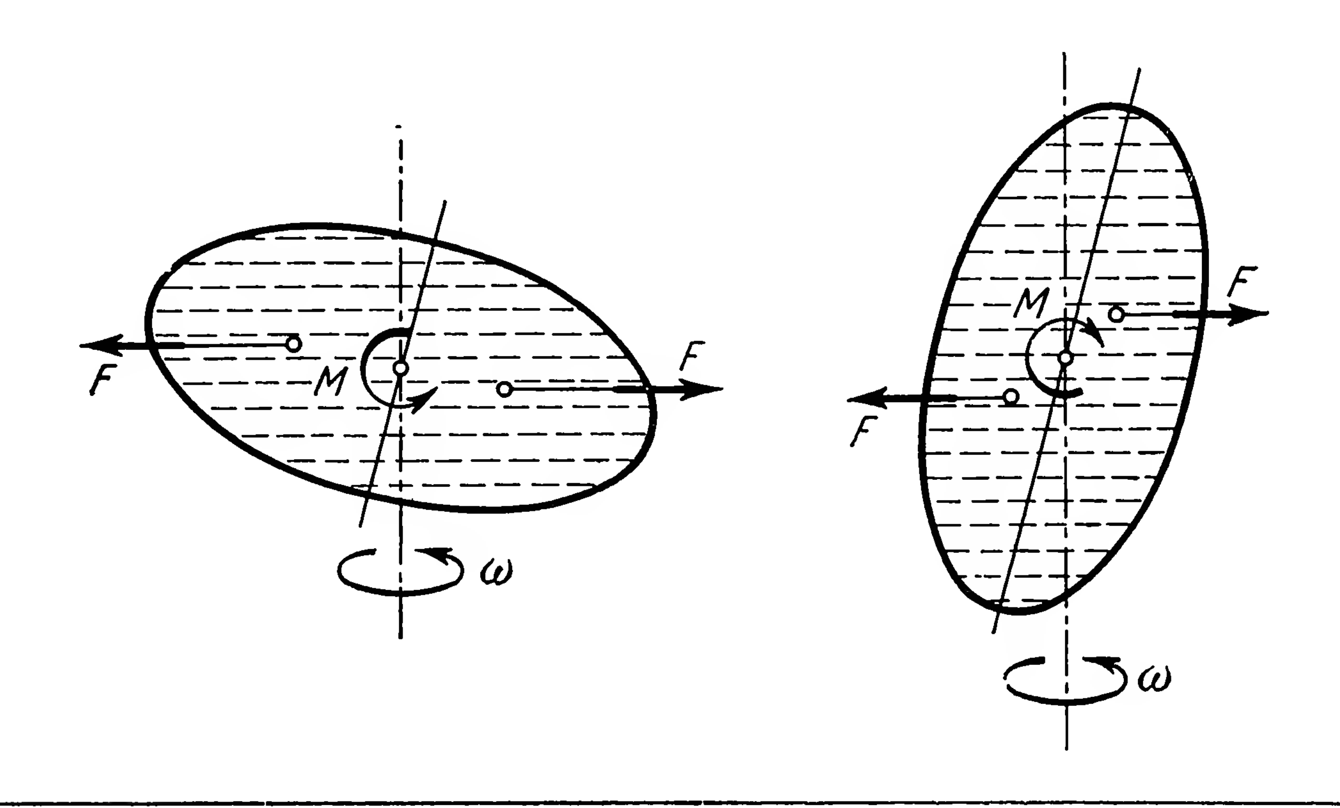


Рис. 6.7. Качественное объяснение гироскопического поведения заполненных жидкостью оболочек, имеющих форму эллипсоидов вращения.

бесконечное число областей неустойчивости, однако, как показывает опыт, лишь несколько первых областей могут иметь практическое значение. Можно полагать, что внутреннее трение, демпфирующее собственные колебания жидкости, сводит на нет области неустойчивости более высокого порядка. Частоты собственных колебаний, а следовательно, и области неустойчивости зависят от степени заполнения полости.

Демпфирующее влияние колебаний поверхности жидкости может быть использовано для гашения нутационных колебаний. Например, для демпфирования колебаний искусственных спутников используются круговые трубки, частично или целиком заполненные жидкостью (см., например, Каррьер и Майлс [52]).

Наконец, следует остановиться еще на одном специфическом типе жидкостного гироскопа, один из вариантов которого изображен на рис. 6.8 (см. Уинг в [15]). Твердое тело K закреплено так, что может вращаться относительно основания только вокруг оси $A-A$. Внутри тела имеется симметричная относительно $A-A$

полость H, целиком заполненная жидкостью. В двух симметрично расположенных точках в стенках полости имеются отверстия, соединенные трубочками с дифференциальным манометром M. При установившемся вращении тела и жидкости вокруг оси $A — A$ разность давлений, измеряемая манометром, равна нулю. При небольшом изменении направления оси $A — A$ жидкость стремится сохранить прежнюю ось вращения, в результате чего ось вращения жидкости отклоняется от оси $A — A$ на некоторый угол δ. Если

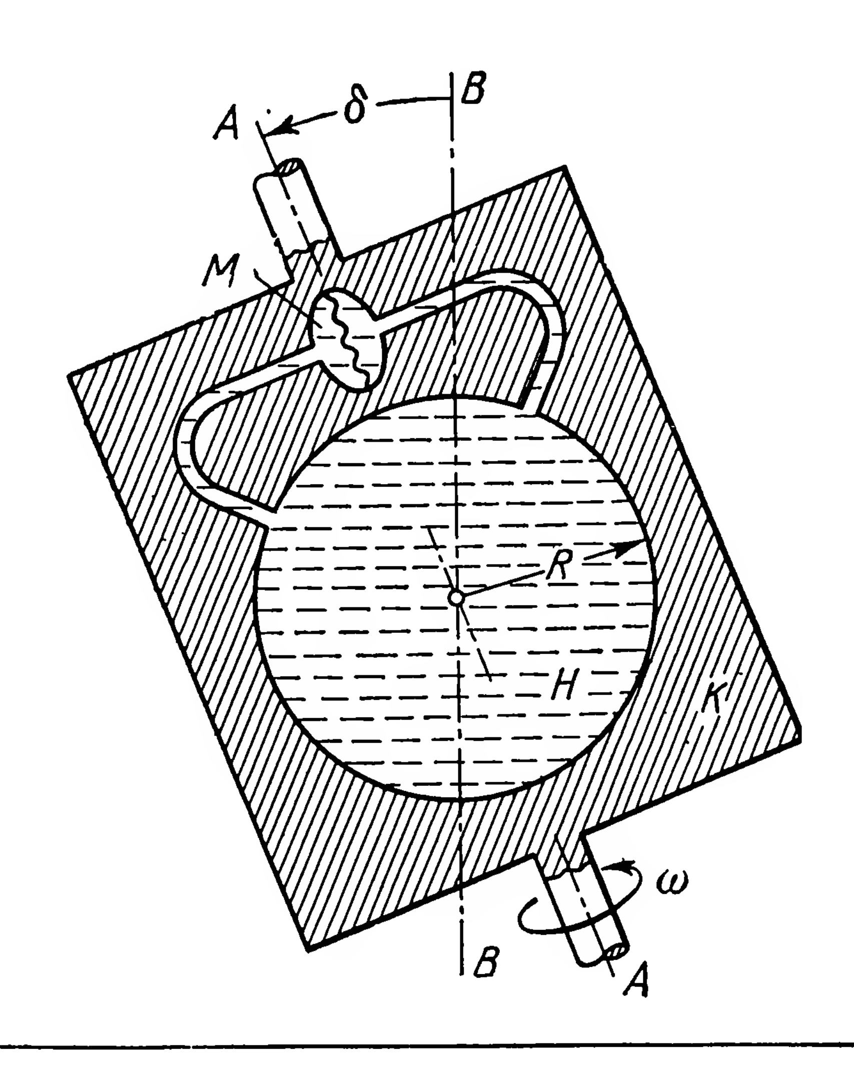


Рис. 6.8. Жидкостный гироскоп Уинга.

измерительные отверстия расположены под углом 45° к оси $A — A$, то при $\delta \ll 1$ разность измеряемых давлений составит величину

$$\Delta p \approx \rho R^2 \omega^2 \delta. \tag{6.27}$$

Если бы трение полностью отсутствовало, то ось вращения жидкости $B — B$ оставалась бы неподвижной в пространстве. В реальных условиях за счет действия сил трения ось $B — B$ постепенно приближается к оси $A — A$. Сближение осей имеет вид асимптотического экспоненциального процесса с постоянной времени

$$T_Z = kR / \sqrt{\omega \nu}, \tag{6.28}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости, а $k \approx 0{,}28$ — коэффициент, который можно считать постоянным. Такой гироскоп предлагалось использовать в навигационных системах (гл. 16). За счет выбора конструктивных параметров значение постоянной времени T_Z должно быть подобрано в зависимости от конкретного способа использования гироскопа в схеме.

6.3. Гироскопы с переменной массой

Моменты инерции ракет, космических кораблей и искусственных спутников в общем случае не остаются постоянными, а изменяются с течением времени. Изменение может происходить по двум причинам: либо внутри тела-носителя имеются какие-то перемещающиеся массы, либо какие-то массы отделяются (или присоединяются). В первом случае общая масса системы остается постоянной, во втором она меняется, так как отделившаяся масса не принадлежит системе после отделения, а присоединившаяся не принадлежала системе до соединения с телом.

Примером системы с переменной массой, не относящимся, правда, к технике, может служить градина. При падении в области переохлажденного тумана она увеличивается. Капля дождя в определенных условиях уменьшается за счет испарения.

6.3.1. Общие уравнения движения. Рассмотрим вращательное движение тела-носителя K (рис. 6.9). В нем происходит как изменение

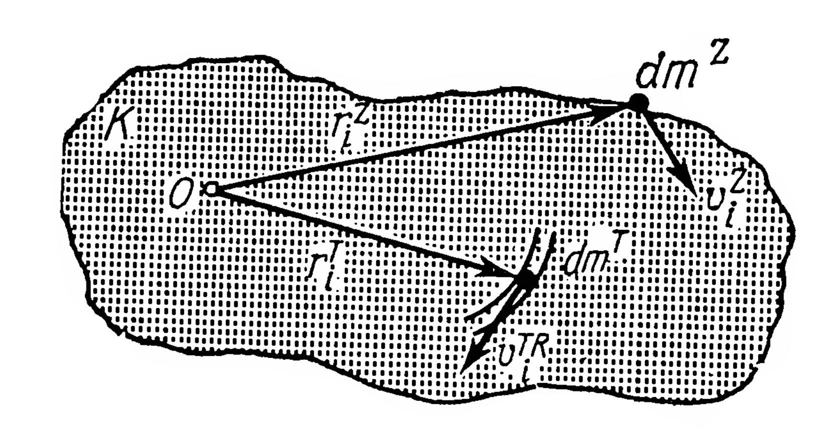


Рис. 6.9. К выводу уравнений движения тела K с перемещающейся массой dm^T и присоединяющейся массой dm^Z.

распределения масс за счет перемещения внутри тела некоторых частиц с массой dm^T, так и изменение полной массы вследствие присоединения (или отделения) дополнительной массы dm^Z. Пусть мгновенное положение этих масс задано соответственно векторами r_i^T и r_i^Z, исходящими из неподвижной точки O. Относительная скорость массы dm^T внутри тела K равна v_i^{TR}. Абсолютная скорость массы dm^Z непосредственно перед столкновением равна v_i^Z, а сразу после столкновения становится равной v_i^{Z*}. Процесс поглощения массы можно рассматривать как абсолютно неупругий удар, при котором скорость частицы dm^Z после удара равна скорости той точки тела K, в которую она ударилась.

Для составления уравнений движения представим полный кинетический момент H_i в виде суммы двух слагаемых H_i^T и H_i^Z, первое из которых создается движением частиц dm^T, уже принадлежащих телу, а второе соответствует частицам dm^Z, только что

присоединяющимся:

$$H_i = \varepsilon_{ijk} \int r_j v_k \, dm = H_i^T + H_i^Z =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \int_T r_j^T v_k^T \, dm^T + \varepsilon_{ijk} \int_Z r_j^Z v_k^Z \, dm^Z. \qquad (6.29)$$

Скорость v_k^T может быть выражена в виде суммы относительной скорости v_k^{TR} и переносной скорости v_k^{TF}, обусловленной вращением тела вокруг точки O:

$$v_k^T = v_k^{TR} + v_k^{TF} = v_k^{TR} + \varepsilon_{klm} \omega_l r_m^T. \qquad (6.30)$$

Для записи закона изменения кинетического момента необходимо продифференцировать выражение (6.29), учитывая (6.30) и равенство

$$\frac{dr_m^T}{dt} = \frac{d' r_m^T}{dt} + \varepsilon_{mno} \omega_n r_o^T = v_m^{TR} + \varepsilon_{mno} \omega_n r_o^T,$$

и мы получим

$$\frac{dH_i^T}{dt} = \varepsilon_{ijk} \int_T r_j^T \left(\varepsilon_{klm} \dot{\omega}_l r_m^T + \varepsilon_{klm} \omega_l \varepsilon_{mno} \omega_n r_o^T \right) dm^T +$$

$$+ \varepsilon_{ijk} \int_T r_j^T \left(2 \varepsilon_{klm} \omega_l v_m^{TR} + a_k^{TR} \right) dm^T, \qquad (6.31)$$

где

$$a_k^{TR} = d' v_k^{TR} / dt$$

— относительное ускорение перемещающейся массы. Первый интеграл в выражении (6.31) содержит лишь слагаемые, которые сохранились бы и в случае обычного твердого тела. Эта часть соответствует как бы замороженному телу K и сокращенно может быть записана как dH_i^K / dt. Второй интеграл отличен от нуля только при наличии масс, перемещающихся внутри тела K. Он учитывает наличие относительных и кориолисовых ускорений перемещающихся масс.

При дифференцировании H_i^Z в выражении (6.29) необходимо учесть, что присоединяющаяся частица dm^Z в момент соударения с телом K испытывает скачкообразное изменение скорости на величину $v_i^Z - v_i^{Z*} = v_i^{ZR}$, причем величина v_i^{ZR} есть скорость частицы относительно той точки тела, в которой произошло соударение. Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{dH_i^Z}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\varepsilon_{ijk} \int_Z r_j^Z v_k^Z \, dm^Z \right] = \varepsilon_{ijk} \int_Z r_j^Z \, dv_k^Z \frac{dm^Z}{dt} =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \int_Z r_j^Z \left(v_k^{Z*} - v_k^Z \right) d\dot{m}^Z = - \varepsilon_{ijk} \int_Z r_j^Z v_k^{ZR} \, d\dot{m}^Z. \qquad (6.32)$$

Это выражение определяет изменение кинетического момента системы за счет присоединения дополнительных масс. Величина $d\dot{m}^Z$ характеризует количество массы, присоединяющейся (или отделяющейся) в единицу времени. Относительная скорость присоединившейся массы после соударения полагается равной нулю. Это допустимо, так как после соударения эта масса уже принадлежит телу, и если она продолжает относительно него двигаться, то должна рассматриваться как внутренняя перемещающаяся масса dm^T.

С учетом выражений (6.31) и (6.32) из соотношения (6.29) можем получить теорему о кинетическом моменте

$$\frac{dH_i^K}{dt} = M_i + M_i^R + M_i^B + M_i^C, \tag{6.33}$$

где результирующий момент всех внешних сил обозначен M_i, реактивный момент всех присоединяющихся (или отделяющихся) масс

$$M_i^R = \varepsilon_{ijk} \int\limits_Z r_j^Z v_k^{ZR}\, d\dot{m}^Z, \tag{6.34}$$

момент сил инерции, возникающих вследствие относительного ускорения перемещающихся внутри тела частиц,

$$M_i^B = -\varepsilon_{ijk} \int\limits_T r_j^T a_k^{TR}\, dm^T \tag{6.35}$$

и момент кориолисовых сил инерции тех же частиц

$$M_i^C = -2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \int\limits_T r_j^T \omega_l v_m^{TR}\, dm^T. \tag{6.36}$$

Во многих случаях бывает целесообразно уравнения движения (6.33) отнести к системе координат, жестко связанной с телом K:

$$\frac{d'H_i^K}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k^K = M_i + M_i^R + M_i^B + M_i^C. \tag{6.37}$$

При покоординатной записи этого уравнения необходимо учитывать, что главные оси инерции системы могут поворачиваться относительно самого тела K. Поэтому в общем случае дело не сводится к простой форме уравнений Эйлера. Даже когда главные оси неподвижны относительно K, решение уравнения (6.37) представляет гораздо большие трудности, чем в случае обычного твердого тела, так как теперь вследствие изменения и перемещения масс моменты инерции становятся функциями времени. Здесь мы рассмотрим лишь отдельные случаи, допускающие простые решения (см. также Аминов [53]).

6.3.2. Простые примеры. Положим сначала, что сумма всех моментов, стоящих в правой части (6.37), равна нулю. Если, кроме того, главные оси инерции неподвижны относительно тела K, то в проекциях на эти оси система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} A(t)\,\dot{\omega}_1 - [B(t) - C(t)]\,\omega_2\omega_3 &= 0, \\ B(t)\,\dot{\omega}_2 - [C(t) - A(t)]\,\omega_3\omega_1 &= 0, \\ C(t)\,\dot{\omega}_3 - [A(t) - B(t)]\,\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Решение такой системы не вызывает затруднений в следующих трех случаях:

a) Гироскоп имеет шаровой эллипсоид инерции: $A(t) = B(t) = C(t)$. Отсюда немедленно следует постоянство всех составляющих вектора угловой скорости

$$\omega_1 = \omega_{10}, \quad \omega_2 = \omega_{20}, \quad \omega_3 = \omega_{30}.$$

b) Все моменты инерции меняются одинаково:

$$A = A_0 f(t), \quad B = B_0 f(t), \quad C = C_0 f(t).$$

Так как уравнения (6.38) линейны относительно моментов инерции, то функция времени $f(t)$ сокращается и задача сводится к случаю свободного твердого тела, рассмотренному в гл. 2.

c) Гироскоп симметричен: $A(t) = B(t)$. Из (6.38/3) следует постоянство составляющей $\omega_3 = \omega_{30}$. Первые два уравнения приводятся к форме

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 - \nu(t)\,\omega_2 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 + \nu(t)\,\omega_1 &= 0, \end{aligned} \tag{6.39}$$

где

$$\nu(t) = \omega_{30}\left[1 - \frac{C(t)}{A(t)}\right].$$

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sin\left[\int \nu(t)\,dt + \varphi_0\right], \\ \omega_2 &= \omega_0 \cos\left[\int \nu(t)\,dt + \varphi_0\right] \end{aligned} \tag{6.40}$$

и содержит две постоянные интегрирования ω_0 и φ_0. Полученному решению легко дать геометрическую интерпретацию: вектор ω_i обегает поверхность прямого кругового конуса с постоянной высотой ω_{30} и постоянным радиусом основания ω_0. По этому конусу вектор ω_i движется с переменной угловой скоростью $\nu(t)$. Если отношение $C(t)/A(t)$ постоянно, то постоянна и величина $\nu(t) = \nu_0$, так что решение соответствует движению обычного симметричного гироскопа.

6.3.3. Демпфирующее действие реактивной струи ракеты. В качестве примера, соответствующего уравнению (6.37) при отличных от нуля правых частях, рассмотрим весьма важное для ракетной техники явление, обнаруживающее демпфирующее действие реактивной струи. Пусть имеется тело ракеты K, двигатель которой выбрасывает из сопла струю продуктов горения в направлении оси симметрии 3 (рис. 6.10). Чтобы воспользоваться уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки, будем считать, что ракета

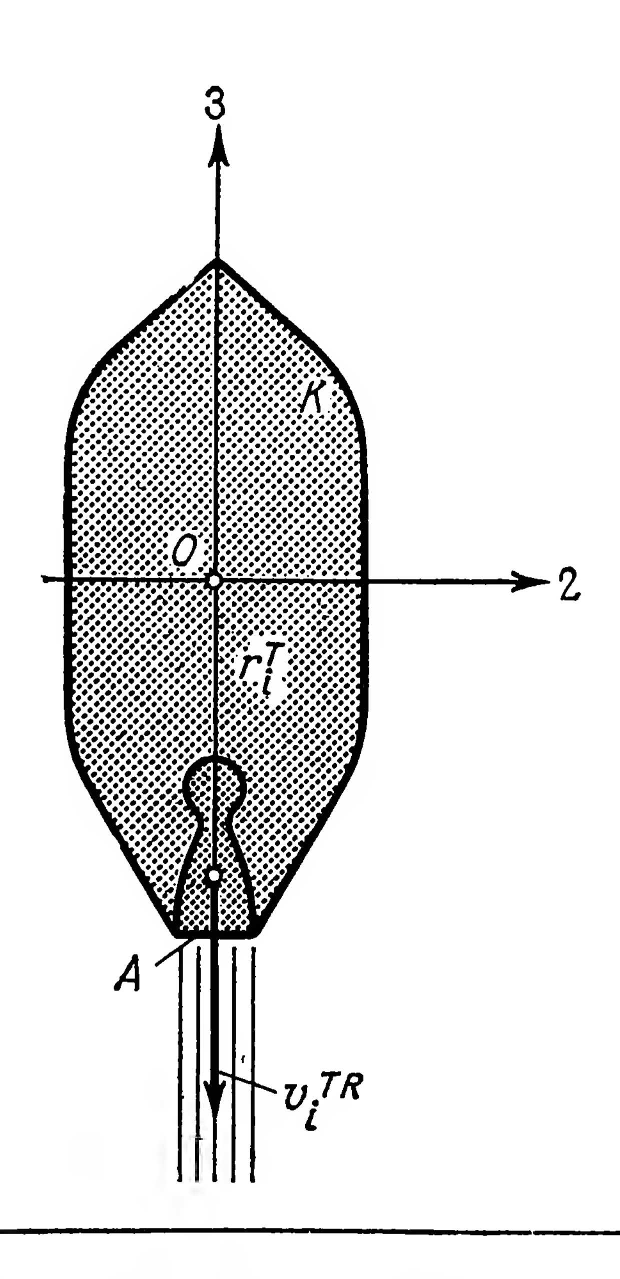


Рис. 6.10. К определению демпфирующего действия реактивной струи ракеты.

установлена на специальном испытательном стенде, так что ее центр тяжести O может рассматриваться как неподвижная точка. (Смысл результатов не изменится, если ракета находится в свободном полете.) Предположим также, что внешние моменты отсутствуют.

Границу тела K выберем так, чтобы корпус ракеты со всем содержимым и все массы, находящиеся в камере сгорания до сечения A, считались бы внутренними массами, а струя за сечением A — отброшенной массой. Для нашего случая, согласно (6.34), момент $M_i^R = 0$, так как r_j^Z параллелен v_k^{ZR}. В силу (6.35) $M_i^B = 0$, так как r_j^T параллелен a_k^{TR}, поскольку в камере сгорания частички разгоняются в направлении оси 3. Отличен от нуля

только момент M_i^C; это следует из (6.36), если учесть, что

$$r_j^T = (0,\ 0,\ -r^T),$$
$$\omega_l = (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3),$$
$$v_m^{TR} = (0,\ 0,\ -v^{TR}).$$

Используя конструктивную постоянную

$$S = \int_T r^T v^{TR}\, dm^T,$$

получаем

$$M_i^C = (-2S\omega_1,\ -2S\omega_2,\ 0). \tag{6.41}$$

Уравнения движения ракеты в проекциях на ее главные оси, согласно (6.37), теперь можно записать так:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_2\omega_3 &= -2S\omega_1, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_3\omega_1 &= -2S\omega_2, \\ C\dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Из последнего уравнения следует, что $\omega_3 = \omega_{30}$. Первые два уравнения преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \mu(t)\,\omega_1 - \nu(t)\,\omega_2 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 + \mu(t)\,\omega_2 + \nu(t)\,\omega_1 &= 0, \end{aligned} \tag{6.43}$$

где

$$\nu(t) = \omega_{30}\left[1 - \frac{C(t)}{A(t)}\right] \quad \text{и} \quad \mu(t) = \frac{2S}{A(t)}.$$

Используя комплексную переменную $\omega^* = \omega_1 + i\omega_2$, получаем вместо системы (6.43) уравнение

$$\dot{\omega}^* + [\mu(t) + i\nu(t)]\,\omega^* = 0 \tag{6.44}$$

с общим решением

$$\omega^* = \omega_0^* \exp\left\{-\int [\mu(t) + i\nu(t)]\,dt + \varphi_0\right\}. \tag{6.45}$$

Поскольку μ и ν — действительные величины и $\mu > 0$, абсолютная величина переменной ω^* монотонно убывает и стремится к нулю:

$$|\omega^*| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = |\omega_0^*|\, e^{\varphi_0} \exp\left[-\int \mu(t)\,dt\right]. \tag{6.46}$$

Вектор угловой скорости ракеты ω_i асимптотически приближается к оси 3; он обегает незамкнутую коническую поверхность с по-

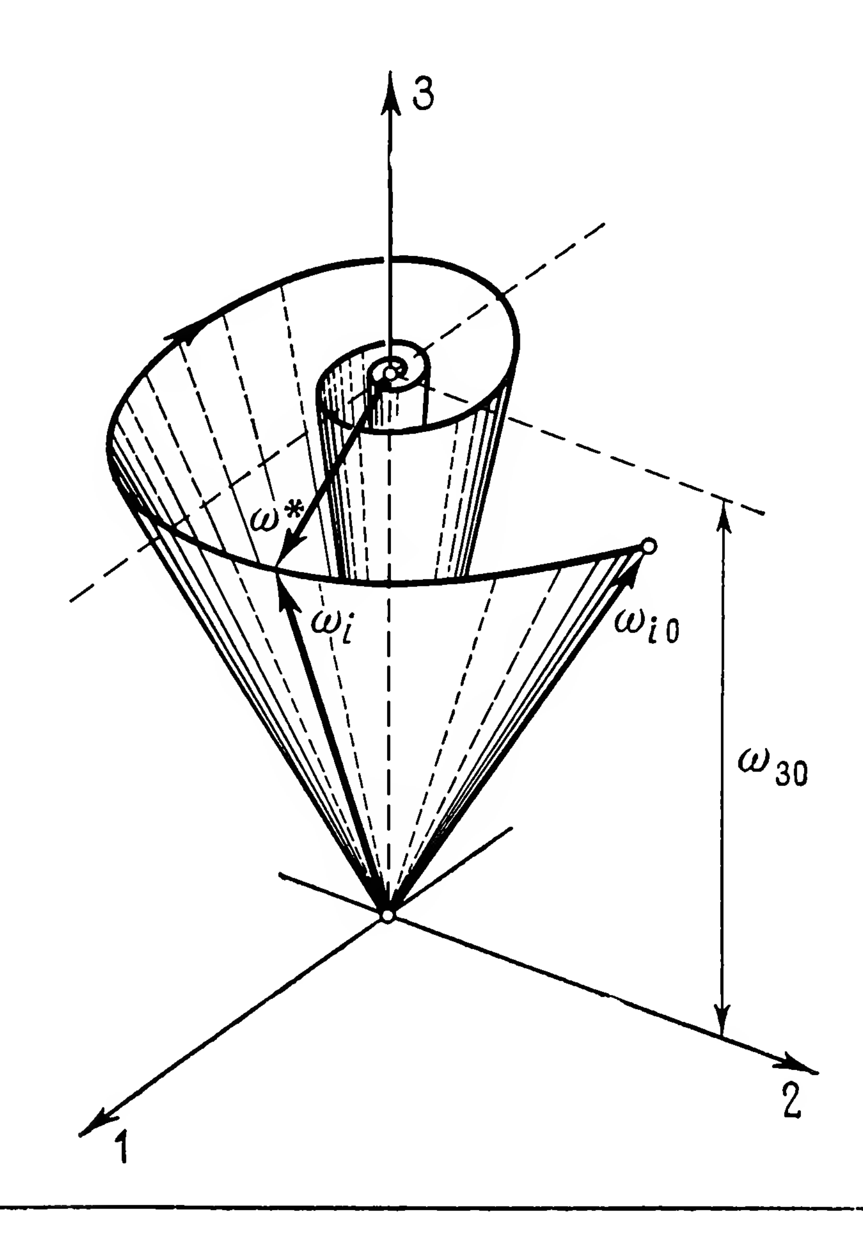


Рис. 6.11. Конус нутации ракеты при демпфировании реактивной струей.

стоянно уменьшающимся углом при вершине (рис. 6.11). Это означает, что нутационные колебания ракеты, вызванные начальными возмущениями, постепенно затухают; таким образом, ракета демпфируется реактивной струей двигателя.

Глава 7

Вращение тел, не имеющих неподвижной точки

При рассмотрении движения твердых тел вокруг неподвижной точки можно было принимать эту точку за начало координат. Простейшая форма (1.75) теоремы о кинетическом моменте

$$\frac{dH_i}{dt} = M_i \tag{7.1}$$

полностью определяла закон движения тела. В случае тела, не имеющего неподвижной точки, эта же форма теоремы о кинетическом моменте может быть использована для описания вращательного движения тела вокруг центра масс. Однако такое тело может иметь, помимо вращательного, и поступательное движение, поэтому для полного определения движения нужно использовать еще и теорему об изменении количества движения — *закон импульса*

$$\frac{dI_i}{dt} = F_i. \tag{7.2}$$

Импульс твердого тела с массой m выражается формулой

$$I_i = \int v_i \, dm = m v_i^S, \tag{7.3}$$

где v_i^S — скорость центра масс S. В силу (7.3) теорема (7.2) для системы с постоянной массой может быть записана в форме *закона движения центра масс*

$$m \dot{v}_i^S = F_i. \tag{7.4}$$

Согласно этому закону, центр масс системы движется как материальная точка массы m под действием всех внешних сил F_i, приложенных к телу.

Закон кинетического момента (7.1) и закон импульса (7.2) или (7.4) в общем случае взаимосвязаны, так что они не могут применяться независимо один от другого. Действительно, силы F_i в большинстве случаев зависят от углов поворота тела или от угловых скоростей, определяемых законом кинетического момента, и, наоборот, момент M_i может зависеть от положения центра масс тела, его скорости или ускорения, которые определяются из закона

импульса. Лишь в частных случаях эти законы могут оказаться не взаимосвязанными.

Важным примером такого случая может служить падение тела в однородном поле тяжести. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то вес остается единственной внешней силой. Сила веса приложена в центре тяжести S и не создает относительно него никаких моментов. Это значит, что поступательное движение тела можно найти, используя лишь закон импульса, а для определения вращательного движения достаточно одного закона кинетического момента. Однако уже для центрального поля тяготения (это относится и к Земле) такая независимость, строго говоря, не имеет места. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 8.

Само собой разумеется, что для тела, не имеющего неподвижной точки, любую точку можно принять за полюс, вокруг которого оно вращается, но тогда закон кинетического момента придется использовать в его общей форме (1.76). Для упрощения же вычислений эту точку целесообразно совместить с центром масс.

В следующих параграфах рассматривается два типа движения тел, не имеющих неподвижной точки. Будут рассмотрены тела, свободно движущиеся в пространстве и обладающие, таким образом, шестью степенями свободы, и тела, которые, подобно игрушечному волчку, имеют постоянный контакт с горизонтальной опорной плоскостью.

7.1. Гироскопические эффекты при свободном полете тела

Любое брошенное, падающее или летящее тело испытывает действие сил земного притяжения. Если нет никаких других внешних сил, то траектория центра масс тела в центральном поле тяготения Земли имеет вид эллиптической дуги (эллипс Кеплера), которую часто с достаточной степенью точности можно заменить параболой. Характер вращательного движения тела и его влияние на траекторию центра масс существенно зависят от внешних сил и моментов, действующих на тело, помимо силы тяжести. Ниже рассматриваются некоторые явления, представляющие технический интерес. Движение спутников более подробно исследуется в гл. 8.

Находящийся в полете диск имеет, как правило, значительный кинетический момент, вектор которого перпендикулярен плоскости диска. При броске правой рукой вектор кинетического момента направлен вниз (рис. 7.1). Вследствие искривления траектории вектор скорости центра масс почти сразу же после броска не совпадает с плоскостью диска. В таком положении, кроме аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления, возникает опрокидывающий момент M_i; его направление показано на рисунке. Момент не приводит к опрокидыванию диска, но вызывает его прецессию, так что плоскость диска медленно поворачивается влево, если смотреть в направлении полета.

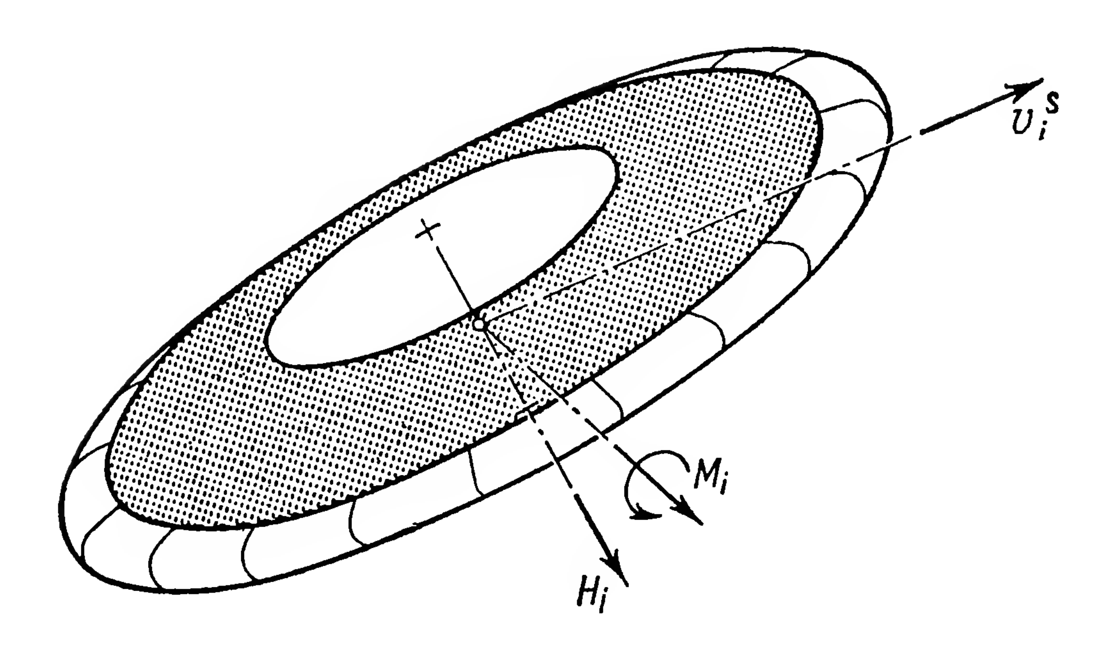


Рис. 7.1. Скорость v_i^S, кинетический момент H_i и момент аэродинамических сил M_i для летящего диска.

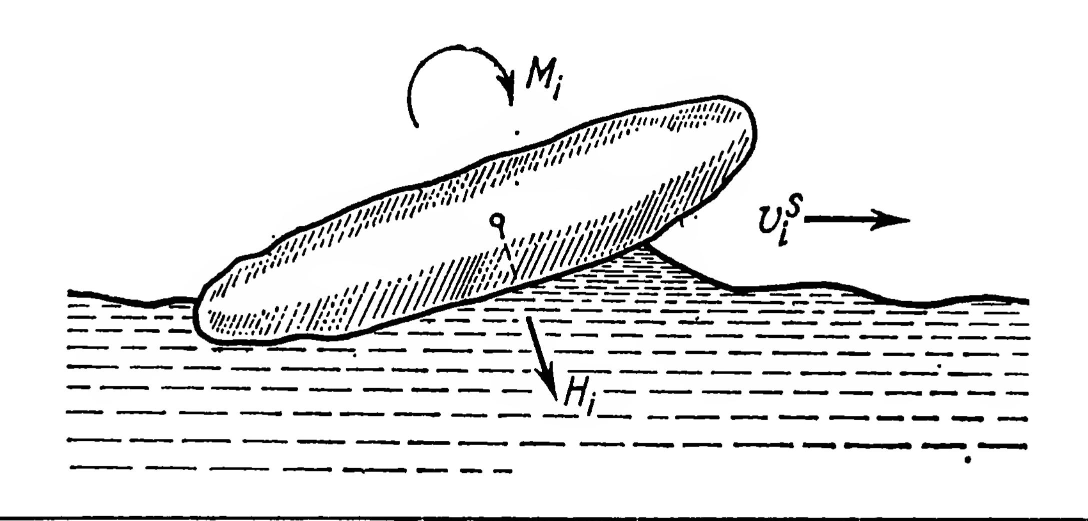


Рис. 7.2. К объяснению бокового отклонения вращающегося камешка, отскакивающего от поверхности воды.

Благодаря значительному кинетическому моменту — диск имеет достаточно массивный металлический обод — скорость прецессии весьма мала и за малое время полета не приводит к заметному повороту. Эту прецессию легко можно наблюдать, если вместо диска воспользоваться картонным кружком (скажем, подставкой из-под пивной кружки). При броске правой рукой кружок наклоняется влево, а при броске левой рукой — вправо.

Аналогичное явление, правда с обратным знаком, можно наблюдать на плоском камешке, брошенном над спокойной поверхностью воды, когда он, многократно касаясь воды и отскакивая от нее, пролетает значительное расстояние. Можно заметить, что при броске правой рукой траектория камешка в конце его полета всегда отклоняется вправо, а при броске левой рукой — влево. Объяснить это совсем не сложно. Во время полета в воздухе плоский камешек, как и свободно вращающийся гироскоп, сохраняет свою ориентацию (как и диск). При ударе о воду нижней стороной (рис. 7.2) камешек испытывает действие момента гидродинамических сил. Направление этого момента как раз противоположно

направлению момента, действующего на диск. Под действием момента камешек прецессирует и с каждым отскоком от воды все больше наклоняется направо. Наклон вызывает поперечную силу, приводящую к искривлению траектории.

7.1.1. Гироскопическая стабилизация снарядов. Очень подробно исследованы гироскопические явления при полете вращающихся снарядов, обладающих значительным кинетическим моментом. Известно, что снаряды с правосторонним вращением, если смотреть в направлении полета, отклоняются от плоскости стрельбы вправо, а снаряды с левосторонним вращением — влево.

Качественное объяснение этого явления достаточно просто, но количественный анализ представляет большие трудности (см., например, [54, 55]). Момент аэродинамических сил M_i стремится повернуть снаряд, изображенный на рис. 7.3, вокруг горизонтальной поперечной оси, однако, поскольку снаряд обладает кинетическим моментом H_i, возникает прецессия и ось снаряда отклоняется вправо.

На рис. 7.4 схематично изображено поведение оси снаряда (рисунок соответствует левостороннему вращению). Представим себе единичную сферу вокруг центра масс, поступательно перемещающуюся вместе с ним. Рассмотрим точки пересечения с этой сферой оси симметрии снаряда и касательной к его траектории. Вследствие искривления траектории точка пересечения касательной перемещается вниз (точки *1 — 5*). Если ось снаряда первоначально проходила через точку *0*, то ее прецессию можно изобразить дугой окружности с центром в точке *1*, считая точку *1* пока неподвижной. Через некоторое время касательная к траектории перейдет в точку *2*; теперь прецессия оси снаряда изобразится дугой окружности с центром в точке *2* и радиус окружности будет другим. Такими шагами можно получить некоторое приближение поведения оси снаряда.

Отсюда можно установить два существенных факта: во-первых, ось снаряда наклоняется вместе с касательной к траектории; во-вторых, она отклоняется влево. Отклонение оси снаряда приводит к появлению поперечной аэродинамической силы, вызывающей отклонение траектории. В действительности процесс происходит, конечно, непрерывно, но оба следствия, полученные на упрощенной схеме, остаются в силе.

Для правильного выбора кинетического момента снаряда существенны два обстоятельства. Во-первых, кинетический момент $H = C\omega_0$ должен быть достаточно велик, чтобы снаряд не потерял устойчивости под действием аэродинамических сил и не опрокинулся. Это требование выражается условием устойчивости, практически совпадающим с известным условием устойчивости (3.70), выведенным для тяжелого симметричного гироскопа (случай Лагранжа). Если аэродинамический момент пропорционален углу от-

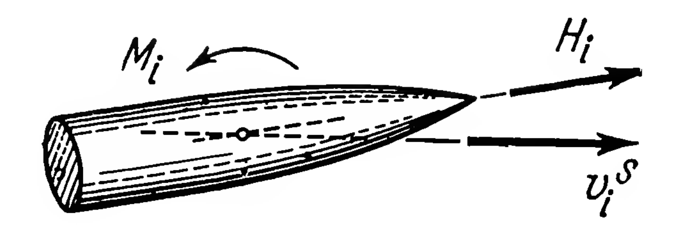


Рис. 7.3. Скорость v_i^S, кинетический момент H_i и момент аэродинамических сил M_i для летящего снаряда.

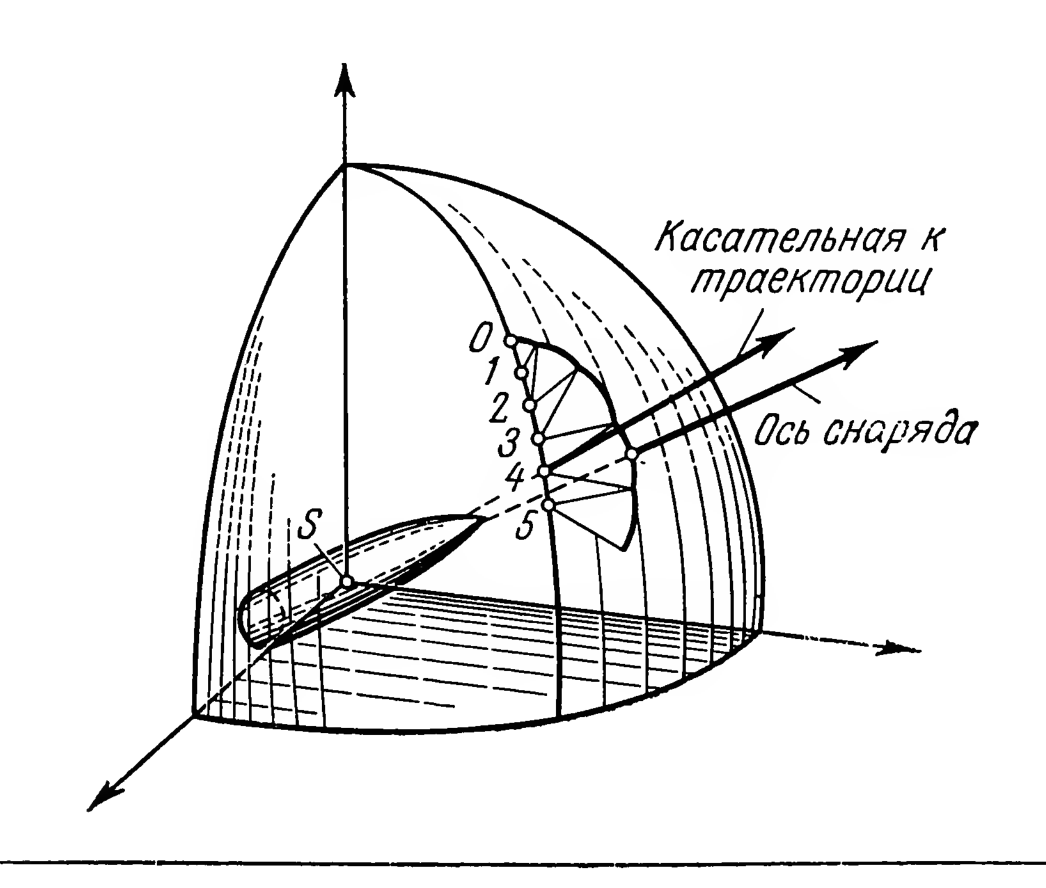


Рис. 7.4. Примерное поведение оси снаряда в полете.

клонения α $(M = k\alpha)$, то условие устойчивости снаряда имеет вид

$$H^2 = C^2\omega_0^2 > 4kA. \tag{7.5}$$

Во-вторых, надо стремиться к тому, чтобы ось снаряда не слишком сильно отклонялась от касательной к траектории. При очень большом кинетическом моменте направление оси снаряда вообще оставалось бы неизменным, так что угол отклонения все время возрастал бы. Ось снаряда должна иметь возможность следить за направлением касательной к траектории, как это изображено на рис. 7.4. Отношение скорости прецессии $\dot{\psi}$ к скорости поворота касательной $\dot{\delta}$ называют коэффициентом слежения ε. Для нормального полета снаряда требуется, чтобы выполнялось условие слежения

$$\varepsilon = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\delta}} = \frac{M}{H\dot{\delta}} = \frac{M}{C\omega_0\dot{\delta}} > 1. \tag{7.6}$$

Бывают случаи, когда условия (7.5) и (7.6) не могут быть выполнены одновременно. При малом кинетическом моменте не

выполняется условие (7.5), а при большом — (7.6). В этих случаях вместо стабилизации вращением применяют стабилизацию с помощью хвостового оперения.

7.1.2. Бумеранг. Особенно интересное взаимодействие сил гироскопических, аэродинамических и тяжести проявляется в полете бумеранга. Этот метательный снаряд имеет серповидную форму и при правильном броске пролетает по замкнутой траектории, возвращаясь к исходной точке. Закономерности полета бумеранга можно считать полностью выясненными благодаря тщательным исследованиям Гесса [56]. Ему удалось чисто теоретически получить форму траектории бумеранга, полностью соответствующую его действительному полету со всеми характерными особенностями.

На рис. 7.5 представлено два примера. На фото слева показан след бумеранга, полученный в темноте от установленной на нем электрической лампочки. Справа изображена траектория, вычисленная на электронной машине и выведенная на графопостроитель с учетом искажений перспективы. Временной интервал нанесенных точек составляет 0,1 с. На рис. 7.6 в трех проекциях изображена еще одна вычисленная траектория бумеранга.

Для выяснения закономерностей полета бумеранга необходимо учесть два обстоятельства: его особую форму и способ выполнения броска, от которого зависят начальные условия движения. Существенно, что оба плеча бумеранга обработаны так, что в поперечном сечении они имеют профиль несущего крыла. При броске плоскость бумеранга примерно вертикальна и выпуклая сторона несущего профиля обращена влево, если бросок выполняется правой рукой.

Во время броска, кроме начальной скорости v_i^S центра масс, бумеранг приобретает достаточно большую угловую скорость ω_i — около 10 об/с (рис. 7.7). Вследствие вращения скорость верхнего плеча P больше скорости нижнего плеча Q, поэтому верхнее плечо испытывает большую аэродинамическую силу, направленную влево, чем нижнее. Из-за разницы сил возникает результирующий момент. Осредненный за оборот момент дает не только составляющую M_i^S, направленную в сторону, обратную полету, но и перпендикулярную к ней компоненту M_i^K. Эта составляющая момента также создается аэродинамическими силами, но обусловлена в основном тем, что оси плеч бумеранга не проходят через центр масс S.

Поскольку бумеранг является в определенном смысле гироскопом, под действием моментов он прецессирует. Момент M_i^S вызывает поворот плоскости бумеранга влево вокруг вертикали; одновременно с этим действие момента M_i^K приводит к наклону плоскости бумеранга вправо. Оба поворота сказываются на форме

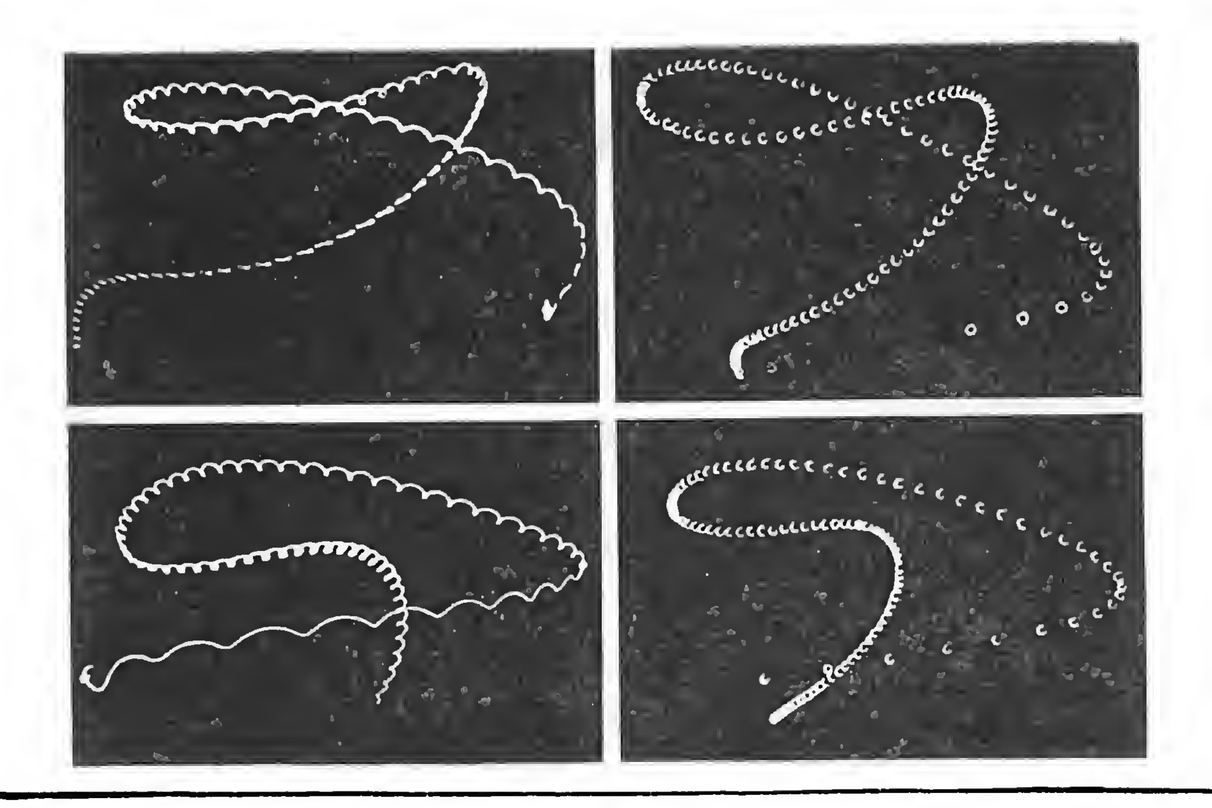


Рис. 7.5. Реальная (слева) и теоретически вычисленная (справа) траектории бумеранга.

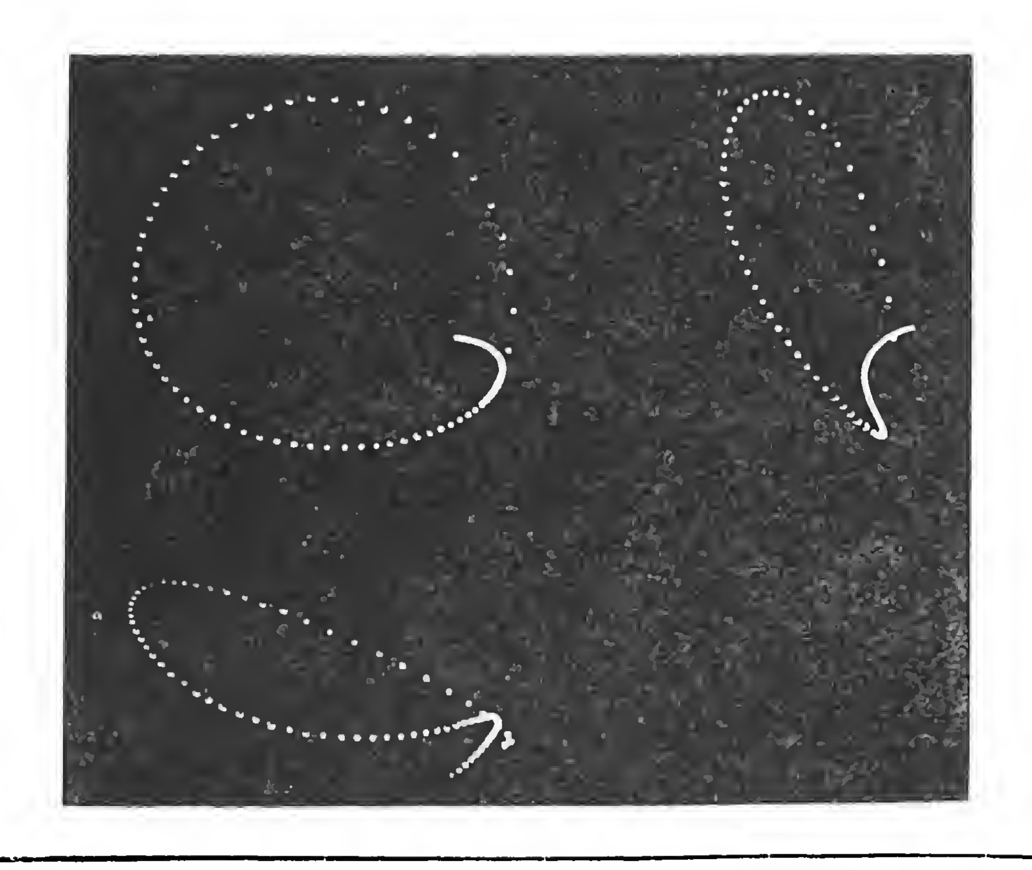


Рис. 7.6. Траектория бумеранга в трех проекциях.

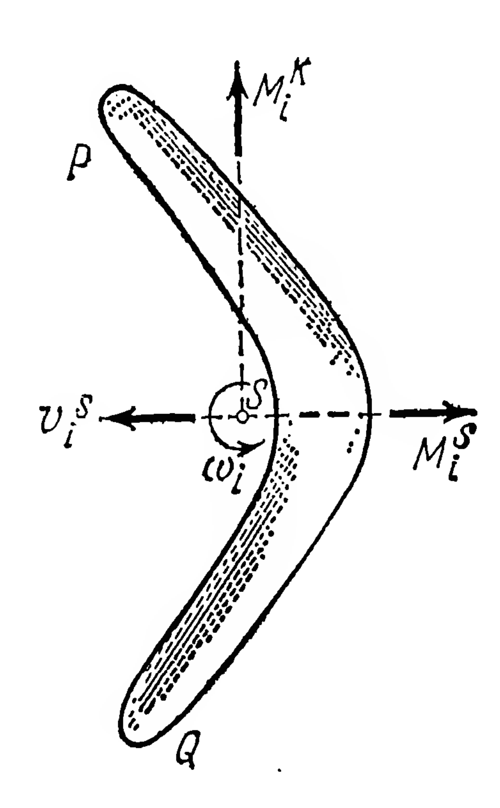


Рис. 7.7. Бумеранг. Скорость центра тяжести v_i^S, угловая скорость вращения ω_i, аэродинамические моменты M_i^S (поворачивающий плоскость бумеранга) и M_i^K (наклоняющий плоскость бумеранга).

траектории центра масс. Поворот вокруг вертикали приводит к появлению поперечной силы, добавляющейся к аэродинамическим силам, действующим на плечи бумеранга, и в результате бумеранг отклоняется влево. Наклон плоскости бумеранга вправо поворачивает аэродинамическую силу вверх, благодаря чему бумеранг несколько поднимается, так как возникающая подъемная сила противодействует силе тяжести. За счет дальнейшего поворота и наклона бумеранг пролетает по замкнутой траектории.

На последнем участке полета плоскость бумеранга почти горизонтальна и он планирует по пологой линии к месту старта, медленно теряя высоту. При большей начальной скорости бумеранг может и после планирования уйти на повторный подъем или даже описать еще одну дугу, пока не погасит свою энергию и медленно опустится, как приземляющийся вертолет.

И опыт, и теория показывают, что характерные геометрические параметры траектории бумеранга почти не зависят от величины начальной скорости. Это объясняется тем, что момент аэродинамических сил пропорционален произведению ωv, а поскольку $H = \Theta\omega$, скорость прецессии оказывается пропорциональной отношению v/Θ независимо от величины ω. С увеличением скорости v соответственно растет и скорость поворотов бумеранга, так что форма траектории в плане (вид сверху) остается практически неизменной. При увеличении начальной скорости заметно растет лишь наибольшая высота, достигаемая бумерангом в полете. Более детальное исследование влияния начальных условий и характерных параметров системы на форму траектории можно найти в упомянутой публикации Гесса [56].

7.2. Твердое тело на горизонтальной плоскости

Как в технике, так и в различных играх и спорте часто можно встретить такое движение твердого тела, при котором оно какой-либо своей точкой всегда опирается на некоторую плоскость. Характерным примером могут служить катящееся колесо, детский обруч, биллиардный шар или шар для игры в кегли, а также разнообразные игрушечные волчки различных форм и размеров.

Отдельные, иногда довольно неожиданные, случаи движения таких тел были исследованы еще Даламбером (1761), Эйлером (1765) и Пуассоном (1811). В более поздних работах, опубликованных преимущественно математиками, содержится множество разнообразных результатов, довольно трудно обозримых и в большинстве случаев представляющих лишь чисто академический интерес. Изложение некоторых из этих результатов можно найти в книгах Клейна и Зоммерфельда [6], Граммеля [3] или в цитируемых ими работах. В этом разделе мы приведем лишь основные соображения общего характера и перейдем к рассмотрению приме-

ров игрушечных волчков, представляющих, однако, определенный технический интерес.

Твердое тело, перемещающееся по горизонтальной плоскости, в общей сложности имеет пять степеней свободы. Для определения его движения можно воспользоваться законом кинетического момента (7.1), законом импульса (7.2) и выражением геометрической связи между телом и опорной плоскостью. Эта связь может носить как кинематический, так и кинетический характер. Особенно просты и потому хорошо освещены в литературе два предельных случая:

1) полное отсутствие трения в точке касания тела с опорной плоскостью,

2) абсолютно шероховатая опорная плоскость, так что полностью исключается возможность проскальзывания тела в точке касания.

Первый случай характеризуется тем, что реакция, действующая на тело в точке касания, всегда направлена вертикально. Второй — случай чистого качения тела по плоскости. В обоих случаях система является консервативной, так как сила, действующая на тело в точке касания с плоскостью, не совершает работы.

Однако в рамках упрощений, соответствующих этим двум предельным случаям, не удается удовлетворительно описать наблюдаемые явления. По-видимому, необходимо учесть реальный характер трения между телом и опорной плоскостью. В действительности тело может скользить по плоскости и вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости. При этом возникает трение скольжения и трение верчения. Оказывается, что непосредственное влияние трения верчения на движение тела весьма мало, однако вращение вокруг вертикальной оси существенно отражается на количественных закономерностях, характерных для трения скольжения.

При чистом скольжении, согласно известному закону Кулона, сила трения остается постоянной по величине независимо от скорости скольжения. При наличии же верчения происходит своеобразное осреднение, в результате чего фактическое сопротивление становится примерно пропорциональным скорости проскальзывания (см. Контенсу в [15]).

Этот эффект легко наблюдать при работе полотера с вращающимися щетками. При невращающихся щетках для его перемещения по полу необходимо затратить значительные усилия (закон Кулона), в то время как при их вращении медленное перемещение полотера почти не требует усилий: вращение щеток резко уменьшает трение скольжения.

7.2.1. Уравнения движения волчка. При некоторых предположениях относительно характера трения, включающих в себя оба упомянутых предельных случая, мы рассмотрим линейную теорию устойчивости вращения симметричных твердых тел на

горизонтальной плоскости, основываясь главным образом на результатах Контенсу.

Пусть имеется симметричное тело, у которого $A = B$ и центр тяжести лежит на оси симметрии $3'$ (рис. 7.8). Тело касается

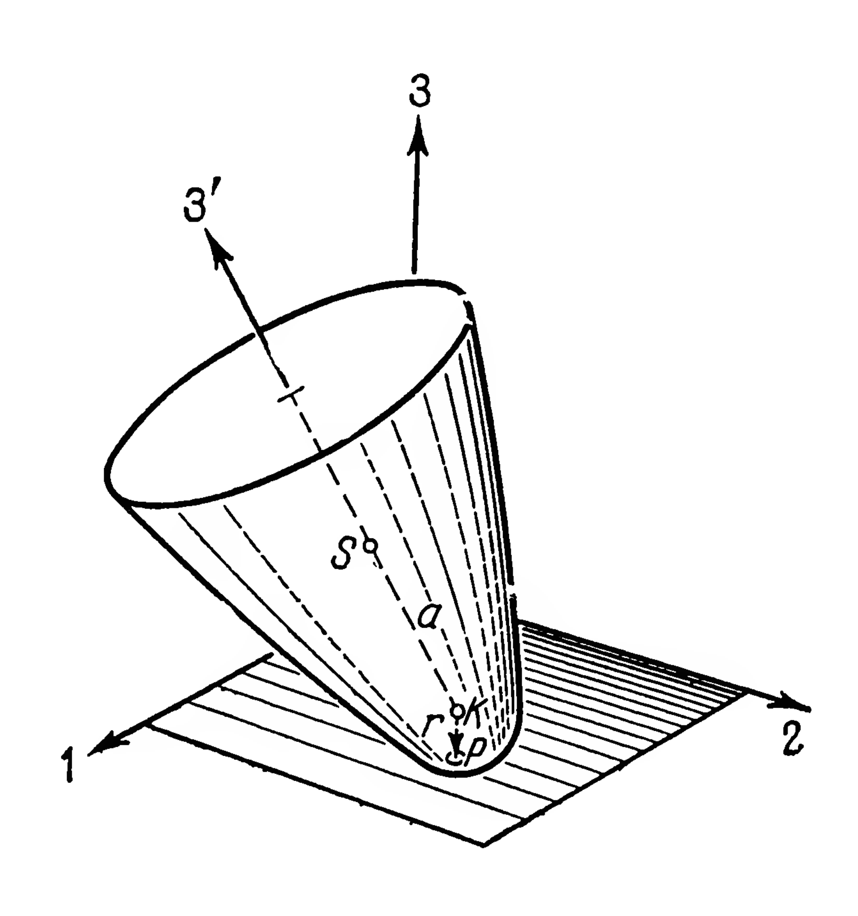


Рис. 7.8. Симметричный волчок с закругленным острием на горизонтальной опорной плоскости.

опорной плоскости точкой P. Поверхность тела в окрестности точки P можно приближенно принять за сферу радиуса r; центр кривизны K поверхности лежит на оси $3'$. Горизонтальная опорная плоскость совпадает с плоскостью 1-2 неподвижной системы координат.

Для описания движения тела используем кардановы углы α, β, γ (см. п. 1.4.3*c*), а также вектор x_i^S, определяющий положение центра тяжести. Углы α, β и изменения компонент вектора x_i^S примем за величины первого порядка малости; поэтому уравнения могут быть линеаризованы.

Если пренебречь трением верчения, то можно выделить стационарное движение $\alpha = \beta = 0$, $\dot{\gamma} = \omega_0$, $x_i^S = x_{i0}^S$. Волчок равномерно вращается вокруг вертикальной оси симметрии $3'$ (*спящий волчок*). Из общих уравнений (1.91) для возмущенного движения получим следующую линейную систему, в которой учтено, что α и β — малые величины первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\dot{\alpha} + C\omega_0\beta) &= M_\alpha = M_1, \\ A\ddot{\beta} - C\omega_0\dot{\alpha} &= M_\beta = M_2, \qquad (7.7) \\ \frac{d}{dt}(C\dot{\gamma}) &= M_\gamma = M_3. \end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой запись закона кинетического момента для движения системы относительно ее центра масс S. Моменты M_i с учетом обозначений, введенных на рис. 7.9, выражаются формулой

$$M_i = \varepsilon_{ijk} d_j R_k, \tag{7.8}$$

где

$$d_j = \begin{bmatrix} -a\beta \\ a\alpha \\ -h \end{bmatrix}, \quad R_k = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kv_1^{PK} \\ -kv_2^{PK} \\ G \end{bmatrix}.$$

Здесь $h = a + r$ — максимальная высота точки S над плоскостью, k — коэффициент пропорциональности в выражении силы трения,

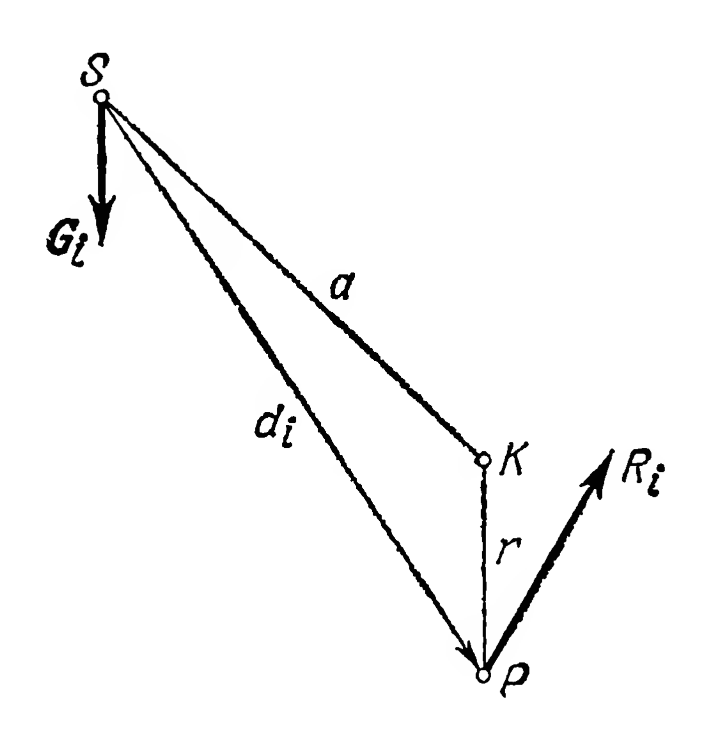


Рис. 7.9. К вычислению моментов, действующих на волчок.

v_i^{PK} — скорость точки тела, совпадающей в данный момент с точкой опоры P; слагаемые этой скорости образуются за счет движения центра масс, вращения тела вокруг осей 1 и 2 и собственного вращения вокруг оси симметрии:

$$\begin{aligned} v_1^{PK} &= v_1^S - h\dot{\beta} + r\dot{\gamma}\alpha, \\ v_2^{PK} &= v_2^S + h\dot{\alpha} + r\dot{\gamma}\beta. \end{aligned} \tag{7.9}$$

В силу малости составляющих v_i^S величина M_3, определяемая соотношением (7.8), имеет второй порядок малости, поэтому из уравнения (7.7/3) в первом приближении следует, что $\dot{\gamma} \approx \omega_0 = \text{const}$. Подставляя (7.8) и (7.9) в уравнения (7.7), получаем систему уравнений для двух первых координат

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + kh^2\dot{\alpha} - aG\alpha + C\omega_0\dot{\beta} + khr\omega_0\beta + khv_2^S = 0, \\ A\ddot{\beta} + kh^2\dot{\beta} - aG\beta - C\omega_0\dot{\alpha} - khr\omega_0\alpha - khv_1^S = 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Используя два первых уравнения закона импульса (7.2), находим

$$\begin{aligned} m\dot{v}_1^S &= R_1 = -k\,(v_1^S - h\dot{\beta} + r\omega_0\alpha), \\ m\dot{v}_2^S &= R_2 = -k\,(v_2^S + h\dot{\alpha} + r\omega_0\beta). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Третье уравнение закона импульса всегда удовлетворяется ввиду того, что в рассматриваемом движении при малых наклонах тела высота точки S в первом приближении остается постоянной.

Для дальнейшего анализа введем комплексные переменные

$$\vartheta = \alpha + i\beta, \qquad w = v_1^S + iv_2^S. \tag{7.12}$$

Системы (7.10) и (7.11) объединяются в одну систему дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} A\ddot{\vartheta} + b\dot{\vartheta} - c\vartheta - ikhw &= 0, \\ ikh\dot{\vartheta} + kr\omega_0\vartheta + m\dot{w} + kw &= 0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$b = kh^2 - iC\omega_0, \qquad c = aG + ikhr\omega_0.$$

Воспользовавшись подстановкой

$$\vartheta = \Theta e^{\lambda t}, \qquad w = We^{\lambda t},$$

получаем характеристическое уравнение системы (7.13)

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + b\lambda - c & -ikh \\ ikh\lambda + kr\omega_0 & m\lambda + k \end{vmatrix} = 0, \tag{7.14}$$

или

$$\lambda m\,[A\lambda^2 - iC\omega_0\lambda - aG] + \\ + k\,[(A + mh^2)\,\lambda^2 - i\,(C + mhr)\,\omega_0\lambda - aG] = 0. \tag{7.15}$$

7.2.2. Предельные случаи. Из уравнения (7.15) легко получить оба предельных случая, упомянутых выше.

а) $k = 0$, *полное отсутствие трения между телом и опорной плоскостью.* Из (7.15) следует

$$A\lambda^2 - iC\omega_0\lambda - aG = 0,$$

или

$$\lambda = i\left[\frac{C\omega_0}{2A} \pm \sqrt{\frac{C^2\omega_0^2}{4A^2} - \frac{aG}{A}}\right]. \tag{7.16}$$

Соответствующее движение не будет расходящимся только в том случае, когда λ имеет чисто мнимое значение. Для этого необходимо

$$C^2\omega_0^2 \geqslant 4aGA, \tag{7.17}$$

что полностью соответствует условию устойчивости (3.70) тяжелого симметричного гироскопа с вертикальной осью при верхнем расположении центра тяжести. Следует только отметить, что в отличие от (3.70) в выражении (7.17) величина A означает момент инерции тела относительно поперечной оси, проходящей через точку S, и вместо прежнего расстояния s между центром тяжести S и точкой опоры в выражение (7.17) входит расстояние a от точки S до центра кривизны K. Таким образом, прежней точке опоры соответствует точка K.

Выражение (7.16) дает значения обеих действительных частот

$$\left.\begin{matrix}\omega_N \\ \omega_P\end{matrix}\right\} = \frac{C\omega_0}{2A}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4aGA}{C^2\omega_0^2}}\right], \tag{7.18}$$

которые можно считать частотами нутации и прецессии. Центр масс во время движения остается неподвижным. Это легко увидеть из (7.11), положив $k = 0$. Точка P перемещается по кругу в направлении вращения тела с одной из частот (7.18).

b) $k \to \infty$, *абсолютно шероховатая плоскость, случай чистого качения.* Из уравнения (7.15) следует, что второе выражение в квадратных скобках должно обратиться в нуль. Сравнение со случаем a) обнаруживает полную аналогию, только вместо A появляется выражение $A + mh^2 = A^P$, а вместо C — выражение $C + mhr$. Необходимое условие устойчивости волчка на абсолютно шероховатой плоскости принимает вид

$$(C + mhr)^2\,\omega_0^2 \geqslant 4aG\,(A + mh^2). \tag{7.19}$$

7.2.3. Необходимое условие устойчивости для общего случая. При произвольном значении коэффициента k можно рассуждать следующим образом. Несмотря на комплекснозначные коэффициенты уравнения (7.15), граница области устойчивости соответствует чисто мнимым значениям λ. Но при $\lambda = i\omega$ оба выражения в квадратных скобках становятся действительными, а поскольку первое из них еще умножается на λ, для выполнения (7.15) необходимо, чтобы оба выражения в квадратных скобках обращались в нуль. Вычитая эти выражения одно из другого, получаем равенство

$$mh\lambda\,(h\lambda - ir\omega_0) = 0,$$

которое также выполняется на границе устойчивости и дает значение корня

$$\lambda_1 = ir\omega_0/h. \tag{7.20}$$

Подставляя значение корня (7.20) в первое выражение в квадратных скобках и приравнивая это выражение нулю, получаем соотношение, содержащее только параметры системы:

$$\omega_0^2\,\frac{r}{h}\left(C - A\,\frac{r}{h}\right) - aG = 0. \tag{7.21}$$

Таким образом, на границе области устойчивости должно выполняться соотношение (7.21). Внутри области устойчивости левая часть (7.21) положительна. В этом легко убедиться на примере невращающегося тела ($\omega_0 = 0$). Известно, что оно устойчиво при $a < 0$. Таким образом, необходимым условием устойчивости служит неравенство

$$\omega_0^2 \frac{r}{h}\left(\frac{C}{A} - \frac{r}{h}\right) > \frac{aG}{A}. \tag{7.22}$$

Чтобы проанализировать полученное условие, рассмотрим плоскость $(h/r,\ C/A)$, изображенную на рис. 7.10. Поскольку $0 < C/A <$

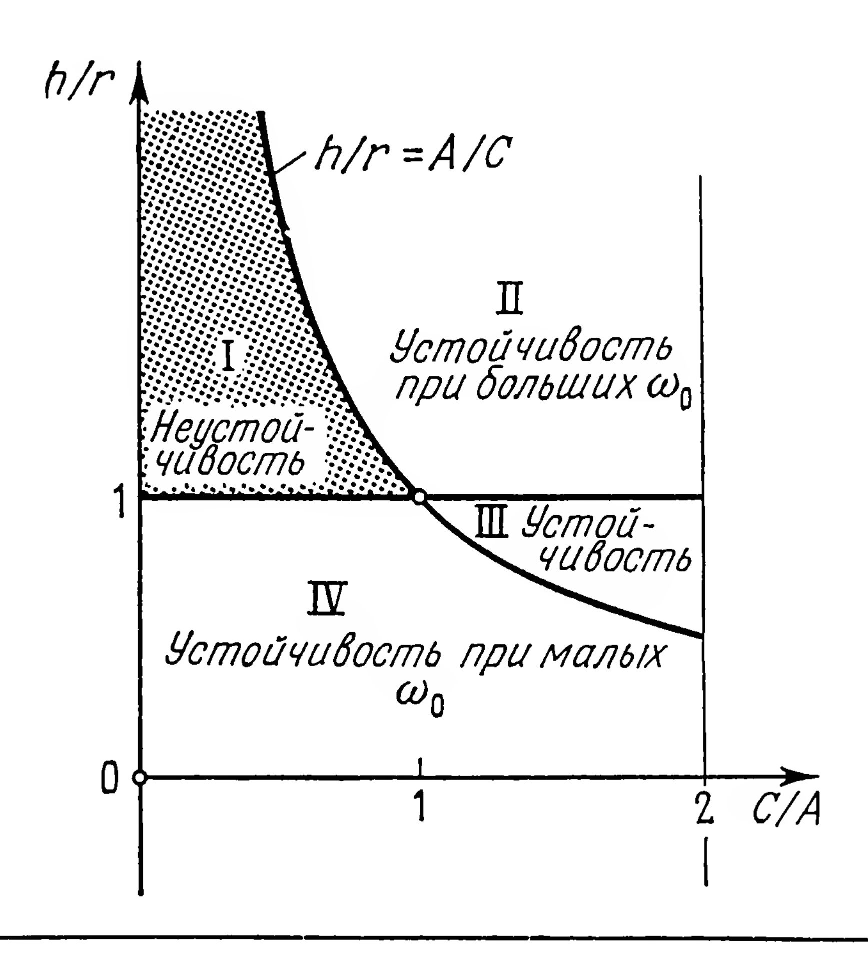


Рис. 7.10. Диаграмма устойчивости для волчков различных типов (построенная по необходимому условию).

< 2, нас может интересовать лишь выделенная на рисунке вертикальная полоса. Прямой

$$h/r = 1,$$

соответствующей значению $a = 0$, и гиперболой

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{C/A} = \frac{A}{C}$$

выделенная полоса разбивается на четыре области. Возможность обеспечения устойчивости в каждой из этих областей имеет свою специфику.

Область I: $1 < \frac{h}{r} < \frac{A}{C}$. Поскольку $a + r = h$, то $a > 0$, левая часть (7.22) отрицательна, так что независимо от величины угловой скорости собственного вращения ω_0 движение всегда неустойчиво.

Область II: $1 < \frac{h}{r}$; $\frac{A}{C} < \frac{h}{r}$. Угловая скорость ω_k, определяемая соотношением

$$\omega_k^2 = \frac{aG}{A(r/h)(C/A - r/h)}, \tag{7.23}$$

играет роль критической. Устойчивое движение в этой области возможно лишь при $\omega_0 > \omega_k$, если же $\omega_0 < \omega_k$, то движение неустойчиво.

Область III: $\frac{A}{C} < \frac{h}{r} < 1$. Теперь $a < 0$ и условие (7.22) выполняется при любом значении ω_0. Движение всегда устойчиво.

Область IV: $\frac{h}{r} < 1$; $\frac{h}{r} < \frac{A}{C}$. В этой области движение может быть устойчивым только при $\omega_0 < \omega_k$; если же $\omega_0 > \omega_k$, то движение неустойчиво. При $\omega_0 = 0$ система статически устойчива.

Критическая скорость ω_k зависит от параметров системы. Ее значение обращается в бесконечность на граничной гиперболе $h/r = A/C$. Для быстрых гироскопов, согласно проведенным рассуждениям, диаграмма устойчивости имеет вид, представленный

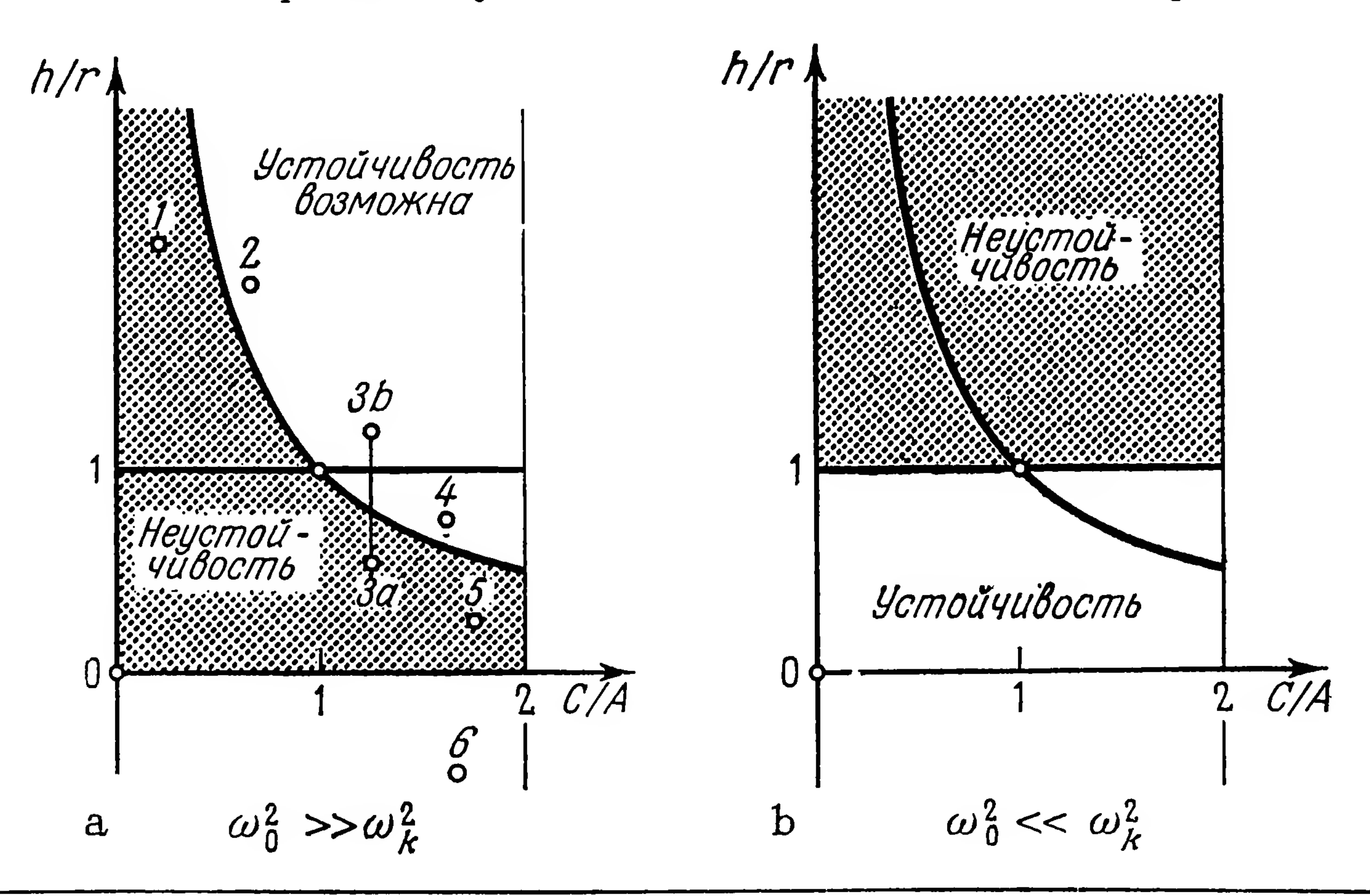


Рис. 7.11. Предельные диаграммы устойчивости для быстрых (a) и медленных (b) волчков.

на рис. 7.11, a. Для медленных гироскопов такая диаграмма (рис. 7.11, b) совпадает с диаграммой статической устойчивости ($h/r < 1$; $a < 0$).

7.2.4. Следствия из диаграммы устойчивости. В справедливости полученной диаграммы можно убедиться с помощью опытов. Это вместе с тем показывает, что принятый закон трения удовлетво-

рительно отражает реальные свойства трения. Впрочем, примечательно, что сам коэффициент трения k не входит в условие (7.22).

На диаграмме 7.11, а нанесены точки 1—6, соответствующие гироскопам, формы поперечных сечений которых представлены на рис. 7.12. Первый гироскоп неустойчив при любых, даже очень высоких скоростях собственного вращения; второй сохраняет устойчивость лишь при достаточно больших скоростях собственного вращения; четвертый устойчив при любой скорости; пятый устойчив только при небольших скоростях.

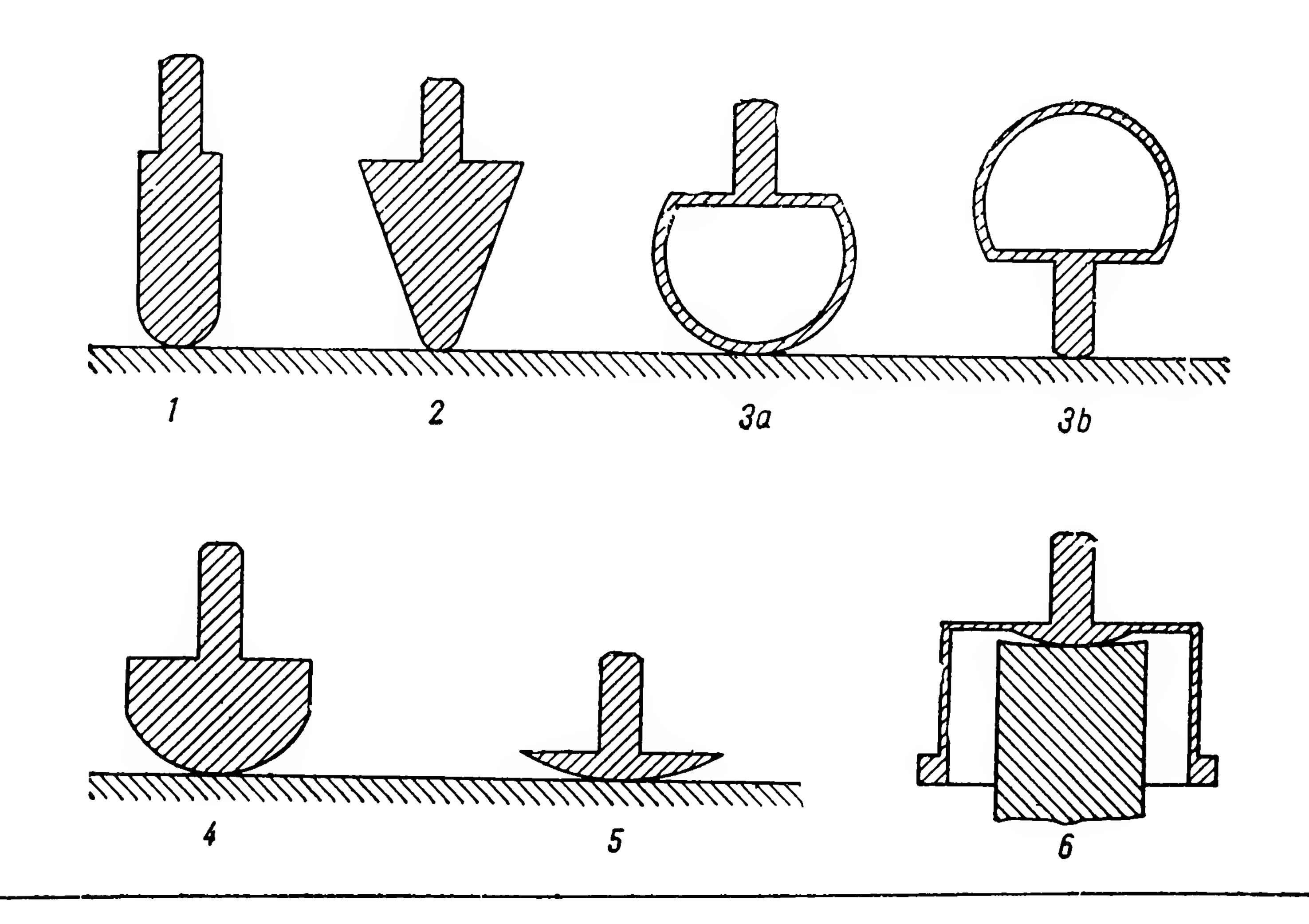


Рис. 7.12. Формы сечений волчков различных типов.

Особенно интересен третий волчок, известный под названием *тип-топ*. Статически устойчивому положению *3a* на диаграмме соответствует точка, лежащая в области, где при больших скоростях движение неустойчиво, поэтому при достаточно быстром вращении из положения *3a* волчок переворачивается в положение *3b* и продолжает вращаться на своей ножке. Положению *3b* на диаграмме соответствует точка в области, где при высоких скоростях движение устойчиво. Использованные уравнения первого приближения описывают, конечно, лишь начальную и завершающую стадии переворота волчка.

У шестого гироскопа центр тяжести ниже точки опоры, $h < 0$; такая форма использована в одном из гироскопических приборов (горизонт Флерие). При больших угловых скоростях, характерных для гироскопов, применяемых в технике, движение гироскопа на плоской опоре было бы неустойчивым. Однако для предотвращения боковых смещений опора выполняется в виде вогнутой

поверхности. Теория (Контенсу в [15]) показывает, что такая форма опоры обеспечивает и стабилизацию вращения вокруг вертикали.

7.2.5. Более общие случаи. Если поверхность тела в окрестности точки опоры P не является сферой, то возникают новые эффекты. В этом случае радиус кривизны r в окрестности точки P не постоянен, но обычно существуют два взаимно перпендикулярных направления, для которых радиус кривизны r принимает экстремальные значения. Примером может служить тело яйцеобразной формы. Оказывается, что вращение вокруг вертикали для яйца, лежащего на боку, неустойчиво (рис. 7.13, a). При достаточно быстром вращении яйцо поднимается из такого положения и продолжает вращаться на остром кончике (рис. 7.13, b).

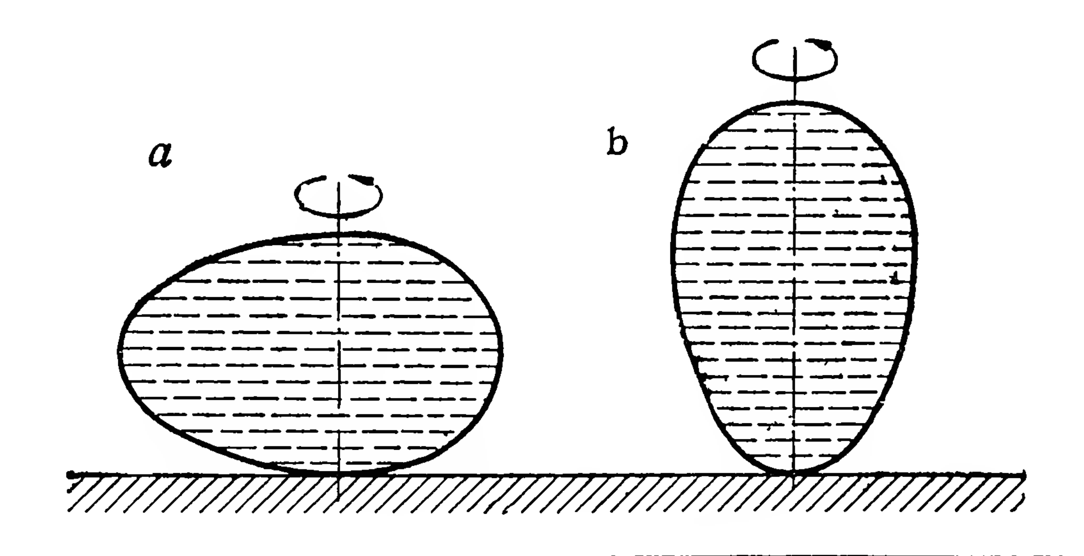


Рис. 7.13. Неустойчивое (a) и устойчивое (b) положения твердого тела яйцеобразной формы, вращающегося вокруг вертикали.

Весьма необычно поведение так называемого «кельтского камня» (Keltischer Wackelstein). Это камешек неправильной формы, отличающийся тем, что направления главных кривизн в точке P не совпадают с главными осями инерции. Теория, построенная Герглоцем [57], и опыт показывают, что устойчивость его вращения вокруг вертикали зависит от направления вращения. Камешек может быть устойчивым при правом вращении и неустойчивым при левом и наоборот. Брошенный на горизонтальную плоскость, он сам «выбирает» то вращение, при котором его движение устойчиво. При этом главная ось инерции (меньшая или большая) всегда оказывается впереди соответствующей (меньшей или большей) оси главных кривизн.

Глава 8

Гироскоп в центрально-симметричном поле тяготения

При исследовании движения тяжелого гироскопа в предыдущих главах предполагалось, что земное поле тяготения однородно. Вектор веса оказывался тогда приложенным в центре тяжести (центре масс) тела и постоянным по величине и направлению. Такое предположение, хотя и приближенное, вполне допустимо при решении большинства технических проблем, но все же пренебрегать изменением веса или градиентом поля тяготения можно не во всех случаях. Этот градиент, например, существенно влияет на движение относительно центра масс искусственных спутников и даже учитывается при вычислениях, связанных с работой некоторых высокочувствительных геодезических приборов.

Земное поле тяготения в этой главе будем считать идеальным центрально-симметричным, как если бы Земля была однородной сферической оболочкой. Возмущениями, которые вызываются отклонением от сферичности, неоднородностями и наличием других небесных тел, пренебрегаем. Если тело находится в центрально-симметричном поле тяготения, то линия действия результирующей силы притяжения в общем случае не проходит через центр масс, так что относительно этой точки может возникнуть момент. Поэтому тело в центрально-симметричном поле не имеет центра тяжести, так как не существует такой связанной с телом точки, через которую проходила бы линия действия результирующей силы притяжения при произвольной ориентации тела. Следствием этого факта является то, что твердое тело в поле тяготения принципиально нельзя считать свободным от действия сил даже в случае идеального лишенного трения подвеса в центре масс.

8.1. Момент силы притяжения твердого тела

Пусть дано твердое тело K, которое находится в центрально-симметричном поле тяготения с центром O (рис. 8.1). Началом системы отсчета, связанной с телом, выберем точку A, отличную от центра масс M. На элемент массы dm, находящийся в точке P, действует, согласно закону Ньютона, сила

$$dF_i = -\gamma \frac{m_E\, dm}{(R^P)^2} \left(\frac{R_i^P}{R^P}\right), \tag{8.1}$$

направленная к центру O. Здесь γ — гравитационная постоянная, m_E — масса притягивающего тела (например, Земли). Момент силы dF_i относительно точки A будет

$$dM_i = \varepsilon_{ijk} r_j \, dF_k, \tag{8.2}$$

а суммарный момент в силу $R_i^P = R_i + r_i$ определяется равенством

$$M_i = -\gamma m_E \varepsilon_{ijk} \int\limits_K \frac{r_j R_k}{(R^P)^3} \, dm. \tag{8.3}$$

Входящий сюда интеграл, а вместе с ним и момент M_i зависит, очевидно, не только от распределения масс тела K, но и от его

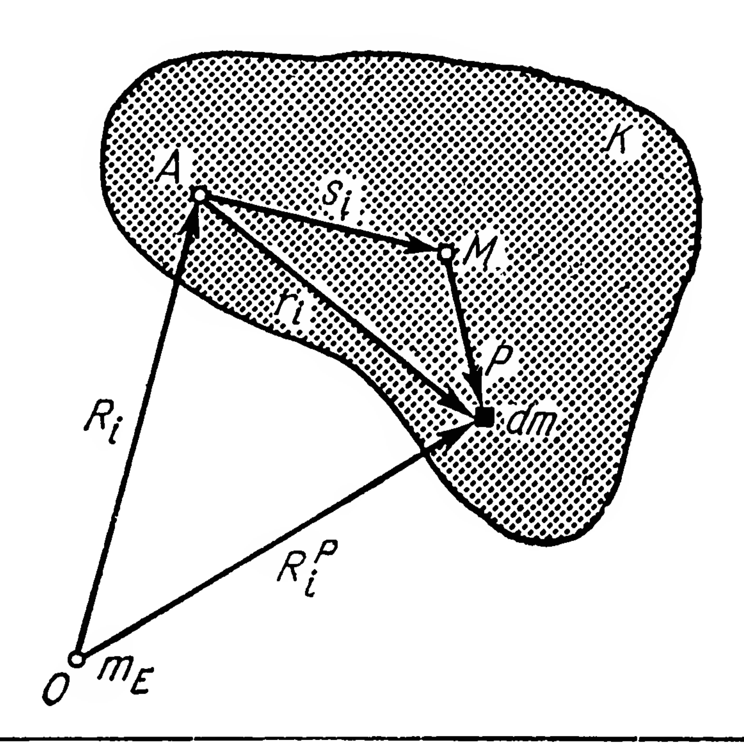


Рис. 8.1. К выводу формулы для момента сил тяготения, действующих на тело в центрально-симметричном гравитационном поле.

ориентации в пространстве. Точно вычислить интеграл удается только в немногих исключительных случаях. Однако имеется возможность приближенного вычисления, так как потенциал поля тяготения разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по специальным функциям (см. Лейманис [7]), который можно использовать для приближенного вычисления момента. Приближенное выражение, вполне удовлетворительное в большинстве случаев, можно получить и другим, более простым способом, если расстояние r между точками A и P тела мало по сравнению с расстоянием R от точки A до притягивающего центра O. Учитывая, что

$$R^P = | R_l + r_l | = \sqrt{(R_l + r_l)^2} = (R^2 + r^2 + 2R_l r_l)^{1/2},$$

разложим знаменатель подинтегральной функции в (8.3) в ряд по степеням малого отношения r/R:

$$(R^2 + r^2 + 2R_l r_l)^{-3/2} = \\ = \frac{1}{R^3}\left[1 - 3\left(\frac{r_l R_l}{R^2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{15}{2}\left(\frac{r_l R_l}{R^2}\right)^2 + \ldots\right]. \tag{8.4}$$

В этом разложении мы далее сохраним только два первых члена, пренебрегая квадратом и более высокими степенями отношения r/R. Введем еще локальное, т. е. соответствующее точке A, ускорение $g = \gamma m_E/R^2$, создаваемое полем земного тяготения; тогда

$$M_i = -g\varepsilon_{ijk}\int\limits_K r_j \frac{R_k}{R}\left[1 - 3\left(\frac{r_l R_l}{R^2}\right)\right] dm. \tag{8.5}$$

Принимая во внимание, что

$$a_{3k} = R_k/R$$

является единичным вектором, направленным по вертикали OA, и что

$$mg = G, \quad \int\limits_K r_j\, dm = ms_j,$$

получаем из (8.5)

$$M_i = G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k + (3g/R)\,\varepsilon_{ijk}\int\limits_K r_j a_{3k}(r_l a_{3l})\, dm. \tag{8.6}$$

Первое слагаемое здесь представляет собой известный момент силы веса в однородном поле тяготения. Оно обращается в нуль при $s = 0$, когда началом отсчета выбирается центр масс M. Второе слагаемое, которое учитывает градиент сил тяготения, можно преобразовать так, чтобы при интегрировании были получены компоненты тензора инерции Θ_{ij} тела. Для этого используем тождества

$$\varepsilon_{ijk}a_{3j}a_{3k} = \varepsilon_{ijk}a_{3j}a_{3k}r_m r_m = \varepsilon_{ijk}a_{3j}r_m r_m \delta_{kl}a_{3l} = 0;$$

входящее в (8.6) произведение, если к нему прибавить последнее выражение, равное нулю, преобразуется к виду

$$\varepsilon_{ijk}r_j a_{3k}(r_l a_{3l}) = \varepsilon_{ijk}a_{3j}(r_m r_m \delta_{kl} - r_k r_l)\, a_{3l}.$$

В силу (1.13) выражение (8.6) для момента сил тяготения тогда приобретает форму

$$M_i = G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k + (3g/R)\,\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l}. \tag{8.7}$$

Из полученного выражения следует, что добавочное слагаемое, создаваемое градиентом сил тяготения, исчезает, когда или одна из главных осей инерции тела в точке A направлена к центру O, или эллипсоид инерции тела вырождается в сферу. Действительно, в обоих случаях векторы a_{3j} и $\Theta_{kl}a_{3l}$ параллельны и их векторное произведение равно нулю.

В системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела в точке A, вектор M_i имеет следующие координаты:

$$M_i = G\begin{bmatrix} a_{32}s_3 - a_{33}s_2 \\ a_{33}s_1 - a_{31}s_3 \\ a_{31}s_2 - a_{32}s_1 \end{bmatrix} + \frac{3g}{R}\begin{bmatrix} (C-B)\,a_{32}a_{33} \\ (A-C)\,a_{33}a_{31} \\ (B-A)\,a_{31}a_{32} \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

8.2. Гироскоп с неподвижной точкой

Уравнения движения гироскопа с неподвижной точкой A, который находится в центрально-симметричном поле тяготения, являющиеся обобщением уравнений (3.28), приобретают в силу (8.7) вид

$$\frac{dH_i}{dt}=\frac{d'H_i}{dt}+\varepsilon_{ijk}\omega_j H_k=G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k+\frac{3g}{R}\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l}. \qquad (8.9)$$

В трех случаях, о которых речь будет идти ниже (п. 8.2.2, 8.2.3 и 8.2.4), решение этих уравнений может быть получено классическими методами в квадратурах. Для этого, как известно, кроме интеграла энергии и интеграла кинетического момента, следует найти еще другие интегралы.

8.2.1. Интеграл энергии и интеграл кинетического момента. Умножим скалярно векторное равенство (8.9) на ω_i; тогда вследствие (1.81) для левой части будем иметь

$$\frac{d'H_i}{dt}\omega_i=\frac{d'}{dt}\left(\frac{1}{2}H_i\omega_i\right).$$

Правая часть равенства (8.9), умноженного скалярно на ω_i, преобразуется с помощью следующих равенств:

$$\frac{da_{3i}}{dt}=\frac{d'a_{3i}}{dt}+\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k}=0 \quad \text{и} \quad \frac{d's_i}{dt}=0;$$

тогда

$$G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k\omega_i=G\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k}s_i=-\frac{d'}{dt}(Ga_{3i}s_i),$$

$$\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l}\omega_i=\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k}\Theta_{il}a_{3l}=-\frac{d'}{dt}\left(\frac{1}{2}a_{3i}\Theta_{ij}a_{3j}\right).$$

Таким образом, из равенства (8.9) после скалярного умножения на ω_i и интегрирования по времени следует *интеграл энергии*

$$\frac{1}{2}H_i\omega_i+Ga_{3i}s_i+\frac{3g}{2R}\Theta_{ij}a_{3i}a_{3j}=E_0. \qquad (8.10)$$

Это выражение при $R\to\infty$ переходит в полученный выше интеграл энергии (3.34).

Умножим далее равенство (8.9) скалярно на a_{3i}; тогда его правая часть обратится в нуль, и, поскольку

$$da_{3i}/dt=0,$$

оно примет вид

$$\frac{dH_i}{dt}a_{3i}=\frac{d}{dt}(H_i a_{3i})=0,$$

откуда получаем *интеграл кинетического момента*

$$H_i a_{3i}=H_0^V. \qquad (8.11)$$

Он совпадает с ранее найденным интегралом (3.33) и означает, что вертикальная составляющая кинетического момента остается неизменной.

Другие интегралы можно найти для шарового гироскопа и в случаях, представляющих обобщение случаев Эйлера и Лагранжа. Это будет сделано ниже, но доведение решения уравнений движения до квадратур, которое становится возможным, мы опустим, уделив внимание особенностям движения, обусловленным градиентом сил тяготения.

8.2.2. Шаровой гироскоп. Если $A = B = C$, то вектор $\Theta_{ij}a_{3j}$ параллелен вектору a_{3j} и в уравнении (8.9) исчезает член, порождаемый градиентом сил тяготения. Поскольку, кроме того, вектор H_i параллелен вектору ω_i, это уравнение принимает вид

$$\frac{d'H_i}{dt} = G\varepsilon_{ijk}a_{3j}s_k,$$

откуда после скалярного умножения на s_i получаем

$$\frac{d'H_i}{dt}s_i = \frac{d'}{dt}(H_i s_i) = 0.$$

Следовательно, еще один первый интеграл будет

$$H_i s_i = H^s = \text{const},$$

или, так как $H_i = \Theta\omega_i$, где Θ — скаляр,

$$\omega_i s_i = \omega^s = \text{const}. \tag{8.12}$$

Таким образом, проекции кинетического момента и угловой скорости на прямую, соединяющую неподвижную точку с центром масс, постоянны.

Движение тяжелого шарового гироскопа здесь подробно не рассматривается, потому что он является частным случаем гироскопа Лагранжа и к тому же на него не оказывает влияния градиент сил тяготения.

8.2.3. Обобщенный гироскоп Эйлера. Исследовать движение гироскопа Эйлера с закрепленным центром масс ($s = 0$) в центрально-симметричном поле тяготения оказывается гораздо сложнее, чем в однородном поле. Это связано с тем, что, хотя точкой опоры и служит центр масс, гироскоп все-таки нельзя считать свободным, т. е. не подвергающимся действию моментов, обусловленных гравитационными силами. Тем не менее удается найти дополнительный интеграл уравнений движения. Для этого умножим скалярно векторное равенство (8.9) на вектор H_i:

$$\frac{d'H_i}{dt}H_i = \frac{3g}{R}\varepsilon_{ijk}a_{3j}\Theta_{kl}a_{3l}H_i,$$

или

$$\frac{d'}{dt}\left(\frac{1}{2}H^2\right) = \frac{3g}{R}\,\varepsilon_{ijk}\Theta_{jl}a_{3l}H_k a_{3i}. \tag{8.13}$$

Если в качестве осей связанной с телом системы координат взять главные оси инерции, то смешанное произведение, входящее в уравнение (8.13), можно записать в виде

$$\varepsilon_{ijk}\Theta_{jl}a_{3l}H_k a_{3i} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ Aa_{31} & Ba_{32} & Ca_{33} \\ A\omega_1 & B\omega_2 & C\omega_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{31}BC(a_{32}\omega_3 - a_{33}\omega_2) + a_{32}CA(a_{33}\omega_1 - a_{31}\omega_3) + a_{33}AB(a_{31}\omega_2 - a_{32}\omega_1).$$

Учитывая равенство $\frac{d'}{dt}(a_{31}) = a_{32}\omega_3 - a_{33}\omega_2$ и два других, получаемых круговой перестановкой индексов, находим окончательно

$$\varepsilon_{ijk}\Theta_{jl}a_{3l}H_k a_{3i} = \frac{d'}{dt}\left[\frac{1}{2}(BCa_{31}^2 + CAa_{32}^2 + ABa_{33}^2)\right],$$

поэтому из (8.13) после интегрирования по времени следует

$$H^2 - \frac{3g}{R}(BCa_{31}^2 + CAa_{32}^2 + ABa_{33}^2) = K_0. \tag{8.14}$$

Это соотношение совместно с (8.10) и (8.11) позволяет найти общее решение исходных уравнений (Лейманис [7]).

Рассмотрим в заключение вопрос о возможности перманентных вращений вокруг связанных с телом осей и их устойчивости. Для этого перейдем от векторного уравнения (8.9) к системе скалярных уравнений, сохранив выбранную выше связанную с телом систему координат и положив $s = 0$:

$$\begin{aligned} A\dot\omega_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= \frac{3g}{R}(C - B)\,a_{32}a_{33}, \\ B\dot\omega_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= \frac{3g}{R}(A - C)\,a_{33}a_{31}, \\ C\dot\omega_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= \frac{3g}{R}(B - A)\,a_{31}a_{32}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Эта система допускает в качестве частного решения вращение с постоянной угловой скоростью вокруг главной оси инерции, совпадающей с вертикалью $OA = OM$. Если, например, вертикальна связанная с телом ось 3, то соответствующее частное решение системы (8.15) будет

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad & \omega_3 = \omega_{30}, \\ a_{31} = a_{32} = 0, \quad & a_{33} = 1. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Для исследования устойчивости этого вращения следует рассмотреть возмущенные движения, для которых переменные ω_1, ω_2, a_{31}, a_{32}

считаются малыми по абсолютной величине. Тогда из уравнения (8.15/3) и кинематического уравнения (3.31/3) следует, что скорость изменения величин ω_3 и a_{33} имеет второй порядок малости; поэтому в теории первого приближения эти величины можно считать сохраняющими постоянные значения (8.16) [1]. Уравнениями возмущенного движения будут тогда первые два уравнения систем (8.15) и (3.31), которые с помощью обозначений

$$\frac{C-B}{A}=a, \quad \frac{C-A}{B}=b, \quad \frac{3g}{R}=\varkappa \tag{8.17}$$

записываются в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_1+a\omega_{30}\omega_2-\varkappa a a_{32}=0,\\ &\dot{\omega}_2-b\omega_{30}\omega_1+\varkappa b a_{31}=0,\\ &\dot{a}_{31}+\omega_2-\omega_{30}a_{32}=0,\\ &\dot{a}_{32}+\omega_{30}a_{31}-\omega_1=0. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda & a\omega_{30} & 0 & -a\varkappa \\ -b\omega_{30} & \lambda & b\varkappa & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & -\omega_{30} \\ -1 & 0 & \omega_{30} & \lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^4+p\lambda^2+q=0,$$

где

$$\begin{aligned} &p=\omega_{30}^2(1+ab)-\varkappa(a+b),\\ &q=ab\left(\omega_{30}^2-\varkappa\right)^2, \end{aligned} \tag{8.19}$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2}^2=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}. \tag{8.20}$$

Невозмущенное движение будет устойчиво только тогда, когда корни $\lambda_{1,2}^2$ действительны и отрицательны. Для этого коэффициенты p и q, а также дискриминант p^2-4q должны быть положительны.

В зависимости от величины главного момента инерции C относительно оси 3, вокруг которой вращается гироскоп, возможны три случая. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что $A>B$.

1. $A>C>B$, т. е. C является средним по величине главным моментом инерции. Тогда вследствие (8.17) будет $a>0$ и $b<0$.

[1]) Теория первого приближения здесь может дать только необходимые условия устойчивости, так как характеристическое уравнение, соответствующее полной системе уравнений в вариациях, имеет двукратный нулевой корень. — *Прим. ред.*

Если $ab < 0$, то из (8.19) следует, что $q < 0$, поэтому перманентное вращение не может быть устойчивым.

2. $A > B > C$, т. е. C является наименьшим главным моментом инерции. В этом случае $a < 0$, $b < 0$, следовательно, $p > 0$ и $q > 0$. Дискриминант тоже положителен, так как из (8.19) следует, что

$$p^2 - 4q = \omega_{30}^4 (1 - ab)^2 + 2\varkappa\omega_{30}^2 [4ab - (1 + ab)(a + b)] + \varkappa^2 (a - b)^2; \quad (8.21)$$

среднее слагаемое здесь при $ab > 0$, $a + b < 0$ будет положительным. Следовательно, условия устойчивости выполняются.

3. $C > A > B$, т. е. C является наибольшим главным моментом инерции. Имеем $a > 0$, $b > 0$, следовательно, $q > 0$. Коэффициент p будет положительным только при

$$\omega_{30}^2 > \omega_{\mathrm{I}}^2 = \varkappa \frac{a + b}{1 + ab}. \quad (8.22)$$

Выражение для дискриминанта (8.21) разложим на множители:

$$p^2 - 4q = \left[\omega_{30}^2 (1 - \sqrt{ab})^2 - \varkappa (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2\right] \left[\omega_{30}^2 (1 + \sqrt{ab})^2 - \varkappa (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2\right];$$

значит, дискриминант равен нулю при

$$\omega_{30}^2 = \omega_{\mathrm{II}}^2 = \varkappa \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^2 \quad \text{и} \quad \omega_{30}^2 = \omega_{\mathrm{III}}^2 = \varkappa \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}\right)^2.$$

Учитывая, что $\omega_{\mathrm{II}} < \omega_{\mathrm{III}}$, получаем условия положительности дискриминанта: $\omega_{30}^2 < \omega_{\mathrm{II}}^2$ и $\omega_{30}^2 > \omega_{\mathrm{III}}^2$. Для величин a и b вследствие $C > A > B$ и неравенств (1.10) справедливы условия $1 > a > b > 0$, из которых следует, как нетрудно установить, двойное неравенство

$$\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^2 < \frac{a + b}{1 + ab} < \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}}\right)^2,$$

означающее, что $\omega_{\mathrm{II}} < \omega_{\mathrm{I}} < \omega_{\mathrm{III}}$. Таким образом, существует только одно критическое значение $\omega_K = \omega_{\mathrm{III}}$ угловой скорости, такое, что при $\omega_{30} < \omega_{\mathrm{III}}$ условия устойчивости заведомо нарушаются, т. е. неравенство

$$\omega_{30} > \omega_K = \sqrt{\frac{3g}{R}} \left(\frac{\sqrt{B(C - B)} + \sqrt{A(C - A)}}{\sqrt{AB} + \sqrt{(C - A)(C - B)}}\right) \quad (8.23)$$

является необходимым условием устойчивости невозмущенного движения. Белецкий [58] доказал, что это и найденные выше для случаев 1 и 2 условия будут также достаточными.

Итак, результаты исследования устойчивости перманентных вращений вокруг вертикально направленной главной оси инерции можно сформулировать в виде следующих трех утверждений.

1. *Вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции неустойчиво.*
2. *Вращение вокруг оси, которой соответствует наименьший главный момент инерции, устойчиво.*
3. *Вращение вокруг оси, которой соответствует наибольший главный момент инерции, устойчиво только тогда, когда скорость вращения превосходит критическое значение* (8.23).

Критическое значение (8.23) очень мало. Например, вычисления, проведенные для симметричного диска ($C = 2A = 2B$), находящегося на поверхности Земли, дают величину $\omega_K = 2{,}15\cdot 10^{-3}$ 1/с $= 0{,}12$ град/с. Отличие от поведения гироскопа Эйлера в однородном поле тяготения имеет место только в случае 3 при $\omega_{30} < \omega_K$; однако следует отметить, что во всех случаях направление оси перманентного вращения уже не является произвольным; оно должно совпадать с направлением вертикали.

Для частного случая $\omega_{30} = 0$ из проведенных исследований можно сделать вывод о том, что тело, имеющее возможность свободно двигаться вокруг неподвижного центра масс, находится в устойчивом положении равновесия только тогда, когда к центру притяжения направлена ось, соответствующая наименьшему главному моменту инерции.

8.2.4. Обобщенный гироскоп Лагранжа. Для гироскопа Лагранжа имеем $A = B$ и $s_i = (0, 0, s) = a_{i3}s$, где a_{i3} — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии тела. Если уравнение движения (8.9) умножить скалярно на a_{i3}, то оба члена в правой части и второй член в левой части обратятся в нуль, так как соответствующие векторные произведения при указанных предположениях направлены перпендикулярно к оси симметрии тела. Таким образом, получаемое равенство имеет вид

$$\frac{d'H_i}{dt}a_{i3} = \frac{d'}{dt}(H_i a_{i3}) = 0,$$

откуда после интегрирования

$$H_i a_{i3} = H_{30} = \mathrm{const},$$

или вследствие $H_3 = C\omega_3$

$$\omega_3 = \omega_{30} = \mathrm{const}. \qquad (8.24)$$

Найденный интеграл уравнения движения (8.9) вместе с интегралами (8.9) и (8.11) позволяют найти решение в квадратурах.

Обратимся к особому случаю перманентного вращения гироскопа вокруг вертикальной оси симметрии, которому соответствует частное решение уравнения (8.9):

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30},$$
$$a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1.$$

Чтобы исследовать устойчивость этого движения, введем в рассмотрение возмущенные движения, для которых переменные ω_1, ω_2, a_{31}, a_{32} предполагаются малыми, а величины ω_3 и a_{33} — сохраняющими, согласно теории первого приближения, постоянные значения $\omega_3 \approx \omega_{30}$, $a_{33} \approx 1$, так как скорость их изменения имеет второй порядок малости [1]).

Из двух первых скалярных уравнений, получаемых проектированием векторного уравнения (8.9), находим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{gathered} A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_{30}\omega_2 = Ga_{32}s - \frac{3g}{R}(A - C)\,a_{32}, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_{30}\omega_1 = -Ga_{31}s + \frac{3g}{R}(A - C)\,a_{31}. \end{gathered} \tag{8.25}$$

Эти дифференциальные уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (3.35) для случая гироскопа Лагранжа в однородном поле тяготения, только вместо величины Gs здесь фигурирует выражение

$$Gs - \frac{3g}{R}(A - C).$$

Поэтому полученные выше результаты относительно устойчивости гироскопа Лагранжа с верхним расположением центра тяжести можно непосредственно перенести на рассматриваемый случай.

Гироскоп Лагранжа с верхним расположением центра тяжести становится устойчивым в центрально-симметричном поле тяготения, если выполняется условие

$$C^2\omega_{30}^2 \geqslant 4A\left[Gs - \frac{3g}{R}(A - C)\right]. \tag{8.26}$$

Это неравенство при $R \to \infty$ переходит в найденное ранее условие (3.70).

Для гироскопа Лагранжа с закрепленным центром масс ($s=0$) из (8.26) следует, что его устойчивость существенно зависит от формы эллипсоида инерции. Вытянутый гироскоп ($A > C$) всегда устойчив, а сплюснутый гироскоп ($A < C$) будет устойчив лишь тогда, когда угловая скорость превосходит критическое значение ω_K, что согласуется с результатом, полученным в п. 8.2.3. Критическое значение

$$\omega_K = \frac{2}{C}\sqrt{(3g/R)\,A\,(C - A)}$$

можно получить из (8.26) или из (8.23).

8.2.5. Обобщенные вращения Штауде. Тяжелый несимметричный гироскоп в центрально-симметричном поле тяготения тоже может совершать перманентные вращения вокруг оси, неподвижной как

[1]) См. примечание на стр. 298. — *Прим. ред.*

относительно тела, так и в пространстве. Ось вращения должна быть вертикальной:

$$\omega_i = a_{3i}\omega_0. \tag{8.27}$$

Выяснить, возможно ли такое движение, можно проще всего, если умножить (8.9) скалярно на s_i. Из (8.27) и равенства $\omega_0 = \text{const}$ следует, что

$$\omega_0^2 \varepsilon_{ijk} a_{3j} \Theta_{kl} a_{3l} s_i = (3g/R)\, \varepsilon_{ijk} a_{3j} \Theta_{kl} a_{3l} s_i.$$

Это равенство выполняется не только в малоинтересном особом случае $\omega_0^2 = 3g/R$, но и при произвольной скорости вращения ω_0, если

$$\varepsilon_{ijk} a_{3j} \Theta_{kl} a_{3l} s_i = 0. \tag{8.28}$$

Это условие идентично полученному выше условию (3.93), поэтому и в рассматриваемом здесь обобщенном случае геометрическое место возможных осей вращения образует в теле конус Штауде. Однако при исследовании устойчивости обобщенных вращений Штауде обнаруживаются некоторые различия. Пожарицкий [59] показал, что область устойчивых осей вращения на конусе Штауде в обобщенном случае несколько больше, чем в классическом случае однородного поля тяготения.

8.3. Вращательные движения искусственных спутников

Для спутника, вращающегося в центрально-симметричном поле тяготения и не имеющего неподвижной точки, в качестве начала отсчета выбирают центр масс M, движение которого исследуется с помощью теоремы о количестве движения (7.2). Используя для силы тяготения выражение (8.1) и предполагая, что масса m спутника постоянна, из (7.2) получаем

$$m\ddot{R}_i = -\gamma m_E \int \frac{R_i^P}{(R^P)^3}\, dm. \tag{8.29}$$

Вследствие равенства $R_i^P = R_i + r_i$ подинтегральная функция зависит не только от расстояния R до центра притяжения, но и от формы и ориентации спутника. Поэтому орбитальное движение спутника не является независимым от его вращательного движения. Следовательно, к теореме о количестве движения (8.29) следует присоединить теорему о кинетическом моменте, которая в силу (8.3) выражается равенством

$$\frac{d'H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = -\gamma m_E \varepsilon_{ijk} \int \frac{r_j R_k}{(R^P)^3}\, dm. \tag{8.30}$$

Чтобы с помощью вектора угловой скорости ω_i определить ориентацию спутника относительно некоторой надлежащим образом выбранной системы отсчета, следует использовать кинематиче-

ское соотношение. Оно может быть получено, например, из обобщенного уравнения (1.55), примененного к вертикальному единичному вектору a_{3i}. В центрально-симметричном поле тяготения этот вектор всегда направлен от притягивающего центра к спутнику; следовательно, его направление при движении спутника по орбите не остается постоянным. Если вертикаль вращается с угловой скоростью Ω_i, то справедливо равенство

$$\frac{da_{3i}}{dt}=\frac{d'a_{3i}}{dt}+\varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k}=\varepsilon_{ijk}\Omega_j a_{3k}. \tag{8.31}$$

Основные уравнения (8.29)—(8.31) образуют в совокупности систему двенадцатого порядка, так как уравнение (8.29) представляет собой векторное уравнение второго порядка, а уравнения (8.30) и (8.31) — векторные уравнения первого порядка. С помощью интегралов, справедливых для орбитального движения, а также интегралов кинетического момента и энергии порядок системы можно несколько понизить, но не настолько, чтобы, согласно теории интегрирования Якоби, можно было найти полное решение. Трудности в нахождении решения прежде всего обусловлены необходимостью рассматривать совместно орбитальное и вращательное движения.

8.3.1. Частные решения общих уравнений движения. Прежде чем будут обсуждены технически важные приближенные решения для малых спутников, укажем на некоторые частные решения общих уравнений. Эти решения удается определить, если ввести ряд существенных ограничений на параметры системы и начальные условия. А именно указанные ограничения накладываются на:

1) *форму* тела (т. е. на его эллипсоид инерции),
2) *траекторию* центра масс,
3) *ориентацию* тела относительно траектории,
4) *характер движения.*

В качестве примера рассмотрим *спутник, имеющий форму стержня,* у которого $A=B$, $C=0$ и центр масс движется по *круговой орбите* вокруг притягивающего центра, т. е. $R=\mathrm{const}$. Введем орбитальную систему координат (оси 1, 2, 3), как показано на рис. 8.2; ось 1 перпендикулярна к плоскости орбиты, ось 2 направлена по касательной к орбите, а ось 3 направлена вдоль вертикали.

Если материальная точка с массой m движется с постоянной скоростью по окружности радиуса R, то центробежная сила должна уравновешивать силу притяжения:

$$m\Omega_0^2 R=mg=\gamma\frac{m_E m}{R^2},$$

откуда находим значение круговой частоты обращения спутника

$$\Omega_0=\sqrt{g/R}=\sqrt{\gamma m_E/R^3}, \tag{8.32}$$

Промежуток времени, за который совершается один оборот, вычисляется по формуле

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \sqrt{R/g}. \tag{8.33}$$

Если для g и R взять значения, соответствующие земной поверхности, то период T_0 будет равен 84,3 мин (*период Шулера*). Эта земная константа, найденная Шулером [60] в другой связи, представляет наименьшее возможное время одного оборота для спутника Земли.

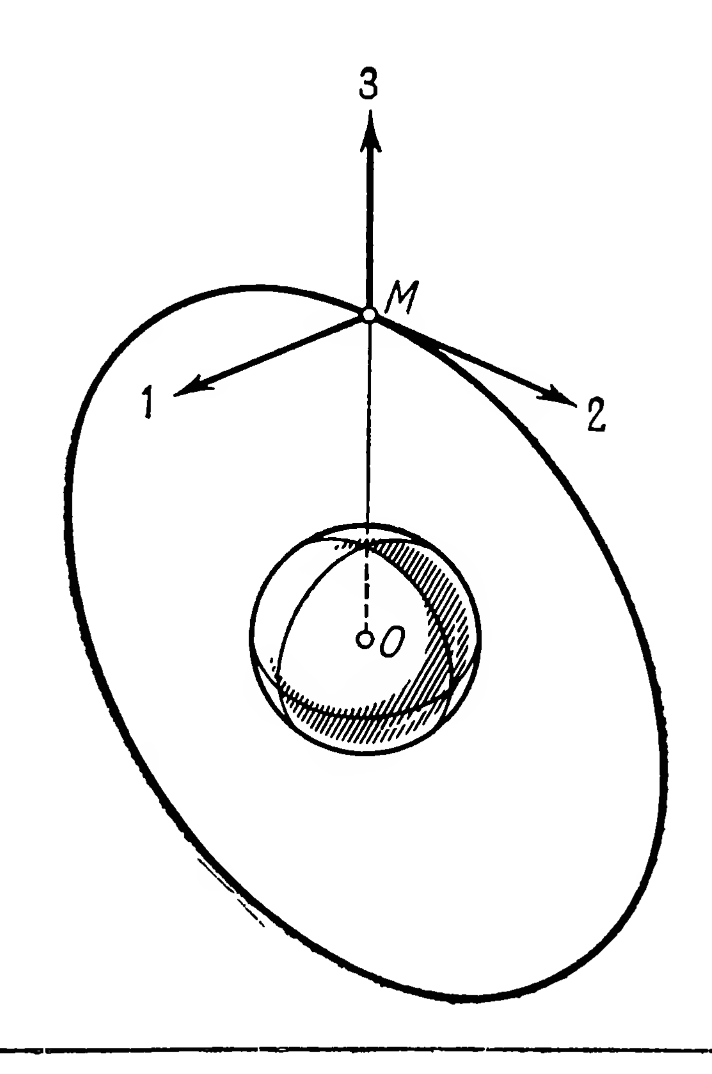


Рис. 8.2. Круговая орбита спутника, обращающегося вокруг притягивающего центра O, и орбитальная система координат (оси 1, 2, 3).

Частные решения системы уравнений (8.29)—(8.31) легко обнаружить, если ось стержня совпадает с одной из осей орбитальной системы координат (рис. 8.2). Рассмотрим каждую из трех указанных ориентаций.

Положение III: ось стержня $3'$ направлена вдоль оси 3. Тогда система главных осей инерции тела совпадает с орбитальной системой координат (оси 1, 2, 3). Ориентация и характер движения задаются векторами

$$\begin{aligned} a_{3i} &= (0,\ 0,\ 1), \\ \omega_i &= (\Omega_{\text{III}},\ 0,\ 0), \end{aligned} \tag{8.34}$$

где через Ω_{III} обозначена подлежащая определению круговая частота обращения спутника по орбите. Векторы (8.34) превращают уравнение (8.30) в тождество, так как все его члены обращаются в нуль (правая часть вследствие того, что $r_i \| R_i$),

Из (8.31), учитывая равенство $\omega_j = \Omega_j$, находим угловую скорость поворота вертикали

$$\frac{da_{3i}}{dt} = \varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k} = (0, \ -\Omega_{\text{III}}, \ 0).$$

Наконец, из (8.29) вследствие равенства $R_i^p = (R + r) R_i / R$ и (8.32) получаем, полагая $dm = \mu dr$,

$$m\ddot{R}_i = -\Omega_0^2 R^2 R_i \mu \int \frac{dr}{(R+r)^2}. \tag{8.35}$$

Если длина стержня равна $2L$, то для интеграла в последней формуле справедливо следующее выражение:

$$\mu \int_{-L}^{L} \frac{dr}{(R+r)^2} = \frac{2\mu L}{R^2 - L^2} = \frac{m}{R^2 - L^2}.$$

Тогда уравнение (8.35) принимает вид

$$\ddot{R}_i + \frac{\Omega_0^2 R^2}{R^2 - L^2} R_i = \ddot{R}_i + \Omega_{\text{III}}^2 R_i = 0. \tag{8.36}$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение

$$R_i = R \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \Omega_{\text{III}} t \\ \cos \Omega_{\text{III}} t \end{bmatrix}, \tag{8.37}$$

которому соответствует равномерное вращение радиуса-вектора R_i с угловой скоростью

$$\Omega_{\text{III}} = \Omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (L/R)^2}} \tag{8.38}$$

и периодом вращения

$$T_{\text{III}} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \sqrt{1 - (L/R)^2}. \tag{8.39}$$

Таким образом, спутник в форме стержня, ось которого направлена к центру притяжения, движется по орбите несколько быстрее, чем материальная точка, круговая орбита которой совпадает с траекторией центра масс M стержня. Для спутника конечных размеров обнаруживается отклонение от известного движения Кеплера

Положение II: ось стержня направлена вдоль оси 2 (рис. 8.3). Тогда решение основных уравнений будет

$$\begin{aligned} a_{3i} &= (0, \ -1, \ 0), \\ \omega_i &= (\Omega_{\text{II}}, \ 0, \ 0). \end{aligned} \tag{8.40}$$

В уравнении (8.30) левая и правая части обращаются тождественно в нуль: левая часть в силу (8.40), а правая часть

вследствие того, что интегралы от $-L$ до 0 и от 0 до L взаимно уничтожаются. Из (8.31) следует, что

$$\frac{da_{3i}}{dt} = \varepsilon_{ijk}\omega_j a_{3k} = (0,\ 0,\ -\Omega_{\mathrm{II}}).$$

Наконец, уравнение (8.29) с использованием введенных выше обозначений приводится к виду

$$m\ddot{R}_i = -\Omega_0^2 R^3 \mu \int_{-L}^{L} \frac{R_i + r_i}{(R^2 + r^2)^{3/2}}\, dr.$$

Для интеграла получаем следующее выражение:

$$\mu \int_{-L}^{L} \frac{R_i + r_i}{(R^2 + r^2)^{3/2}}\, dr = \frac{mR_i}{R^2\sqrt{R^2 + L^2}},$$

поэтому окончательно имеем

$$\ddot{R}_i + \Omega_{\mathrm{II}}^2 R_i = 0,$$

где угловая скорость вычисляется по формуле

$$\Omega_{\mathrm{II}} = \Omega_0 \frac{1}{\sqrt[4]{1 + (L/R)^2}}. \tag{8.41}$$

Данной угловой скорости соответствует период обращения

$$T_{\mathrm{II}} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \sqrt[4]{1 + (L/R)^2}. \tag{8.42}$$

Этот период больше, чем время одного оборота материальной

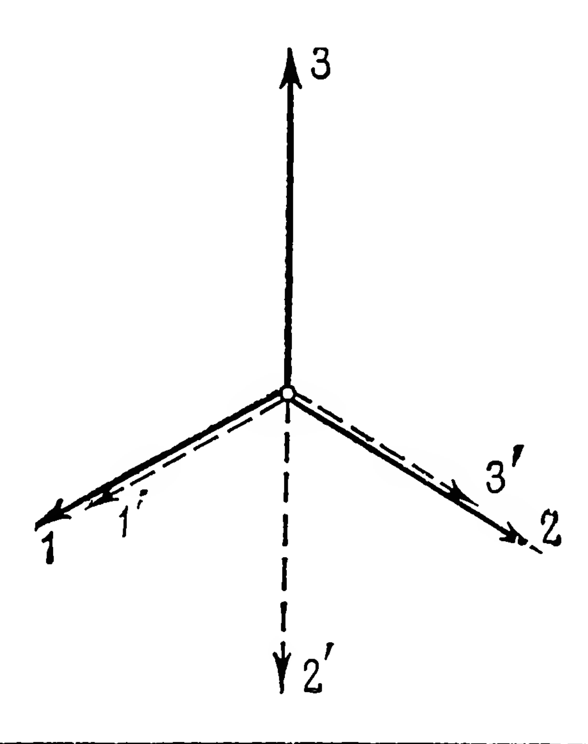


Рис. 8.3. Частный случай ориентации связанных со спутником осей 1′, 2′, 3′ относительно орбитальной системы координат (оси 1, 2, 3).

точки, движущейся по траектории центра масс M стержня. Ниже при исследовании общего случая будет показано, что положение II неустойчиво (см. п. 8.3.4*а*).

Положение I: ось стержня направлена вдоль оси 1 (рис. 8.4). В этом случае решение имеет вид

$$\begin{aligned} a_{3i} &= (0,\ 1,\ 0), \\ \omega_i &= (0,\ 0,\ \omega_0), \end{aligned} \tag{8.43}$$

где значение угловой скорости ω_0 произвольно. Проведя аналогичные предыдущим вычисления, получим $\Omega_{\text{I}} = \Omega_{\text{II}}$ и, следовательно, $T_{\text{I}} = T_{\text{II}}$, т. е. период обращения такой же, как и в случае II.

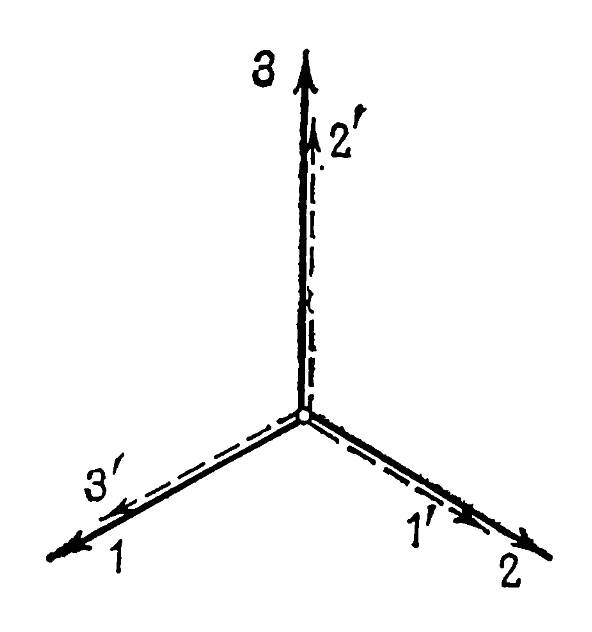


Рис. 8.4. Частный случай ориентации связанных со спутником осей 1', 2', 3' относительно орбитальной системы координат (оси 1, 2, 3).

Тот факт, что стержень вращается вокруг своей продольной оси с произвольной угловой скоростью ω_0, становится понятным, если учесть, что вследствие $C = 0$ этому вращению не соответствует никакой составляющей кинетического момента.

Следует еще упомянуть о том, что в принципе такое вращение вокруг продольной оси стержня допустимо также в случаях II и III.

Установленные здесь на примере стержня результаты можно распространить и на другие тела простой формы, такие, как круговое кольцо, круговой диск, круговая цилиндрическая оболочка, круговой цилиндр (Гофер [61]).

Во всех случаях оказывается, что время одного оборота тела отличается от периода обращения материальной точки, удаленной на такое же расстояние R от притягивающего центра, что и центр масс тела. Если тело занимает положение с меньшей потенциальной энергией, чем энергия материальной точки, то и период его обращения будет меньше. Для стержня это имеет место в том случае, когда ось стержня направлена к центру притяжения, поскольку тогда ближняя к центру половина стержня притягивается сильнее, чем другая половина, так что точка приложения равнодействующей сил притяжения (центр тяжести) расположена ближе к притягивающему центру, чем центр масс M. Такая

ориентация стержня статически устойчива. Положения же равновесия [1]), при которых ось стержня перпендикулярна орбитальному радиусу-вектору R_i, напротив, статически неустойчивы. Этот результат будет получен как предельный случай при исследовании устойчивости в рамках приближенной теории, рассматриваемой в следующем пункте.

8.3.2. Приближенное исследование для случая малого спутника. К системе основных уравнений (8.29)—(8.31) можно применить различные способы приближенного решения. Один из способов состоит в том, что некоторый параметр системы предполагается малым, и решение ищут в виде ряда по степеням этого малого параметра. В качестве подходящего для такой роли параметра могут, например, использоваться следующие величины:

1) разность между главными моментами инерции для тел, эллипсоид инерции которых близок к сфере (Луна);

2) отношение Ω/ω угловой скорости Ω орбитального радиуса-вектора R_i к собственной угловой скорости ω спутника со значительным собственным вращением;

3) отношение L/R линейного размера малого спутника к расстоянию R до притягивающего центра.

Примеры использования двух первых величин для приближенного решения имеются у Лейманиса [7]. В практике наиболее важным является, несомненно, приближенное исследование случая малого спутника. Это исследование будет здесь проведено с тем, чтобы рассмотреть некоторые интересные для практики проблемы.

Следует особо подчеркнуть, что при предположении $L/R \ll 1$ происходит разделение орбитального и вращательного движений, если отбрасываются все члены второго и более высокого порядка малости. Чтобы доказать этот факт, рассмотрим интеграл, входящий в (8.29). Разложение в ряд подинтегрального выражения получается путем умножения (8.4) на $R_i^P = R_i + r_i$. При интегрировании по объему тела члены этого разложения, линейные относительно r_i, исчезнут, так как при совпадении начала отсчета с центром масс M имеем

$$\int r_i \, dm = ms_i = 0.$$

Остальные члены, кроме первого, не зависящего от r_i, будут малыми второго и более высокого порядков. В теории первого приближения мы ими пренебрегаем. То, что влияние размеров спутника имеет порядок $(L/R)^2$, можно, впрочем, усмотреть из выра-

[1]) Речь, разумеется, идет о положениях относительного равновесия. — *Прим. ред.*

жений (8.38) и (8.41), полученных для спутника, имеющего форму стержня, без пренебрежения какими-либо членами.

Вследствие разделения движений исследование вращательного движения можно произвести отдельно на основании теоремы о кинетическом моменте, записанной, например, в форме (8.9) при $s = 0$, с учетом кинематических уравнений (8.31). Проектируя на оси координат уравнение движения (8.9), получаем

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 &= \frac{3g}{R}(C - B)\,a_{32}a_{33}, \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 &= \frac{3g}{R}(A - C)\,a_{33}a_{31}, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 &= \frac{3g}{R}(B - A)\,a_{31}a_{32}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Отсюда нетрудно найти несколько частных решений для случая, когда центр масс M спутника движется по круговой орбите, т. е. когда постоянны величины R и g, а вместе с ними и угловая скорость $\Omega = \sqrt{g/R}$. Укажем следующие четыре частных решения уравнений (8.44).

1. Для шарового гироскопа ($A = B = C$) имеем $\omega_i = \omega_{i0} = \mathrm{const}$. Ориентация оси вращения произвольна.

2. Для симметричного гироскопа ($A = B$), который вращается с произвольной, но постоянной угловой скоростью ω_{30} вокруг оси 1 (рис. 8.2), совпадающей с осью симметрии, имеем (см. рис. 8.5)

$$\begin{aligned} \omega_i &= (0,\ 0,\ \omega_{30}), \\ a_{3i} &= [\sin(\omega_{30} - \Omega)t,\ \cos(\omega_{30} - \Omega)t,\ 0]. \end{aligned} \tag{8.45}$$

3. Для несимметричного гироскопа (A, B, C различны), главные оси инерции которого $1'$, $2'$, $3'$ совпадают с орбитальными осями координат 1, 2, 3, имеем

$$\begin{aligned} \omega_i &= (\Omega,\ 0,\ 0), \\ a_{3i} &= (0,\ 0,\ 1). \end{aligned} \tag{8.46}$$

Спутник при этом вращается вместе с орбитальным радиусом-вектором, относительно же системы координат 1, 2, 3 он находится в покое (состояние *относительного покоя*).

4. Несимметричный гироскоп, одна из главных осей инерции которого совпадает с осью 1, перпендикулярной к плоскости орбиты, может вращаться вокруг этой оси. Если, например, с осью 1 совпадает ось $1'$, т. е. плоскость $2'$-$3'$ совпадает с плоскостью 2-3, то имеем (угол φ показан на рис. 8.6)

$$\begin{aligned} \omega_i &= [\Omega + \dot{\varphi}(t),\ 0,\ 0], \\ a_{3i} &= (0,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi). \end{aligned} \tag{8.47}$$

Для угла $\varphi(t)$ из (8.44/1) получается следующее дифференциальное уравнение:

$$A\ddot{\varphi} - {}^3/_2\Omega^2 (C - B) \sin 2\varphi = 0. \tag{8.48}$$

Оно имеет тот же вид, что и уравнение плоских колебаний тяжелого маятника, и решение такого уравнения может быть выражено через эллиптические функции (см., например, [62]). При этом возможно как колебательное, так и вращательное движение. Из (8.48) следует, что при колебательном движении та из осей $2'$, $3'$, которой соответствует меньший главный момент инерции, колеблется относительно вертикали (ось 3), так как именно в этом случае уравнение (8.48) принимает форму уравнения колебаний $\ddot{\varphi} + \nu^2 \sin 2\varphi = 0$, где $\nu^2 > 0$.

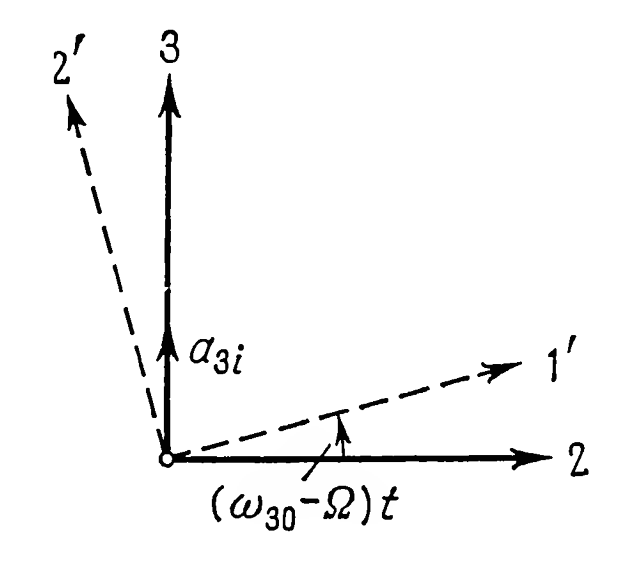


Рис. 8.5. Вращение связанных со спутником осей $1'$ и $2'$ в плоскости 2-3 для частного случая движения симметричного спутника.

Рис. 8.6. Расположение осей для частного случая движения несимметричного спутника.

Из указанных выше случаев практически наиболее важны три последних. Поэтому следует подробнее остановиться на исследовании устойчивости этих частных решений.

8.3.3. Симметричный спутник на круговой орбите. Рассмотрим возмущенные движения по отношению к движению, описываемому частным решением (8.45). Из (8.44/3) при $A = B$ следует, что и для возмущенных движений имеем $\omega_3 = \omega_{30} = \mathrm{const}$. Две другие компоненты угловой скорости ω_1 и ω_2 являются малыми величинами. Для них из (8.44) получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (A - C)\,\omega_{30}\omega_2 + 3\Omega^2 (A - C)\, a_{32}a_{33} &= 0, \\ A\dot{\omega}_2 + (A - C)\,\omega_{30}\omega_1 - 3\Omega^2 (A - C)\, a_{33}a_{31} &= 0. \end{aligned} \tag{8.49}$$

При исследуемых движениях ось симметрии тела (ось $3'$) остается вблизи оси 1, поэтому для описания ориентации тела целесообразно использовать угол Эйлера φ вместе с дополнительными

углами $\alpha = 90° - \vartheta$ и $\beta = 90° - \psi$ (см. рис. 8.7). Тогда координаты векторов ω_i и a_{3i} будут

$$\omega_i = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha}\cos\varphi - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\varphi + \Omega(\sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\sin\alpha\sin\varphi) \\ \dot{\alpha}\sin\varphi - \dot{\beta}\cos\alpha\cos\varphi - \Omega(\sin\beta\sin\varphi + \cos\beta\sin\alpha\cos\varphi) \\ \dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha + \Omega\cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}, \tag{8.50}$$

$$a_{3i} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\sin\varphi \\ \cos\alpha\cos\varphi \\ \sin\alpha \end{bmatrix}.$$

Для $\alpha, \beta \ll 1$ эти выражения можно упростить. Прежде всего, пренебрегая членами второго и более высокого порядка малости, получаем

$$\dot{\varphi} = \omega_{30} - \Omega = \text{const}. \tag{8.51}$$

Далее после подстановки (8.50) в (8.49) мы получим два дифференциальных уравнения для углов α и β, в которых каждый

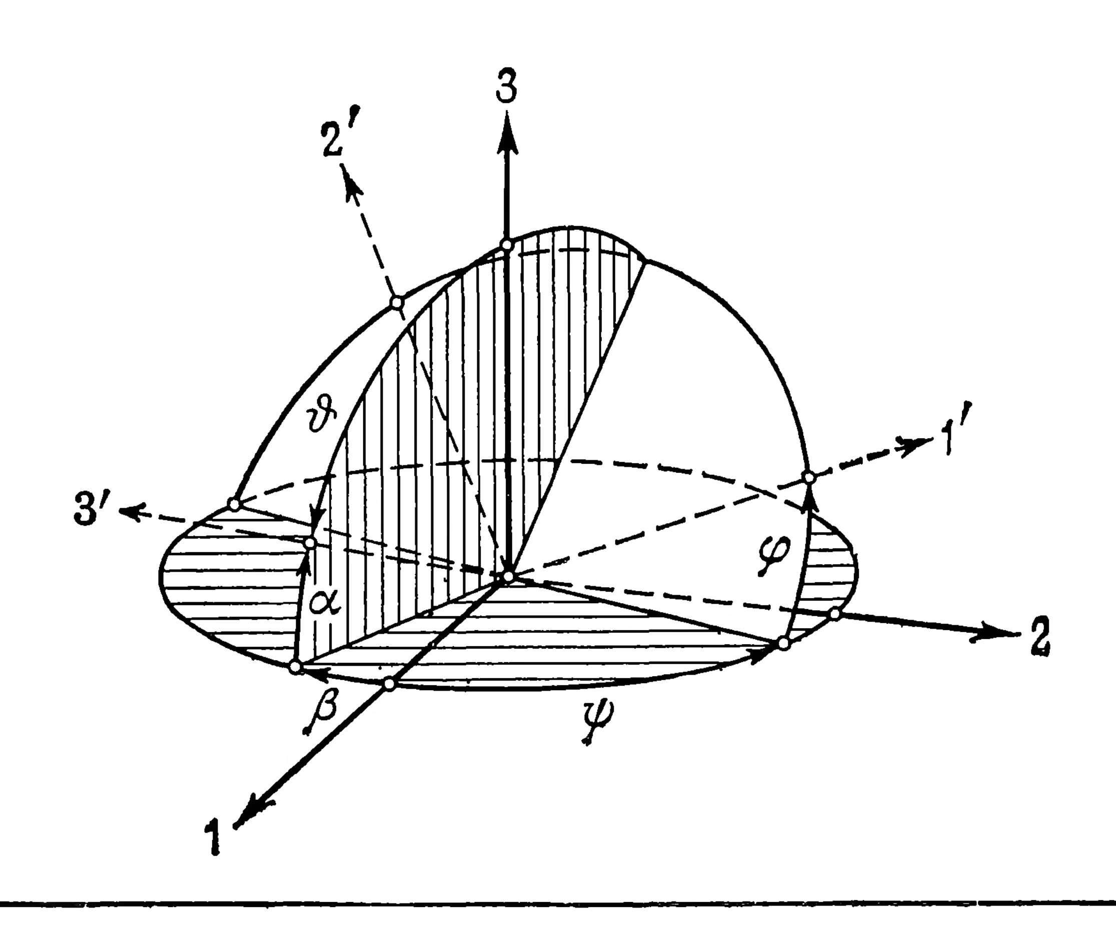


Рис. 8.7. Углы, определяющие ориентацию спутника.

член содержит множитель $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$. С помощью преобразования эти множители можно легко устранить, так что после линеаризации мы получаем для α и β два линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + \dot{\beta}(C\omega_{30} - 2A\Omega) + \alpha(C\omega_{30}\Omega + 3C\Omega^2 - 4A\Omega^2) = 0, \\ A\ddot{\beta} - \dot{\alpha}(C\omega_{30} - 2A\Omega) + \beta(C\omega_{30}\Omega - A\Omega^2) = 0, \end{aligned} \tag{8.52}$$

Характеристическим уравнением этой системы первого приближения будет

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2+(C\omega_{30}\Omega+3C\Omega^2-4A\Omega^2) & (C\omega_{30}-2A\Omega)\lambda \\ -(C\omega_{30}-2A\Omega)\lambda & A\lambda^2+(C\omega_{30}\Omega-A\Omega^2) \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^4+p\lambda^2+q=0,$$

где

$$\begin{aligned} p&=\Omega^2\left(\frac{3C}{A}-1\right)-\Omega\frac{2C\omega_{30}}{A}+\left(\frac{C\omega_{30}}{A}\right)^2, \\ q&=\Omega^4\left(4-\frac{3C}{A}\right)+\Omega^3\frac{C\omega_{30}}{A}\left(\frac{3C}{A}-5\right)+\Omega^2\left(\frac{C\omega_{30}}{A}\right)^2. \end{aligned} \tag{8.53}$$

Устойчивое движение возможно только при выполнении условий

$$p>0, \quad q>0, \quad D=p^2-4q>0.$$

На основании этих неравенств в плоскости, где прямоугольными координатами служат отношения ω_{30}/Ω и C/A, построены области устойчивости и неустойчивости (рис. 8.8). Отношение C/A может

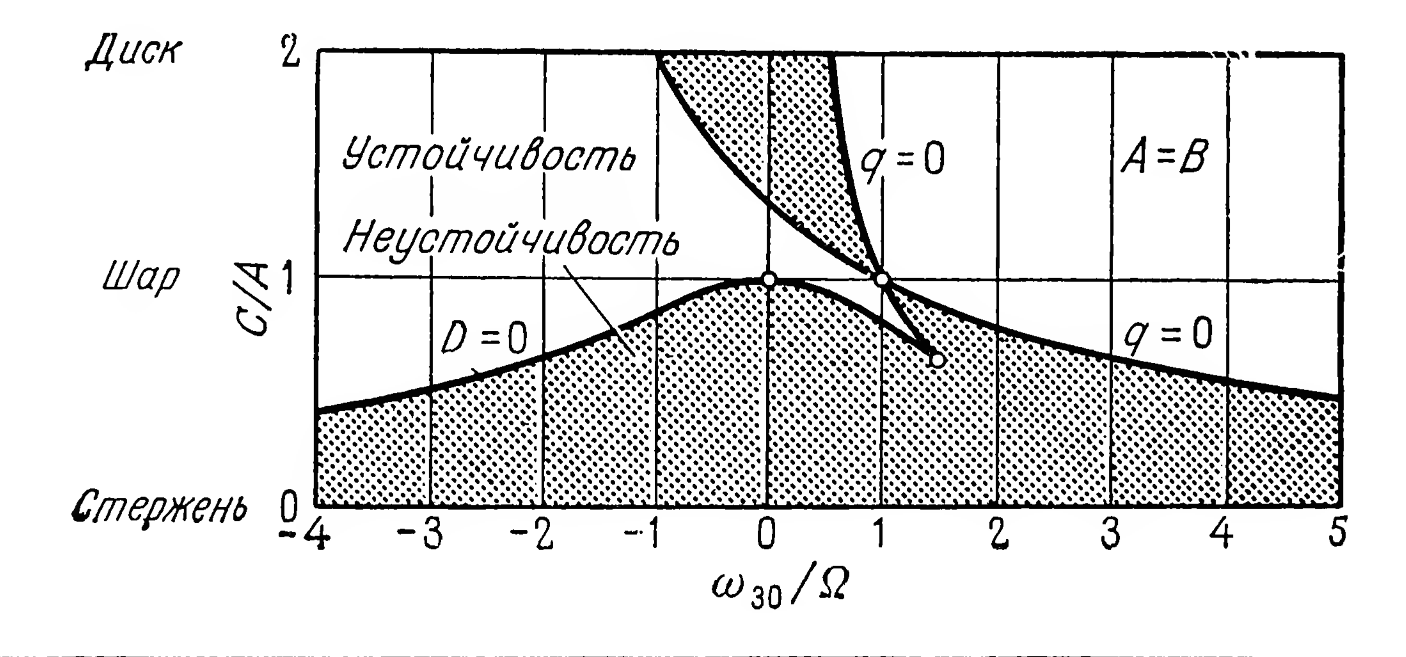


Рис. 8.8. Диаграмма устойчивости для симметричного спутника, движущегося по круговой орбите и вращающегося вокруг оси симметрии.

принимать лишь значения, принадлежащие интервалу $0\leqslant C/A\leqslant 2$; граничные значения 0 и 2 соответствуют спутникам, имеющим форму стержня и кругового диска, при $C/A=1$ эллипсоид инерции становится сферой (*шаровой спутник*). Если откладываемое по оси абсцисс отношение $\omega_{30}/\Omega=0$, то спутник движется поступательно вокруг притягивающего центра, а при $\omega_{30}/\Omega=1$ ориентация спутника относительно орбитальной системы координат остается неизменной.

Области устойчивости и неустойчивости в плоскости $(\omega_{30}/\Omega, C/A)$ на рис. 8.8 отделены одна от другой участками кривых $q=0$ и $D=0$ (первая кривая состоит из двух пересекающихся в точке (1, 1) гипербол). С помощью диаграммы устойчивости можно сделать следующие выводы.

1. Сплюснутые спутники при $|\omega_{30}/\Omega| > 1$ заведомо устойчивы.

2. Чем больше по абсолютной величине угловая скорость ω_{30} собственного вращения, тем при большей вытянутости спутников может быть достигнута их стабилизация. Даже спутники, почти совпадающие по форме со стержнем, можно сделать устойчивыми при достаточно быстром собственном вращении. (Этот вывод справедлив для твердых тел. Следует указать на то, что для деформируемых тел возможна передача энергии от вращения вокруг оси с наименьшим главным моментом инерции к вращению вокруг оси с наибольшим главным моментом. Вследствие этого спутник, вращающийся вокруг оси с наименьшим главным моментом инерции, может стать неустойчивым.)

3. Поступательно движущиеся спутники ($\omega_{30} = 0$) будут устойчивы только тогда, когда они слегка сплюснуты ($1 < C/A < 1{,}33$). Как стержень ($C = 0$), так и диск ($C/A = 2$) будут в этом случае неустойчивы.

4. Спутники, ориентация которых по отношению к центру неизменна ($\omega_{30} = \Omega$), будут устойчивы, если они сплюснуты ($2 > C/A > 1$) или немного вытянуты ($1 > C/A > 0{,}855$).

Особо подчеркнем, что все указанные здесь эффекты являются следствием воздействия моментов, связанных с градиентом силы притяжения. В однородном поле тяготения вращение тела вокруг оси симметрии всегда устойчиво.

8.3.4. Спутник произвольной формы на круговой орбите. В случае, когда среди главных моментов инерции A, B, C нет равных, для исследования устойчивости рассмотрим возмущенные движения, близкие к движениям, описываемым частными решениями (8.46) и (8.47). Состояние относительного покоя, описываемое частным решением (8.46), представляет особый интерес для практических применений спутников, так как неизменная по отношению к орбите ориентация спутника часто бывает желательной или даже необходимой (метеорологические спутники и спутники связи). При движении, соответствующем решению (8.47), неизменным остается только направление одной из главных осей инерции, которая перпендикулярна к плоскости орбиты и вокруг которой вращается тело, так что в этом случае можно говорить о гироскопической стабилизации спутника.

а) Устойчивость состояния относительного покоя. Чтобы можно было использовать введенные в п. 8.3.3 обозначения, будем считать, что ориентация связанных со спутником осей $1'$, $2'$, $3'$ совпадает с изображенной на рис. 8.7; при $\alpha = \beta = \varphi = 0$ имеем $1', 2', 3' \equiv 2, 3, 1$ (рис. 8.4), так что вместо частного решения (8.46) следует записать

$$\begin{aligned} \omega_i &= (0,\ 0,\ \Omega), \\ a_{3i} &= (0,\ 1,\ 0). \end{aligned} \tag{8.54}$$

Для возмущенного движения величины α, β, φ, ω_1 и ω_2 предполагаются малыми. Из (8.50) тогда следует

$$\omega_i \approx \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} + \Omega\beta \\ -\dot{\beta} - \Omega\alpha \\ \Omega \end{bmatrix}, \quad a_{3i} \approx \begin{bmatrix} \varphi \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{8.55}$$

Подставив эти выражения в (8.44/3), мы получим уравнение для угла φ, соответствующее выведенному выше уравнению (8.48):

$$C\ddot{\varphi} + 3\Omega^2 (A - B)\varphi = 0. \tag{8.56}$$

Из этого уравнения, решение которого $\varphi(t)$ может быть легко найдено, непосредственно следует, что для устойчивого движения необходимо выполнение условия $A > B$. Из (8.44/1) и (8.44/2) получаем, используя (8.55), систему уравнений для α и β:

$$\begin{aligned} &A\ddot{\alpha} - \dot{\beta}\Omega(A + B - C) + \alpha 4\Omega^2 (C - B) = 0, \\ &B\ddot{\beta} + \dot{\alpha}\Omega(A + B - C) + \beta\Omega^2 (C - A) = 0. \end{aligned} \tag{8.57}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + 4\Omega^2 (C - B) & -\lambda\Omega(A + B - C) \\ \lambda\Omega(A + C - B) & B\lambda^2 + \Omega^2 (C - A) \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)^4 + p\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)^2 + q = 0,$$

где

$$\begin{aligned} p &= 2 - 3\frac{B}{A} + 2\frac{C}{A} - \frac{C}{B} + \frac{C^2}{AB}, \\ q &= \left(\frac{C}{A} - 1\right)\left(\frac{C}{B} - 1\right). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Коэффициенты p, q и вместе с ними дискриминант $D = p^2 - 4q$ зависят только от отношений моментов инерции, поэтому области устойчивости и неустойчивости можно представить в виде частей треугольника формы (см. п. 1.3.6), как это изображено на рис. 8.9. Вершины треугольника для рассматриваемой здесь ориентации спутника ($1'$, $2'$, $3' \equiv 2$, 3, 1) соответствуют случаям стержня, направленного по касательной к орбите ($A = 0$), вдоль вертикали ($B = 0$) и перпендикулярно плоскости орбиты ($C = 0$). На основании диаграммы устойчивости можно прийти к следующим выводам.

1. При $A < B$ (верхняя половина треугольника) устойчивость невозможна. Поэтому при стремлении достичь устойчивости одну из двух лежащих в плоскости орбиты главных осей инерции, а именно ту, которой соответствует меньший момент инерции, сле-

дует направить к центру притяжения (пассивная стабилизация с помощью силы притяжения).

2. В случае устойчивого движения момент инерции C, соответствующий главной оси, перпендикулярной плоскости орбиты, не должен быть средним по величине главным моментом инерции.

3. Ориентация спутника будет устойчивой, если $C > A > B$ (левый нижний частичный треугольник). Вершины этого треугольника соответствуют следующим телам: тело, эллипсоид инерции которого является сферой, стержень, ось которого направлена

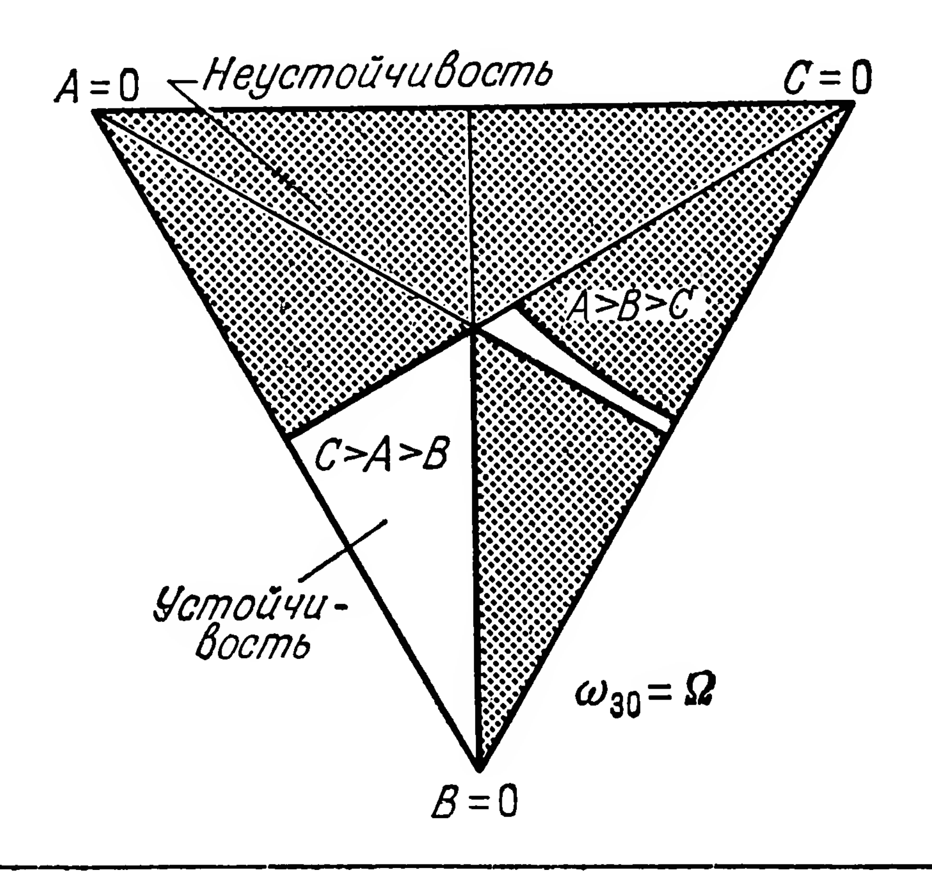


Рис. 8.9. Диаграмма устойчивости для несимметричного спутника, ориентированного на Землю (положение относительного равновесия).

к притягивающему центру, и симметричный диск, лежащий в плоскости орбиты. Точка, соответствующая естественному спутнику Земли — Луне, лежит в этом частичном треугольнике близко к центру всего треугольника.

4. В частичном треугольнике $A > B > C$ устойчивость *может* иметь место, если отклонение формы спутника от симметричного относительно оси $1'(B = C)$ сплющенного $(A > C)$ тела не слишком велико. Во всем частичном треугольнике $A > B > C$ имеет место *статическая* неустойчивость, так как момент, вызываемый градиентом сил тяготения, стремится вывести спутник с такими моментами инерции из его положения относительного равновесия.

Однако для спутников, соответствующих узкой полосе, принадлежащей на рис. 8.9 области устойчивости, незначительный гироскопический момент, создаваемый движением спутника по орбите, оказывается достаточным для компенсации момента сил притяжения. Здесь можно усмотреть некоторую аналогию с волчком, который, будучи статически неустойчивым, тем не менее благодаря

гироскопической стабилизации может некоторое время вертеться, стоя на острие.

Эту аналогию можно продолжить и дальше: как волчок вследствие потери энергии, вызываемой трением, в конце концов опрокидывается, так и спутник, изображающая точка которого находится в устойчивой узкой полосе, должен будет потерять устойчивость и поэтому практически не используется, ибо неизбежна диссипация энергии, вызываемая, например, деформацией, качающимися антеннами или перетекающей внутри жидкостью (см. также теорему 11 в п. 5.2.2).

5. На медиане, исходящей из вершины $C=0$ треугольника, можно снова продемонстрировать все свойства симметричного спутника при $\omega_{30}=\Omega$, найденные в п. 8.3.3 (рис. 8.8). Следует отметить, что полученные там случаи устойчивости изображаются точками, лежащими на границе области устойчивости. Более подробный анализ показывает, что в этих граничных случаях ориентация обеих главных осей инерции, лежащих в плоскости орбиты, становится неопределенной. Спутник может поворачиваться вокруг оси симметрии, перпендикулярной плоскости орбиты, сохраняя неизменным ее направление.

b) Устойчивость вращающегося спутника произвольной формы. Кинематические соотношения для возмущенных движений, близких к плоскому движению (8.47) спутника, можно получить из (8.50) циклической перестановкой координат: заменой осей 1, 2, 3 на 3, 1, 2. Предположим, кроме того, что $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$; тогда

$$\omega_i \approx \begin{bmatrix} \dot\varphi+\Omega \\ -\dot\alpha\cos\varphi-\dot\beta\sin\varphi+\Omega(\beta\cos\varphi-\alpha\sin\varphi) \\ \dot\alpha\sin\varphi-\dot\beta\cos\varphi-\Omega(\beta\sin\varphi+\alpha\cos\varphi) \end{bmatrix}, \qquad a_{3i}\approx\begin{bmatrix}\alpha\\ \sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}. \tag{8.59}$$

Подставив эти выражения в (8.44/1), придем снова к уравнению (8.48) для угла φ. Следовательно, в первом приближении движение по углу φ — колебания или вращение спутника относительно перпендикулярной к плоскости орбиты главной оси — независимо от движения самой этой оси (от углов α и β). В рассматриваемом случае нас интересует монотонно возрастающее решение $\varphi(t)$ уравнения (8.48), соответствующее вращательному движению спутника; его можно получить при начальных условиях

$$\varphi(0)=\pi/4, \qquad \dot\varphi^2(0)>{}^3/_2\Omega^2|B-C|/A,$$

т. е. когда начальная угловая скорость достаточно велика.

Не вдаваясь в детали вычислений, мы наметим здесь лишь путь решения и укажем результаты; более подробное изложение см., например, в работе [62].

После подстановки $\varphi = \varphi(t)$ и выражений (8.59) в (8.44/1, 2) получаются два дифференциальных уравнения, члены которых содержат множители $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$. Как и в случае симметричного спутника, эти уравнения можно преобразовать. Однако если для симметричного спутника мы пришли к уравнениям с постоянными коэффициентами, то коэффициенты уравнений для спутника произвольной формы будут периодическими: в них войдут $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$. Границы областей устойчивости для этих уравнений можно найти на основании теории Флоке, для чего потребуется найти с помощью вычислительных машин несколько частных решений.

Результаты вычислений представлены в виде треугольников формы на рис. 8.10 и 8.11. Параметром здесь служит величина

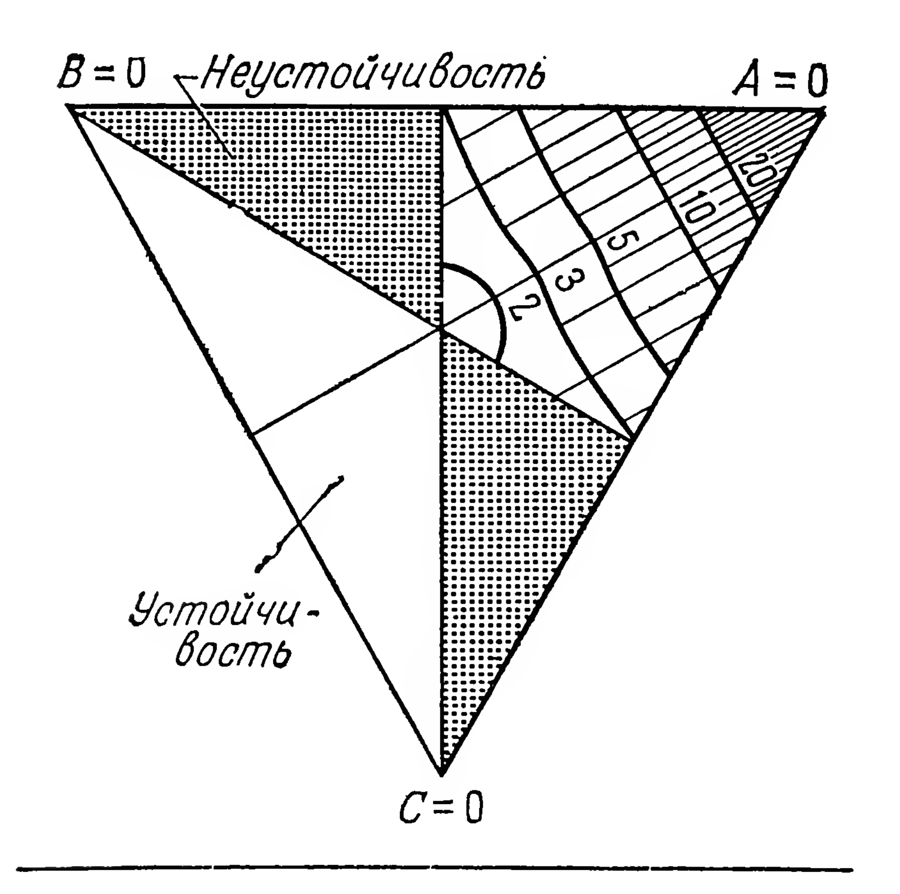


Рис. 8.10. Диаграмма устойчивости для несимметричного спутника на круговой орбите при различных положительных значениях относительной угловой скорости собственного вращения $k = (\omega_1/\Omega)_m$.

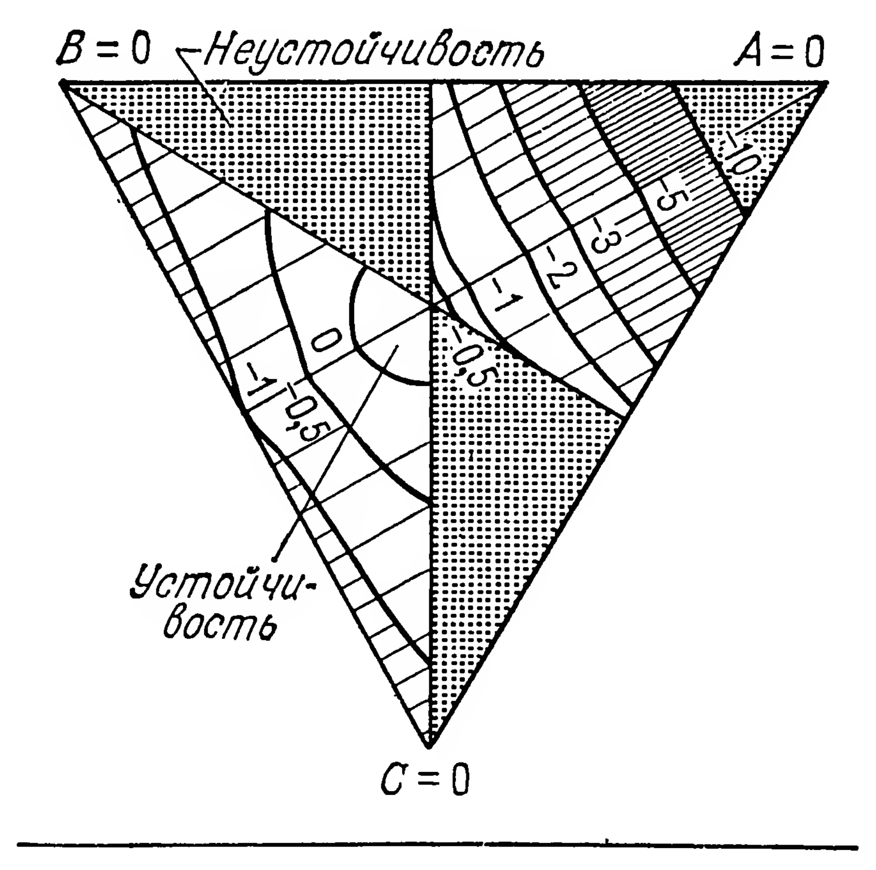


Рис. 8.11. Диаграмма устойчивости для несимметричного спутника на круговой орбите при различных отрицательных значениях относительной угловой скорости собственного вращения $k = (\omega_1/\Omega)_m$.

$k = (\omega_1/\Omega)_m$ — осредненное за время полного оборота спутника отношение угловых скоростей. Операция осреднения используется потому, что угловая скорость $\omega_1 \approx \dot\varphi + \Omega$ уже не является постоянной. При $k = 0$ получаем поступательное движение спутника, при $k = 1$ — уже рассмотренный в п. *а*) случай относительного покоя. Положительные значения k означают, что вращение происходит в направлении орбитального движения ($\omega_i \upuparrows \Omega_i$); при $k < 0$ вращение противоположно орбитальному движению. Обе диаграммы симметричны относительно биссектрисы, исходящей из вершины

$A = 0$. Это объясняется тем, что вследствие вращения моменты инерции B и C являются равноправными и их можно поменять местами, не изменив физических свойств системы. Но перемена местами B и C означает зеркальное отражение треугольников формы относительно названной биссектрисы.

На основании рис. 8.10 и 8.11 можно сделать следующие выводы.

1. При $k > 2$ вращение спутника вокруг оси, которой соответствует наибольший главный момент инерции A, устойчиво.

2. Вращение вокруг оси со средним главным моментом инерции заведомо неустойчиво.

3. Вращение вокруг оси с наименьшим главным моментом инерции может быть стабилизировано при $k > 2$ (рис. 8.10) или $k < 0$ (рис. 8.11) только тогда, когда угловая скорость собственного вращения достаточно велика. Граница области устойчивости при возрастании угловой скорости собственного вращения сдвигается к вершине $A = 0$ треугольника формы (этой вершине соответствует спутник-стержень, перпендикулярный плоскости орбиты).

4. При поступательном движении ($k = 0$, рис. 8.11) существует лишь небольшая область устойчивости для немного сплюснутого тела ($A > B$, C). Несимметрия спутника в этом случае также не очень велика. Случай поступательного движения представляет интерес для приложений, если учесть, что на вращающихся вокруг Земли астрономических обсерваториях, которые появятся в будущем, желательно иметь фиксированное в пространстве направление.

5. Область устойчивости для сплюснутого спутника ($A > B$, C) намного увеличивается даже при незначительном собственном вращении в направлении, противоположном орбитальному движению ($k < 0$). Уже при $k < -1{,}5$ область устойчивости заполняет весь частичный треугольник, в котором $A > B$, C.

Медиана, проходящая через вершину $A = 0$, соответствует симметричному спутнику, у которого $B = C$. Отношения C/A в точках, в которых эта медиана пересекается с границей области устойчивости при различных значениях параметра, определяемого собственным вращением, совпадают с соответствующими значениями на рис. 8.8.

На диаграммах 8.10 и 8.11 отсутствуют значения параметра из интервала $0 < k < 2$, для которых требуется более детальное исследование, так как здесь могут иметь место эффекты синхронизации. В зависимости от величины начальной угловой скорости мы можем получить либо вращение, либо колебания около положения относительного равновесия, для которого $k = 1$.

Исследования (см. [62]) показывают, что область синхронизации довольно мала. Поэтому возмущения, действующие на спутник с пассивной ориентацией на Землю, должны оставаться в сравнительно узких пределах.

8.3.5. Влияние возмущений. Результаты, о которых шла речь в предыдущих пунктах, справедливы при следующих ограничениях: *абсолютно твердое* тело совершает *малые колебания*, его центр масс движется по *круговой орбите* вокруг центра притяжения в идеальном *центрально-симметричном* поле тяготения. Дополнительными возмущающими моментами мы пренебрегли. Если эти предположения не выполняются, то результаты заведомо меняются количественно, а отчасти, возможно, и качественно. О некоторых нарушениях введенных ограничений мы упомянем здесь вкратце (подробное изложение читатель может найти в работах по теории спутников).

a) Спутник *не является абсолютно твердым*, если происходят его деформации, имеются подвижные части или спутник содержит жидкость. Деформироваться могут даже при очень медленных движениях спутника те его части, которые имеют большую длину, например консоли или антенны. Отчасти эти деформации вызываются неравномерным нагревом от теплового излучения. Деформации всегда ведут к рассеянию энергии, что влияет на устойчивость. Подвижные части на спутниках могут служить для того, чтобы оказать желаемое влияние на вращательное движение, т. е. осуществить управление положением или демпфирование вибраций (нутаций). Демпфирование может быть достигнуто также с помощью надлежаще подобранных заполненных жидкостью кольцевых труб. В принципе даже возможно стабилизировать неустойчивый абсолютно твердый спутник, поместив на нем емкости нужной формы и заполнив их жидкостью.

b) *Отклонения от центрально-симметричного поля тяготения* возникают, если принимаются во внимание другие небесные тела (Солнце и Луна) или сплюснутость Земли. Такое же действие оказывает неоднородное распределение массы в центральном теле (Земле).

c) *Влияние нелинейных членов* в дифференциальных уравнениях должно учитываться тогда, когда происходящее движение приводит к значительным приращениям координат; об этом влиянии мы уже упоминали в п. 8.3.4*a*.

d) Задача о движении спутника является в действительности задачей двух тел. Из решения указанной задачи следует, что центры масс обоих тел совершают кеплеровское движение по эллипсам, отношение диаметров которых равно обратному отношению масс тел. Таким образом, *центр масс основного тела не остается неподвижным*, но для земных спутников этот эффект столь незначителен, что его можно полностью отбросить.

e) *Дополнительные возмущающие моменты*, которые вместе с моментом сил притяжения влияют на вращательное движение спутников, могут возникать, например, вследствие сопротивления атмосферы, магнитных или электростатических влияний, а также светового давления солнечных лучей.

f) В случае *эллиптической орбиты* движение центра масс M описывается законами Кеплера

$$R = \frac{P}{1 + e\cos\tau},$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{\gamma m_E}{P^3}}\,(1 + e\cos\tau)^2. \tag{8.60}$$

Показанный на рис. 8.12 угол τ, который называют *истинной аномалией*, целесообразно использовать как независимую переменную. Величина P является параметром орбиты, e — ее эксцентриситетом. Оси 1 и 3 связанной с орбитой системы координат 1, 2, 3

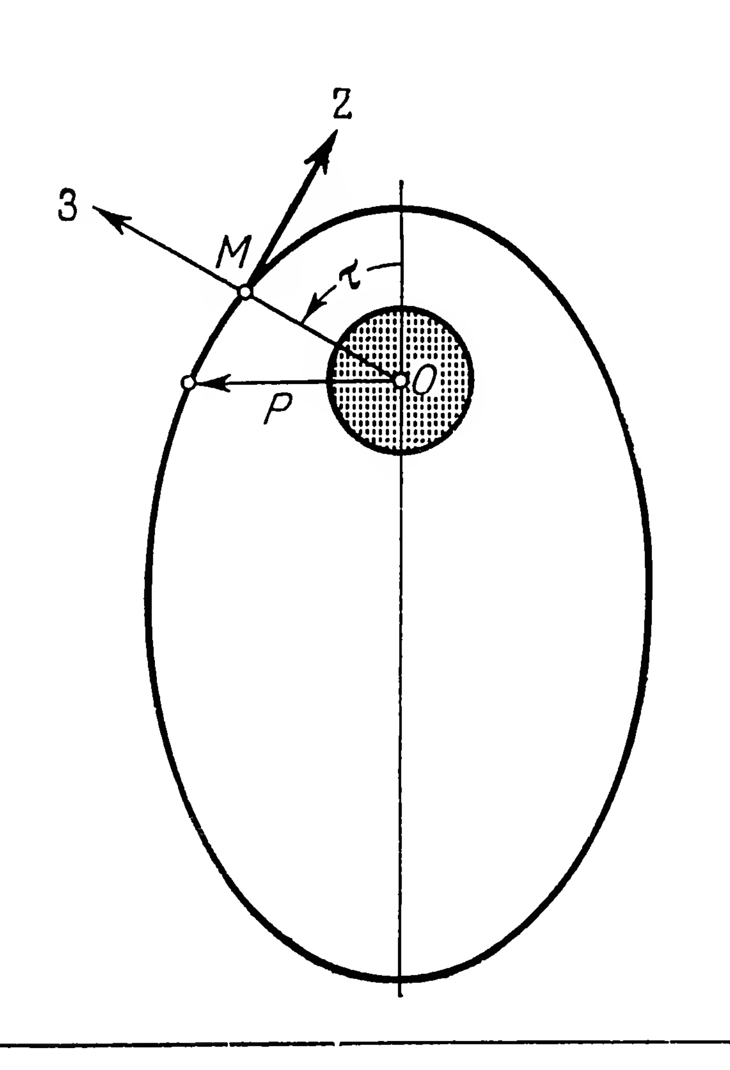


Рис. 8.12. Спутник на эллиптической орбите и орбитальная система координат 1, 2, 3.

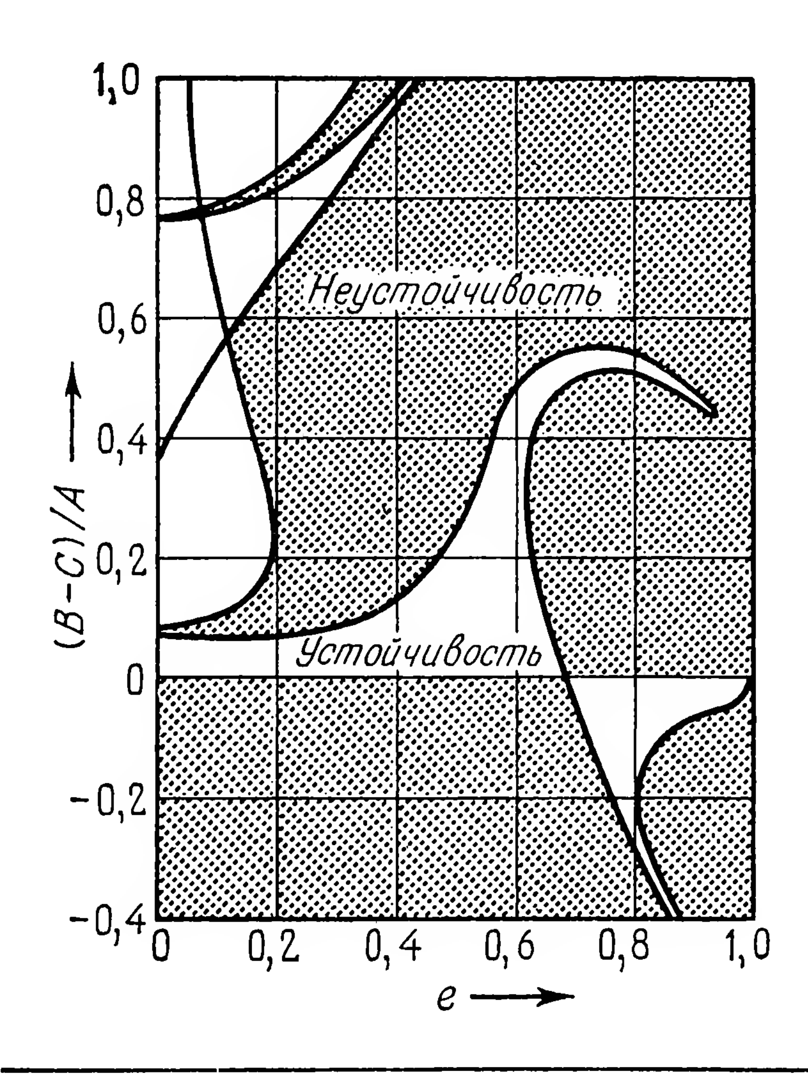


Рис. 8.13. Диаграмма устойчивости для несимметричного спутника при различных значениях эксцентриситета e орбиты.

сохраняют указанное на рис. 8.2 направление, однако ось 2 уже не будет направлена по касательной к орбите.

Нетрудно установить, что вследствие неравномерного вращения орбитального радиуса-вектора не существует частного решения уравнений движения (8.44), соответствующего состоянию относительного покоя по отношению к системе отсчета 1, 2, 3. Но зато можно указать частное решение, обобщающее ранее найденное решение (8.47). Действительно, при

$$\omega_i = (\dot\tau + \dot\varphi,\ 0,\ 0),$$
$$a_{3i} = (0,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi) \tag{8.61}$$

уравнения (8.44/2) и (8.44/3) обращаются в тождества, а из (8.44/1) получаем вместо (8.48) следующее дифференциальное уравнение:

$$A\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2R}(B - C)\sin 2\varphi = -A\ddot{\tau}. \qquad (8.62)$$

Используя (8.60), переходим в этом уравнении к новому аргументу — истинной аномалии τ (производную по τ обозначим штрихом). Тогда (8.62) принимает вид дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами

$$A(1 + e\cos\tau)\varphi'' - 2Ae\sin\tau\varphi' + {}^3/_2(B - C)\sin 2\varphi = 2Ae\sin\tau, \qquad (8.63)$$

неоднородного при $e \neq 0$. Наряду с вынужденными колебаниями, обусловленными неравномерностью вращения орбитального радиуса-вектора R_i, могут возникнуть также колебания вследствие переменности коэффициентов (параметрический резонанс). На рис. 8.13 воспроизведена диаграмма устойчивости, полученная для таких колебаний Златоустовым и др. в работе [63]. Из нее, в частности, следует, что положение *относительного равновесия*, устойчивое при $e = 0$ и $B > C$, становится неустойчивым при возрастании эксцентриситета орбиты. С другой стороны, на сильно вытянутой эллиптической орбите ($e \approx 0{,}8$) спутник может совершать устойчивые плоские колебания даже при $C > B$.

Вынужденные непараметрические колебания можно полностью погасить с помощью маховиков или других перемещаемых масс, так что и на эллиптической орбите достижимо такое относительное положение равновесия, при котором ось спутника направлена к притягивающему центру. Шиленом [64] были предложены и исследованы соответствующие алгоритмы и органы управления.

Глава 9

Гироскопические эффекты у роторов

Проявление гироскопических эффектов в различных машинах и механизмах весьма многообразно. Гироскопические эффекты возникают каждый раз, когда вращающееся тело вынуждено менять ориентацию оси своего вращения в пространстве. Например, это происходит при криволинейном движении любого колесного экипажа, при вираже самолета с воздушным винтом, при изменении курса корабля, имеющего двигательную установку. Даже в тех случаях, когда подшипники вала ротора размещены на неподвижном основании, гироскопические эффекты могут приобрести существенное значение, если вал обладает некоторой упругостью. В этом случае могут возникнуть специфические колебания, связанные не только с поступательными, но и с угловыми перемещениями ротора.

Если гироскопические моменты, развиваемые ротором, не оказывают существенного влияния на движение самого объекта, то эти моменты можно вычислить, руководствуясь соображениями, высказанными в § 3.1 для случая вынужденного движения гироскопа. Выведенные там формулы для гироскопического момента M_i^K, передаваемого на подшипники оси гироскопа или вращающейся детали, в частности весьма общие соотношения (3.7), могут быть использованы непосредственно. В § 3.1 это было показано на примерах периметрического гироскопа и дробильной мельницы.

Ниже рассматриваются еще два случая проявления гироскопических эффектов: взаимное влияние вращений вокруг различных осей у колесных экипажей и самолетов и влияние гироскопических эффектов на критические угловые скорости роторов. Эти важные для техники явления иллюстрируются характерными примерами.

9.1. Взаимосвязь вращений у самолетов и колесных экипажей

Будем считать, что на всех рассматриваемых здесь объектах имеются вращающиеся части, будь то валы двигателей, шестерни или колеса. Примем, что все они симметричны относительно своих

осей вращения, а сами оси совпадают с главными осями инерции объекта. Предполагая постоянной относительную скорость вращения всех роторов, движение объекта можно рассчитать по уравнениям, выведенным для гиростата в § 4.1. Если, например, в уравнениях (4.26) заменить моменты силы тяжести моментами общего вида, то получим

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 + \omega_2 H_3^z - \omega_3 H_2^z &= M_1, \\ B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 + \omega_3 H_1^z - \omega_1 H_3^z &= M_2, \\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 + \omega_1 H_2^z - \omega_2 H_1^z &= M_3. \end{aligned} \qquad (9.1)$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции объекта с учетом роторов, ω_i — вектор угловой скорости объекта и H_i^z — суммарный вектор кинетических моментов всех роторов при их вращении относительно объекта. Для определения движения необходимо иметь выражения моментов. В большинстве случаев они зависят от траектории объекта, поэтому к системе (9.1) надо добавить еще три уравнения, вытекающие из закона импульса, и учесть кинематические соотношения. Однако, не затрачивая усилий на весьма трудоемкое общее решение, можно уже из уравнений (9.1) сделать важные выводы относительно свойств вращательных движений объекта.

Не останавливаясь на возможной взаимосвязи, обусловленной действием моментов, стоящих в правых частях, по уравнениям (9.1) можно установить наличие двух видов гироскопической взаимосвязи угловых движений объекта.

1. Из-за наличия собственного кинетического момента ротора всегда существует взаимное влияние вращений объекта вокруг двух осей, перпендикулярных оси ротора. Если, например, ось ротора направлена по оси 1, то вращения объекта вокруг осей 2 и 3 взаимосвязаны.

2. Независимо от действия имеющихся роторов взаимосвязь вращений имеет место всегда, когда главные моменты инерции объекта A, B и C различны и вектор угловой скорости ω_i не совпадает ни с одной из главных осей инерции. Так, например, при $A \neq B$ относительно оси 3 действует гироскопический момент, равный по величине $(A - B)\,\omega_1\omega_2$, и, таким образом, вращение вокруг осей 1 и 2 влияет на вращение вокруг оси 3.

Однако в большинстве случаев моменты такого вида оказывают очень небольшое влияние на движение, и часто ими можно вообще пренебречь. Прежде всего это относится к случаю малых угловых скоростей объекта, когда в рамках первого приближения члены второго порядка малости могут быть отброшены.

Если ввести связанную с самолетом систему координат 1^F, 2^F, 3^F (рис. 9.1) и углы поворотов φ, ϑ, ψ (подробно они будут

определены в § 12.1), то в предположении малости этих углов можно принять

$$\omega_1 \approx \dot{\varphi}, \quad \omega_2 \approx \dot{\vartheta}, \quad \omega_3 \approx \dot{\psi}. \tag{9.2}$$

Соответствующие повороты самолета называются креном, тангажом и рысканием. Учитывая (9.2) и пренебрегая членами второго порядка малости, преобразуем уравнения (9.1) к виду

$$\begin{aligned} A\ddot{\varphi} + H_3^Z\dot{\vartheta} - H_2^Z\dot{\psi} &= M_1, \\ B\ddot{\vartheta} + H_1^Z\dot{\psi} - H_3^Z\dot{\varphi} &= M_2, \\ C\ddot{\psi} + H_2^Z\dot{\varphi} - H_1^Z\dot{\vartheta} &= M_3. \end{aligned} \tag{9.3}$$

С помощью этих уравнений проведем качественный анализ конкретных примеров.

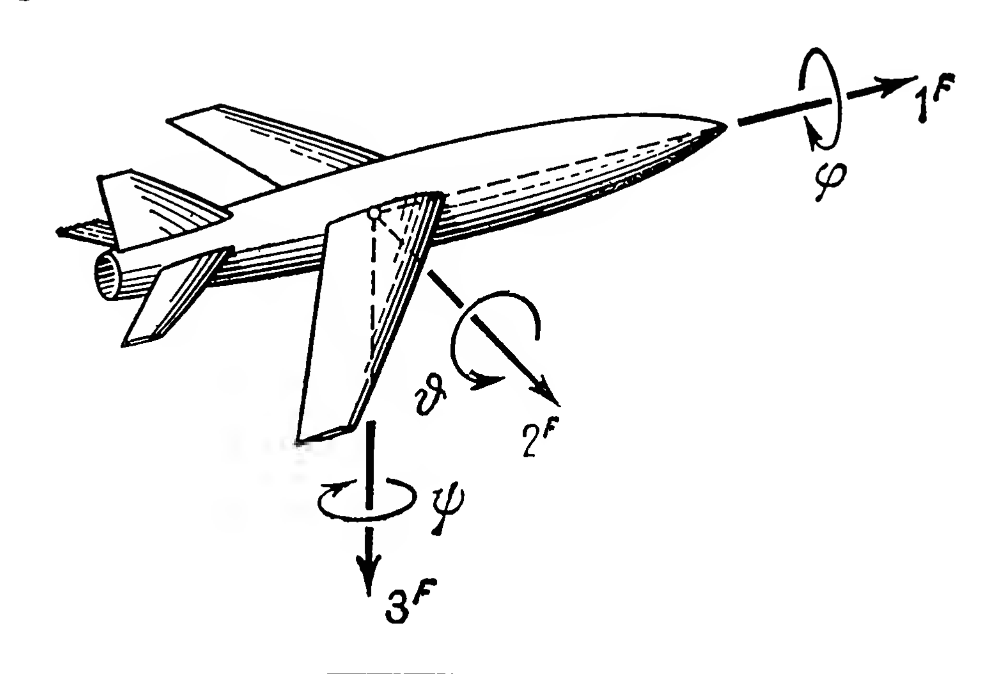


Рис. 9.1. Связанная с самолетом система координат и углы φ, ϑ, ψ.

1. У самолета винт вместе с его валом можно считать симметричным ротором (по крайней мере при трехлопастном винте). Ось винта лежит в направлении 1^F, так что $H_1^Z = H \neq 0$, $H_2^Z = H_3^Z = 0$. Отсюда следует, что взаимосвязанными должны быть движения по рысканию и тангажу. При правом вращении винта (если смотреть в направлении полета) гироскопический момент $M_2^K = -H\dot{\psi}$ приподнимает нос самолета на левом вираже и опускает его на правом. Соответствующее этому движение по тангажу посредством момента $M_3^K = H\dot{\vartheta}$ оказывает обратное воздействие на рыскание, вызывая его притормаживание. В случае несимметричного двухлопастного винта возникающие гироскопические моменты имеют периодическую модуляцию, как было отмечено в п. 3.1.3. Если самолет имеет две одинаковые винтомоторные группы с противоположным направлением вращения, то гироскопические эффекты внешне не проявляются; однако они вызывают динамические напряжения в элементах конструкции самолета.

2. У колесных экипажей, электровозов с поперечным расположением моторов и у колесных пароходов оси вращения колесных пар или роторов лежат в направлении 2, перпендикулярном направлению движения, так что $H_2^Z = H \neq 0$, $H_1^Z = H_3^Z = 0$, поэтому взаимосвязаны друг с другом крен и рыскание. Гироскопический момент $M_1^K = H\dot{\psi}$, возникающий при криволинейном движении, всегда направлен так, что колеса, расположенные на внешней стороне дуги кривой, нагружаются сильнее. При въезде автомашины на виражный участок полотна дороги с приподнятой внешней стороной повороту помогает гироскопический момент $M_3^K = -H\dot{\varphi}$, обусловленный изменением крена ($\dot{\varphi} \neq 0$). При выходе с виражного участка соответствующий момент действует в противоположную сторону и способствует выводу машины на прямолинейное движение. Точно так же объясняется и другой эффект: при наезде на препятствие, например, левыми колесами возникающий гироскопический момент $M_3^K = -H\dot{\varphi}$ стремится повернуть автомобиль вправо и сразу вернуть обратно.

3. У гиробуса ось маховика, аккумулирующего энергию, вертикальна, т. е. лежит в направлении 3, так что $H_3^Z = H \neq 0$ $H_1^Z = H_2^Z = 0$. В этом случае взаимосвязаны движения по крену и тангажу. Колебания по углу тангажа на волнистом участке дороги вызывают колебания по углу крена.

Исследуем несколько подробнее действие гироскопических моментов на примере колесного парохода. Для моментов, стоящих в правых частях уравнений (9.3), примем упрощенные, но вполне допустимые в рамках первого приближения выражения

$$\begin{aligned} M_1 &= -c_1\varphi - d_1\dot{\varphi}, \\ M_2 &= -c_2\vartheta - d_2\dot{\vartheta}, \\ M_3 &= \qquad\quad - d_3\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Коэффициенты d_1, d_2, d_3 отражают вязкое сопротивление воды, а коэффициенты c_1 и c_2 характеризуют метацентрические высоты судна по крену и тангажу (углам бортовой и килевой качки). Подстановка выражений (9.4) в уравнения (9.3) с учетом того, что $H_2^Z = H$, $H_1^Z = H_3^Z = 0$, дает систему уравнений

$$\begin{aligned} A\ddot{\varphi} + d_1\dot{\varphi} + c_1\varphi - H\dot{\psi} &= 0, \\ B\ddot{\vartheta} + d_2\dot{\vartheta} + c_2\vartheta \qquad &= 0, \\ C\ddot{\psi} + d_3\dot{\psi} \qquad + H\dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Отсюда прежде всего видно, что в рамках принятых упрощений килевая качка не зависит от рыскания и бортовой качки. Для взаимосвязанных движений бортовой качки и рыскания имеет место

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + d_1\lambda + c_1 & -H\lambda \\ H\lambda & C\lambda^2 + d_3\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda[\lambda^3 AC + \lambda^2 (Ad_3 + Cd_1) + \lambda (H^2 + d_1 d_3 + c_1 C) + c_1 d_3] = 0. \quad (9.6)$$

Корень $\lambda = 0$ соответствует безразличному положению равновесия по курсу. Остальные три корня (ввиду того, что все $d > 0$) имеют отрицательные действительные части, если выполнены условия

$$c_1 > 0,$$
$$(Ad_3 + Cd_1)(H^2 + d_1 d_3 + c_1 C) > c_1 d_3 AC. \quad (9.7)$$

Из этих условий следует, что в рассматриваемом случае кинетический момент H оказывает стабилизирующее воздействие. Однако даже большим кинетическим моментом нельзя скомпенсировать статическую неустойчивость по крену (в случае $c_1 < 0$).

Влияние кинетического момента можно пояснить следующим упрощенным рассуждением. При $H = 0$ система (9.5) распадается на три независимых уравнения, согласно которым движение по крену имеет вид слабо затухающих колебаний с частотой

$$\omega^2_{\text{кр}} \approx c_1/A;$$

движение по углу курса (рыскание) имеет апериодический характер с постоянной времени

$$T_{\text{рыс}} = C/d_3.$$

При большом H и малом демпфировании из уравнений (9.6) можно получить соответствующие приближенные значения

$$\omega^2_{\text{кр}} \approx \frac{H^2 + c_1 C}{AC}, \quad T_{\text{рыс}} \approx \frac{H^2 + c_1 C}{c_1 d_3}, \quad (9.8)$$

откуда следует, что наличие кинетического момента увеличивает и частоту бортовой качки, и постоянную времени рыскания. При увеличении H колебания становятся более быстрыми, а апериодическое движение — более медленным.

9.2. Гироскоп с гибким валом в кардановом подвесе

При исследовании собственных частот и критических угловых скоростей гироскопов, работающих в реальных приборах, было обнаружено существенное расхождение между теоретическими результатами и экспериментальными данными. Как оказалось, расхождение это объясняется в основном тем, что в расчетах пренебрегали упругими деформациями вала ротора, влияние которых гораздо

существеннее, чем это можно было предполагать. Покажем это на примере гироскопа в кардановом подвесе.

Предположим, что упругая податливость всей системы, состоящей из ротора и внутренней рамки, сосредоточена в вале ротора, так что упрощенно можно рассматривать абсолютно жесткий ротор с гибким валом в абсолютно жесткой внутренней рамке. В дальнейшем нас будут интересовать повороты ротора относительно внутренней рамки (рис. 9.2). Поступательные перемещения

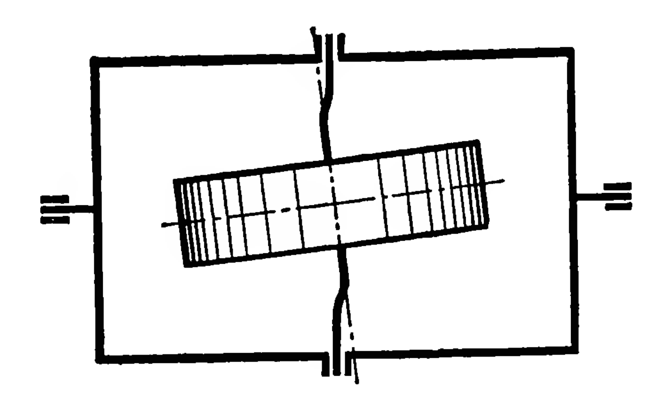


Рис. 9.2. Ротор с гибким валом

ротора можно не рассматривать, так как при симметричной конструкции ротора они не оказывают влияния на угловые колебания системы. Поворот ротора, изображенный на рисунке, может быть вызван динамической неуравновешенностью ротора или собственными колебаниями системы. Чтобы учесть обе эти возможности, составим уравнения движения в общем виде и будем искать их решение для интересующих нас случаев.

9.2.1. Уравнения движения неуравновешенного гироскопа с гибким валом в кардановом подвесе. Распространим обозначения, принятые в гл. 4, на гироскоп в кардановом подвесе. Пусть повороты рамок характеризуются углами α и β, а поворот ротора вокруг своей оси относительно рамки — углом γ. Чтобы учесть повороты ротора вокруг поперечных осей вследствие упругой деформации вала, введем углы α^R и β^R. В недеформированном состоянии вала они равны углам α и β, так что разности $\alpha^R - \alpha$ и $\beta^R - \beta$ служат мерой деформации вала. В первом приближении углы α, β, α^R, β^R можно считать малыми; тогда уравнения движения рамок гироскопа запишутся в форме

$$\begin{aligned} A^S\ddot{\alpha} + c_1\alpha + c(\alpha - \alpha^R) &= 0, \\ B^J\ddot{\beta} + c_2\beta + c(\beta - \beta^R) &= 0. \end{aligned} \qquad (9.9)$$

Здесь $A^S = A^J + A^A$ — суммарный момент инерции рамок относительно внешней оси подвеса, c — коэффициент жесткости вала, а c_1 и c_2 — коэффициенты возможных связей рамок [1]).

[1]) См. примечание на стр 464 — *Прим ред.*

При выводе соответствующих уравнений для ротора будем исходить из уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} A^R\dot{\omega}_1^R - (A^R - C^R)\,\omega_2^R\omega_3^R &= M_1^R, \\ A^R\dot{\omega}_2^R + (A^R - C^R)\,\omega_3^R\omega_1^R &= M_2^R, \\ C^R\dot{\omega}_3^R \qquad\qquad\qquad &= M_3^R. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Здесь положено $A^R = B^R$, так как ротор предполагается симметричным. При равновесии моментов относительно связанной с ротором оси 3 надо положить $M_3^R = 0$, так что $\omega_3^R = \omega_{30} = \text{const}$. Зависимость между угловыми скоростями ω_1^R, ω_2^R и углами α^R, β^R определяется кинематическими уравнениями (1.51). Чтобы учесть динамическую неуравновешенность ротора, выражающуюся в отклонении динамической оси симметрии ротора (главная ось 3) от конструктивно заданной оси подшипников ротора на малый угол ε (рис. 9.3), достаточно в уравнениях (1.51) везде подставить

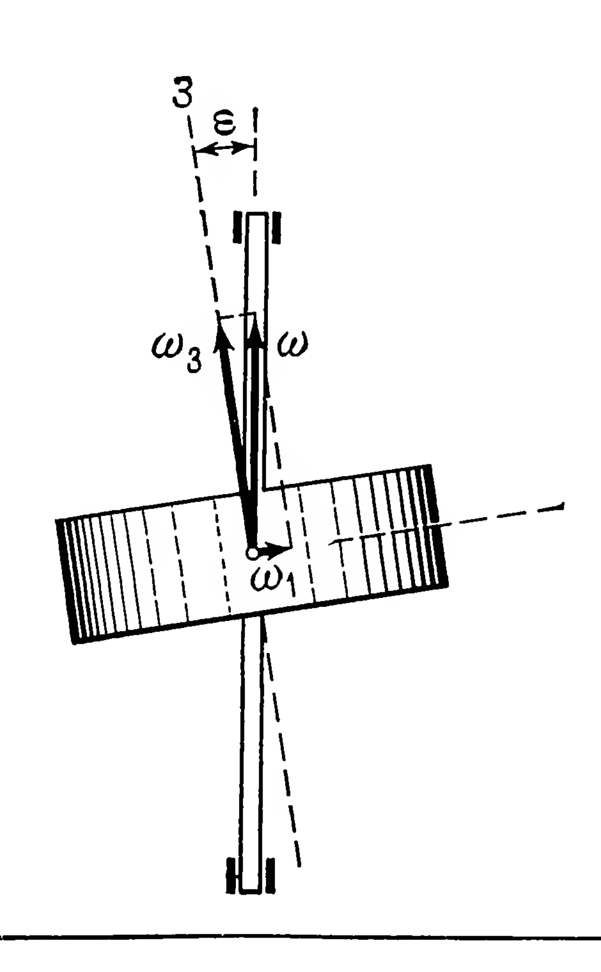


Рис. 9.3. Динамически неуравновешенный ротор.

вместо $\dot{\alpha}$ выражение $\dot{\alpha}^R + \varepsilon\omega_{30}\cos\gamma$, а вместо $\dot{\beta}$ выражение $\dot{\beta}^R + \varepsilon\omega_{30}\sin\gamma$. Учитывая, что $\alpha, \beta \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^R &\approx \dot{\alpha}^R\cos\gamma + \dot{\beta}^R\sin\gamma + \varepsilon\omega_{30}, \\ \omega_2^R &\approx -\dot{\alpha}^R\sin\gamma + \dot{\beta}^R\cos\gamma, \\ \omega_3^R &= \omega_{30} \approx \dot{\gamma}. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Подставляя (9.11) в (9.10) и учитывая, что $H = C^R\omega_{30}$, после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} A^R\ddot{\alpha}^R + H\dot{\beta}^R - (A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \sin\gamma &= M_1^R \cos\gamma - M_2^R \sin\gamma, \\ A^R\ddot{\beta}^R - H\dot{\alpha}^R + (A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \cos\gamma &= M_1^R \sin\gamma + M_2^R \cos\gamma. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Моменты, стоящие в правой части, возникают вследствие изгиба вала. Если жесткость вала одинакова во всех поперечных направлениях, то

$$\begin{aligned} M_1^R \cos\gamma - M_2^R \sin\gamma &= -c\,(\alpha^R - \alpha), \\ M_1^R \sin\gamma + M_2^R \cos\gamma &= -c\,(\beta^R - \beta). \end{aligned} \tag{9.13}$$

В этом случае уравнения (9.12) можно записать в форме

$$\begin{aligned} A^R\ddot{\alpha}^R + H\dot{\beta}^R + c\,(\alpha^R - \alpha) &= (A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \sin\omega_{30}t, \\ A^R\ddot{\beta}^R - H\dot{\alpha}^R + c\,(\beta^R - \beta) &= -(A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \cos\omega_{30}t. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Равенства (9.14) вместе с (9.9) дают систему уравнений малых колебаний динамически неуравновешенного ротора с гибким валом в кардановом подвесе. Все четыре уравнения системы связаны между собой в силу упругости вала (коэффициент c) и влияния кинетического момента H.

Рассмотрим отдельно собственные колебания системы, а затем ее вынужденные колебания, возбуждаемые неуравновешенностью ротора.

9.2.2. Собственные колебания уравновешенного ротора. При $\varepsilon = 0$ уравнения (9.9) и (9.14) сводятся к однородной линейной системе с характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} A^S\lambda^2 + c + c_1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & B^J\lambda^2 + c + c_2 & 0 & -c \\ -c & 0 & A^R\lambda^2 + c & H\lambda \\ 0 & -c & -H\lambda & A^R\lambda^2 + c \end{vmatrix} = 0, \tag{9.15}$$

или

$$a_8\lambda^8 + a_6\lambda^6 + a_4\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0, \tag{9.16}$$

где

$$\begin{aligned} a_8 &= (A^R)^2 A^S B^J, \\ a_6 &= H^2 A^S B^J + A^S (A^R)^2 (c + c_2) + B^J (A^R)^2 (c + c_1) + 2cA^S A^R B^J, \\ a_4 &= H^2 [A^S (c + c_2) + B^J (c + c_1)] + (A^R)^2 (c + c_1)(c + c_2) + \\ &\qquad + A^S A^R c\,(c + 2c_2) + A^R B^J c\,(c + 2c_1) + A^S B^J c^2, \\ a_2 &= H^2 (c + c_1)(c + c_2) + 2A^R c c_1 c_2 + c^2 [c_1 (A^R + B^J) + c_2 (A^R + A^S)], \\ a_0 &= c^2 c_1 c_2. \end{aligned}$$

Уравнение (9.16) имеет четыре действительных отрицательных корня для λ^2, которые соответствуют четырем значениям частот собственных колебаний $\omega_i = |\lambda_i|$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Таким образом, при известных параметрах собственные частоты системы можно определить, решая алгебраическое уравнение (9.16).

Пример такого решения показан на рис. 9.4. Здесь представлены четыре собственные частоты как функции угловой скорости

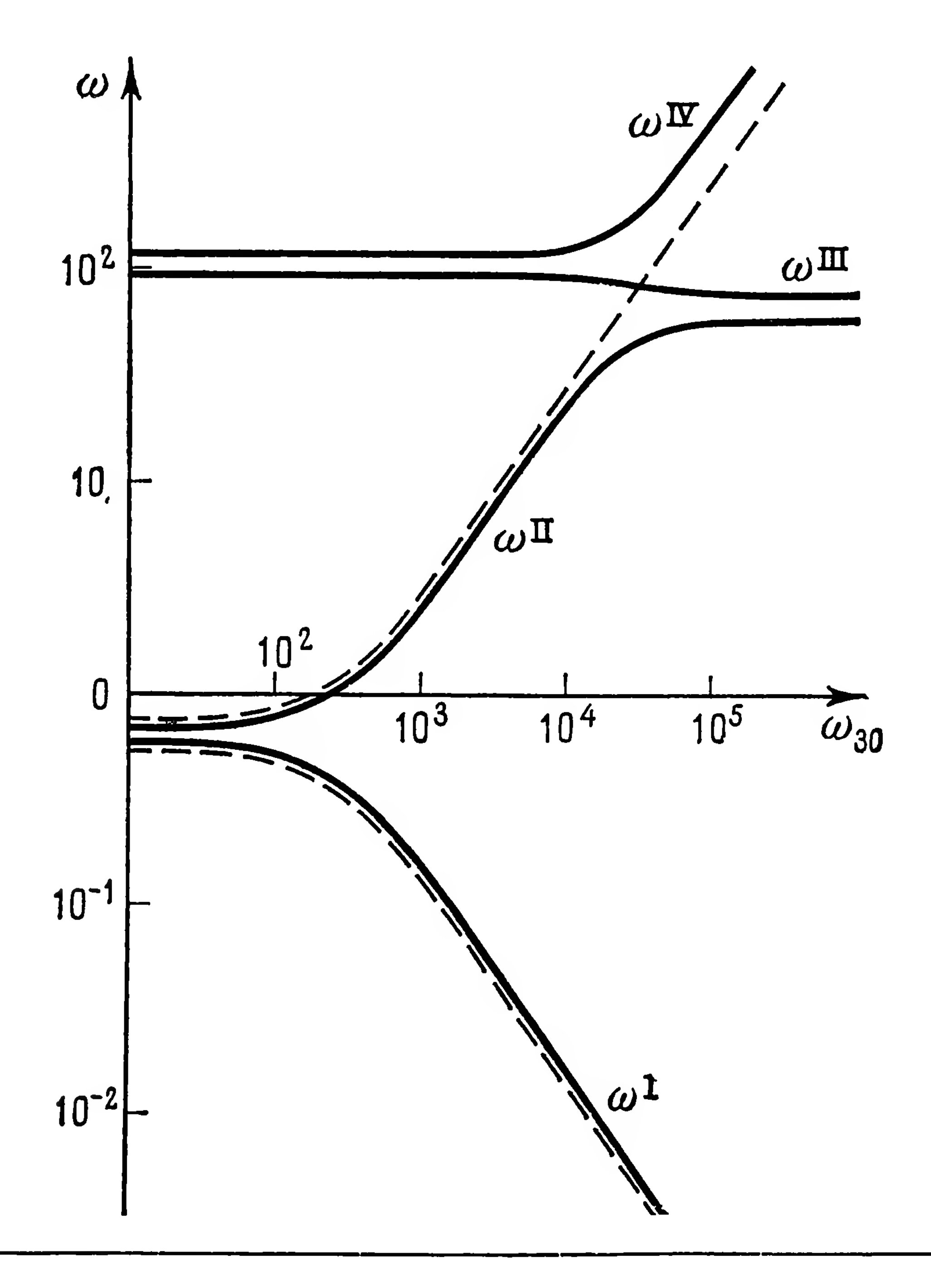


Рис. 9.4. Собственные частоты гироскопа в кардановом подвесе как функции угловой скорости собственного вращения (сплошные линии — для гироскопа с гибким валом, штриховые — с абсолютно жестким).

вращения ротора ω_{30} для гироскопа с гибким валом, применяемого в обычном гироскопическом компасе. При невращающемся роторе ($\omega_{30} = 0$) имеются две низкие частоты ω^{I} и ω^{II}, обусловленные действием слабых связей c_1 и c_2; высокочастотные колебания ω^{III} и ω^{IV} возникают за счет поворотов ротора относительно рамки, изображенных на рис. 9.2. При невысоких скоростях ω_{30} медленные колебания (с частотой ω^{I}) можно считать прецессией, более быстрые (с частотой ω^{II}) — нутацией; частоты ω^{III} и ω^{IV} в этом случае соответствуют упругим колебаниям. Такой порядок, однако, не сохраняется с ростом угловой скорости ω_{30}. При боль-

ших значениях ω_{30} частотой нутации следует считать ω^{IV}. При больших ω_{30} частота ω^{IV} растет примерно пропорционально величине ω_{30}, т. е. пропорционально кинетическому моменту, а это свойство, как было показано в гл. 5, характерно для частоты нутации.

Кривые собственных частот гироскопа с абсолютно жестким валом даны на рис. 9.4 штриховой линией. Из рисунка видно, что для прецессии разница совершенно незначительна (соответствующие кривые практически совпадают), для нутации же видны существенные различия.

Кривые, изображенные на рис. 9.4, соответствуют ротору с достаточно малой жесткостью вала; его рабочие угловые скорости выше критических. Однако многие типы технических гироскопов работают в докритической зоне. Для них из характеристического уравнения нетрудно получить упрощенные формулы, учитывающие с достаточной точностью влияние упругости вала. Рассмотрим несколько практических примеров.

При достаточно большом кинетическом моменте прецессионное движение можно найти приближенно, пренебрегая в уравнениях движения членами, содержащими угловые ускорения. Из уравнения (9.16) исключатся все моменты инерции и часть коэффициентов обратится в нуль: $a_8 = a_6 = a_4 = 0$. Уравнение примет вид $a_2\lambda^2 + a_0 = 0$. Его решение таково:

$$\lambda^2 = -\frac{a_0}{a_2} = -\frac{c^2 c_1 c_2}{H^2 (c + c_1)(c + c_2)}.$$

Обычно $c_1 \ll c$, $c_2 \ll c$; тогда выражение для частоты прецессии принимает вид

$$\omega^{I} \approx \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{H}. \qquad (9.17)$$

Полученная формула еще раз подтверждает установленное анализом кривых рис. 9.4 обстоятельство: частота прецессии практически не зависит от упругости вала.

Для вычисления других собственных частот при достаточно больших значениях ω_{30} можно пренебречь величинами c_1 и c_2. Тогда окажется, что в уравнениях (9.16) $a_0 = 0$ и, стало быть, имеется кратный корень $\lambda_I^2 = 0$, соответствующий прецессии. Другим корням можно дать оценку (по крайней мере, для предельного случая очень больших частот). Для этого достаточно в уравнении (9.16) оставить только члены, содержащие множитель H^2, так что оно сведется к виду

$$(A^S\lambda^2 + c)(B^J\lambda^2 + c) \approx 0.$$

Корни полученного уравнения дают приближенные значения двух частот:

$$\omega^{II} \approx \sqrt{\frac{c}{A^S}} = \sqrt{\frac{c}{A^J + A^A}}, \quad \omega^{III} \approx \sqrt{\frac{c}{B^J}}. \qquad (9.18)$$

Это собственные частоты упругих колебаний рамок относительно неподвижного в пространстве ротора. Частота нутации также может быть найдена приближенно. В предельном случае $H \to \infty$ это обязательно самая высокая частота, и ее приближенное значение можно найти, оставив в уравнении (9.16) только члены с двумя высшими степенями λ. Отсюда следует

$$\omega^{IV} \approx \sqrt{\frac{a_6}{a_8}} \approx \frac{H}{A^R} = \frac{C^R}{A^R}\omega_{30}. \qquad (9.19)$$

Это известная формула для частоты нутации свободного гироскопа.

Наряду с приближением, соответствующим большим значениям кинетического момента, практический интерес представляют формулы для случая больших значений жесткости вала ($c \to \infty$). Приближенное значение частоты нутации следует искать в предположении, что частоты упругих колебаний ω^{III} и ω^{IV} в этом случае очень высоки. Тогда ставшую более низкой частоту нутации можно определить по приближенной формуле

$$\omega^{II} \approx \sqrt{\frac{a_2}{a_4}} \approx \frac{H}{\sqrt{(A^R + A^J + A^A)(A^R + B^J) + (H^2/c)(A^J + B^J + A^A)}}. \qquad (9.20)$$

При бесконечно большом значении жесткости второе слагаемое в подкоренном выражении обращается в нуль и в правой части остается известное выражение для частоты нутации симметричного гироскопа в кардановом подвесе. Теперь видно, что вследствие упругости вала частота нутационных колебаний уменьшается и тем сильнее, чем

1) больше кинетический момент H,

2) больше сумма моментов инерции рамок $A^J + B^J + A^A$ и

3) меньше жесткость вала c.

Насколько существенным может оказаться влияние упругости вала, показывает следующий пример. На рис. 9.5 приведены экспериментальные данные и результаты расчетов нутационных частот гироскопа, для которого влияние упругости вала вообще трудно было ожидать: маховик гироскопа весом 1 кг укреплен на коротком стальном валу диаметром 7 мм. Несмотря на малую угловую скорость ротора ($n < 3000$ об/мин), влияние упругости вала обнаруживается совершенно отчетливо.

Аналогичный результат можно получить для гироскопа с уменьшенным числом степеней свободы, например для гиротахометра. Из характеристического уравнения (9.16) и для этого случая можно найти хорошее приближение. Гироскоп с двумя степенями свободы можно получить, закрепив внутреннюю рамку относительно внешней ($c_2 \to \infty$). Если, кроме того, опять считать величину жесткости c достаточно большой и частоты упругих колебаний высокими, то для маятниковых колебаний рамки значение

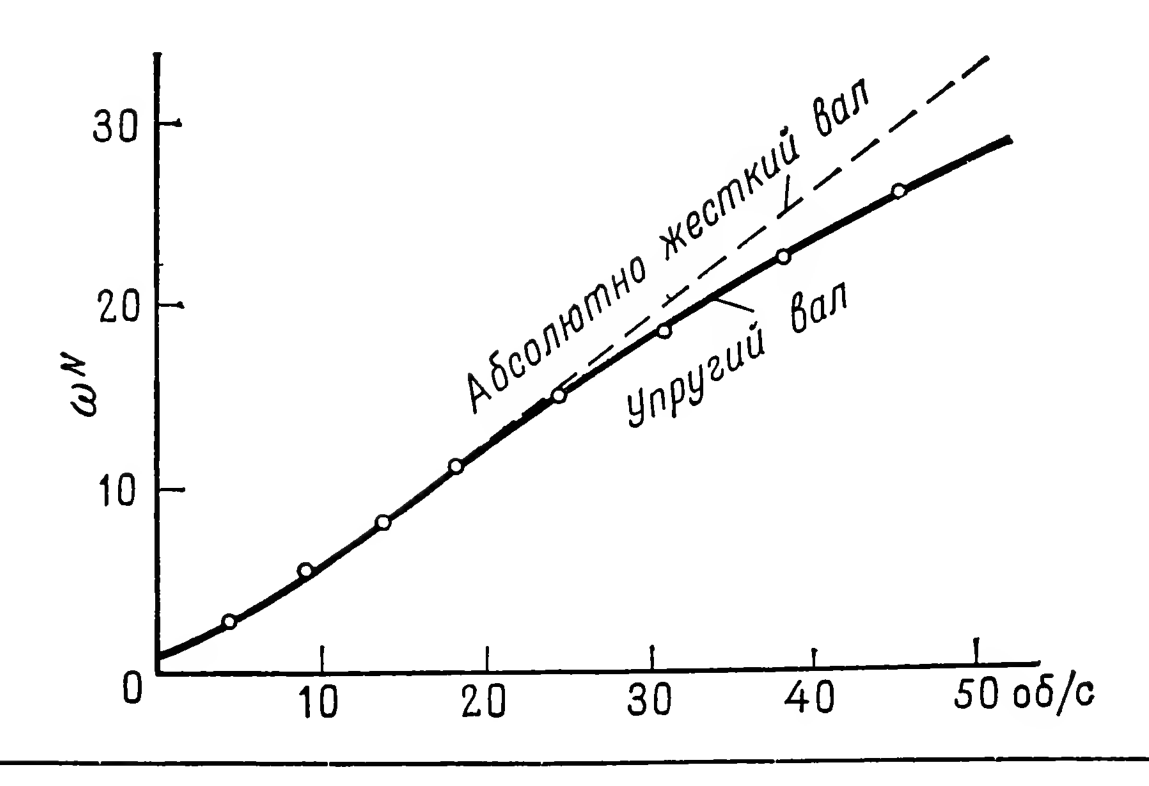


Рис. 9.5. Изменение собственных частот гироскопа в кардановом подвесе из-за упругости вала ротора.

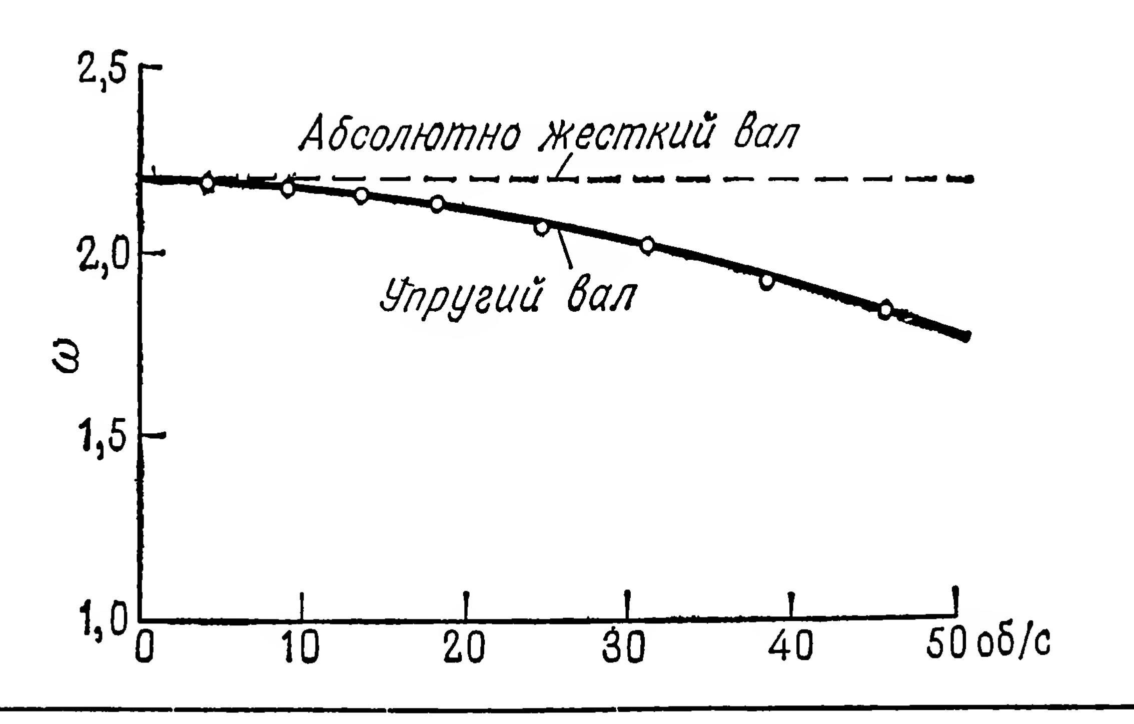


Рис. 9.6. Изменение собственных частот гироскопа с двумя степенями свободы из-за упругости вала ротора.

собственной частоты можно выразить приближенной формулой

$$\omega \approx \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{\frac{c_1}{A^R + A^J + A^A + H^2/c}}\,. \tag{9.21}$$

И в этом случае упругость вала приводит к снижению частоты. На рис. 9.6 представлены результаты расчетов и непосредственных измерений, выполненных на реальном приборе.

В некоторых случаях может оказаться необходимым учитывать влияние упругости вала и на прецессионное движение, особенно в тех случаях, когда гироскоп соединен со значительными инертными массами. Гиргольцер [65], например, установил, что в гироскопическом компасе с прецессионным периодом 84 мин упругая податливость вала гироскопа увеличивает период примерно на 0,4%.

9.2.3. Вынужденные колебания неуравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. Рассмотрим вынужденные колебания гироскопа, считая пока его вал абсолютно жестким ($c = \infty$). Система уравнений, состоящая из (9.9) и (9.14), вследствие $\alpha^R = \alpha$ и $\beta^R = \beta$ преобразуется в этом случае к виду

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + c_1\alpha &= \varepsilon\omega_{30}^2 (A^R - C^R)\sin\omega_{30}t, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + c_2\beta &= -\varepsilon\omega_{30}^2 (A^R - C^R)\cos\omega_{30}t, \end{aligned} \tag{9.22}$$

где введены обозначения

$$A = A^R + A^I + A^A, \quad B = A^R + B^I.$$

Система имеет частное решение

$$\alpha = R_\alpha \sin\omega_{30}t, \quad \beta = -R_\beta \cos\omega_{30}t$$

с амплитудами вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{\varepsilon\omega_{30}^2 (A^R - C^R)\left(B\omega_{30}^2 + H\omega_{30} - c_2\right)}{\left(A\omega_{30}^2 - c_1\right)\left(B\omega_{30}^2 - c_2\right) - H^2\omega_{30}^2}, \\ R_\beta &= \frac{\varepsilon\omega_{30}^2 (A^R - C^R)\left(A\omega_{30}^2 + H\omega_{30} - c_1\right)}{\left(A\omega_{30}^2 - c_1\right)\left(B\omega_{30}^2 - c_2\right) - H^2\omega_{30}^2}. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Знаменатель является квадратичным трехчленом относительно ω_{30}^2, и если учесть, что $H = C^R\omega_{30}$, то его можно привести к виду

$$N = [AB - (C^R)^2]\,\omega_{30}^4 - (c_1B + c_2A)\,\omega_{30}^2 + c_1c_2.$$

Его нули дают значения критических частот

$$\omega_{30}^2 = \frac{c_1B + c_2A}{2[AB - (C^R)^2]}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c_1c_2[AB - (C^R)^2]}{(c_1B + c_2A)^2}}\right]. \tag{9.24}$$

Нетрудно проверить, что подкоренное выражение всегда положительно, если соблюдаются условия статической устойчивости ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$). Возможны три различных случая:

1) $\sqrt{AB} > C^R$ — система «вытянутая» [1]): существуют два действительных значения ω_{30}, обращающих знаменатель в нуль;
2) $\sqrt{AB} = C^R$ — граничный случай: одно из действительных значений ω_{30} обращается в бесконечность;
3) $\sqrt{AB} < C^R$ — система «сплюснутая»: существует только одно действительное значение ω_{30}, обращающее знаменатель в нуль.

[1]) Термины «вытянутая» и «сплюснутая» применены здесь по аналогии с п. 1.3.6, где вытянутым гироскопом назван гироскоп, у которого $A = B > C$ и, следовательно, эллипсоид инерции вытянут (вдоль оси 3). — *Прим. ред*

Вид резонансных кривых для этих трех случаев представлен на рис. 9.7. Физический смысл достаточно прост: первый резонанс соответствует совпадению частоты собственного вращения ω_{30} с частотой прецессии гироскопа; второй резонанс появляется на частоте нутационных колебаний.

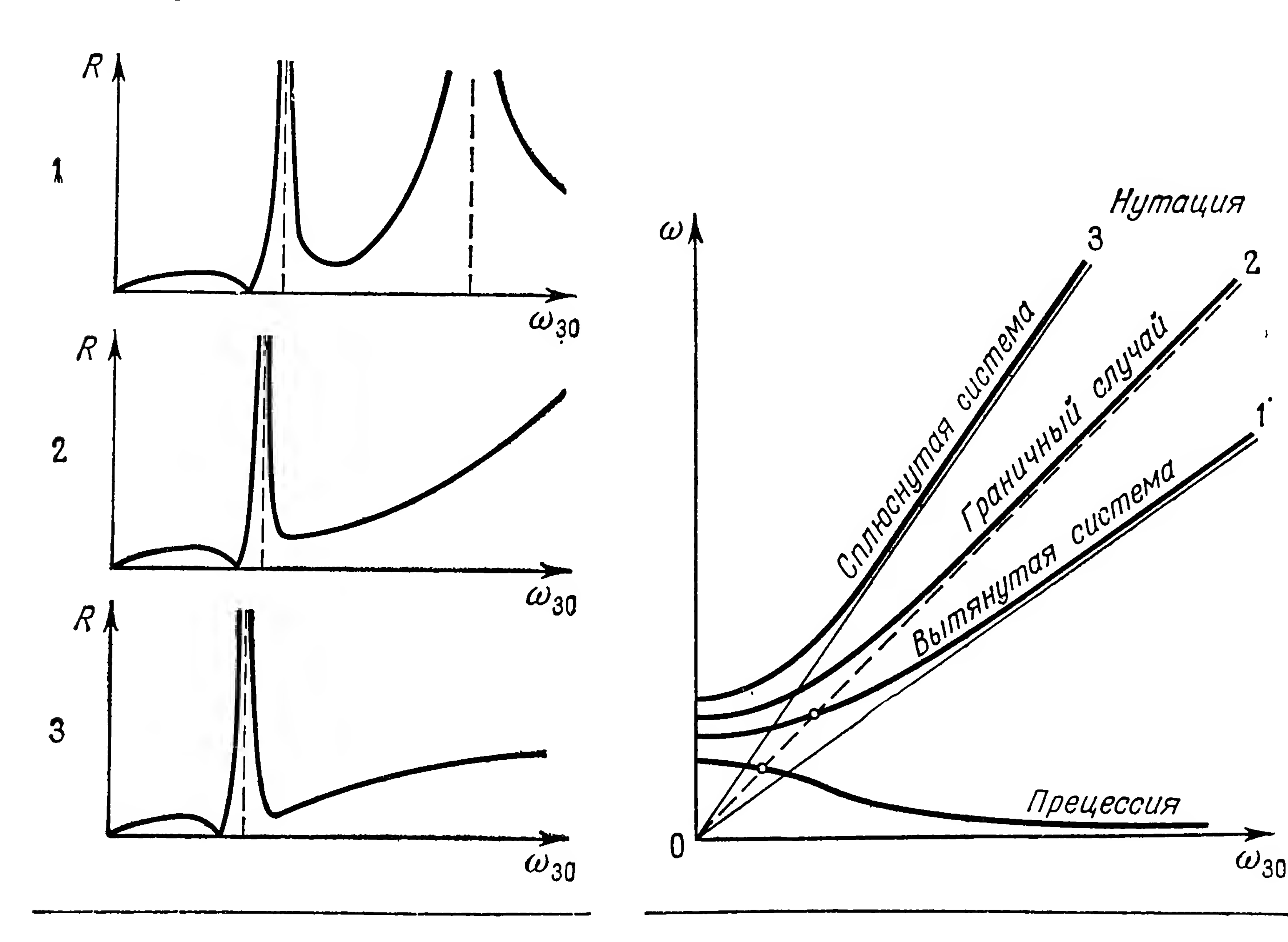


Рис. 9.7. Резонансные кривые неуравновешенного тяжелого гироскопа в кардановом подвесе с абсолютно жестким валом:

1) «вытянутая» система $(\sqrt{AB} > C^R)$;
2) граничный случай $(\sqrt{AB} = C^R)$;
3) «сплюснутая» система $(\sqrt{AB} < C^R)$.

Рис. 9.8. К объяснению резонансных частот неуравновешенного гироскопа с абсолютно жестким валом; те же три случая, что и на рис. 9.7.

Тот факт, что второй резонанс существует только для вытянутых систем, лучше всего поясняется графиком зависимости резонансных частот от ω_{30} (рис. 9.8). Кривая нутационной частоты имеет вид ветви гиперболы и асимптотически приближается к прямой, проходящей через начало координат. Угол наклона асимптоты для вытянутых систем меньше 45°, для сплюснутых больше 45°. Пересечение с прямой с наклоном 45°, которую можно рассматривать как кривую частоты возмущения, возможно лишь в случае вытянутой системы (случай 1). В граничном случае 2 точка пересечения уходит в бесконечность, поэтому на рис. 9.7 заметен возрастающий подъем резонансной кривой при увеличении угловой скорости. Этот случай безусловно недопустим для

гироскопических приборов, так как соответствует длительному резонансу: частота возмущения очень близка к собственной частоте в большом интервале угловых скоростей гироскопа.

В любом случае прямая с наклоном 45° пересекает кривую частот прецессии. Однако соответствующая резонансная частота настолько низка, что никакой опасности этот резонанс не представляет, тем более что при разгоне гироскопа область резонанса проходится очень быстро.

Осталось рассмотреть, как изменятся соотношения при упругом вале ротора. С помощью подстановки

$$\begin{aligned} \alpha &= R_\alpha \sin \omega t, & \alpha^R &= R_\alpha^R \sin \omega t, \\ \beta &= R_\beta \cos \omega t, & \beta^R &= R_\beta^R \cos \omega t \end{aligned} \tag{9.25}$$

нетрудно найти частное решение системы (9.9) и (9.14). Амплитуды R_α, R_β, R_α^R, R_β^R могут быть определены известным способом, но здесь нет необходимости приводить их явные выражения.

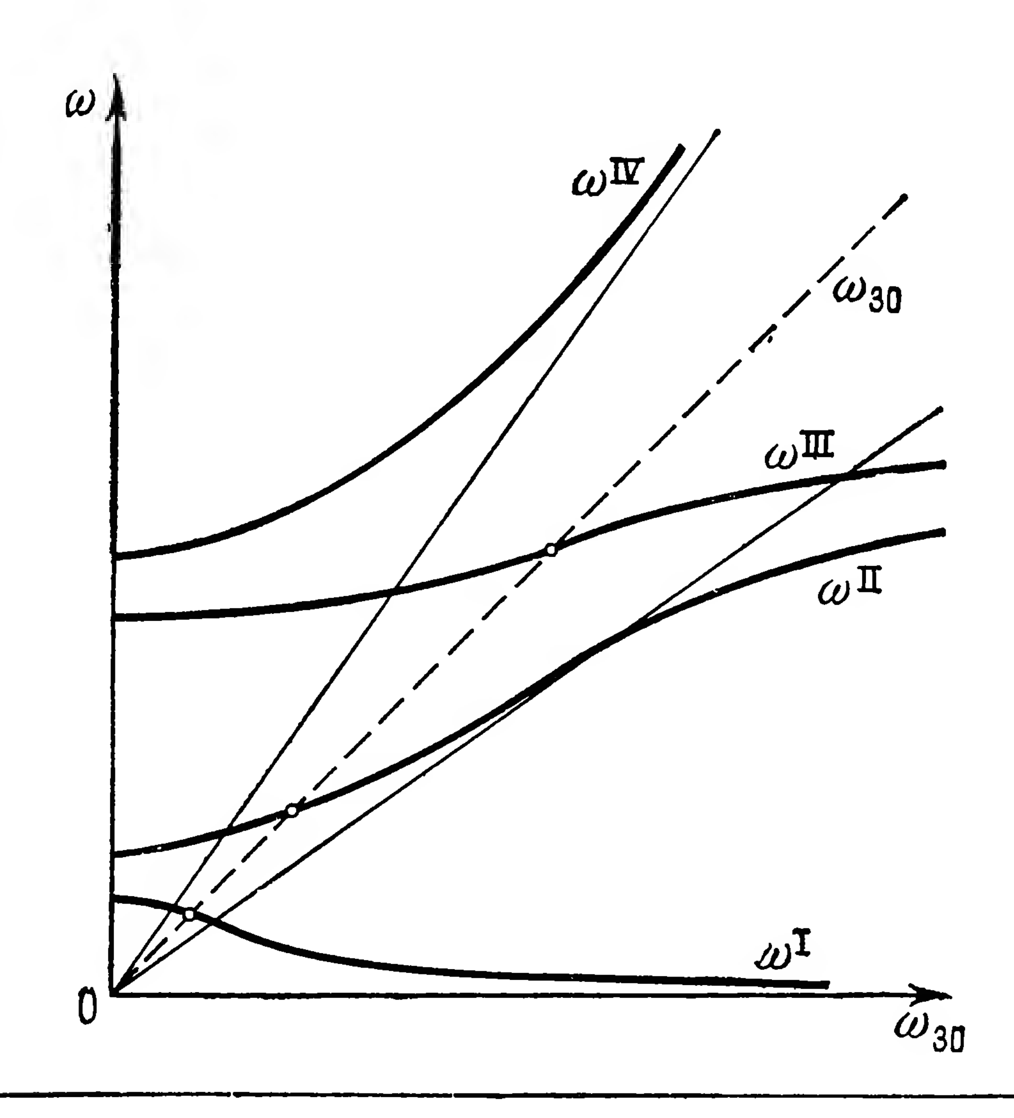


Рис. 9.9. К объяснению резонансных частот гироскопа в кардановом подвесе с упругим валом (ротор «сплюснутый»).

Чтобы получить представление о возможных резонансных областях, достаточно исследовать точки обращения в нуль знаменателя, общего для всех четырех функций. Примерная зависимость положения нулевых точек знаменателя от ω_{30} представлена на рис. 9.9. Изображенные здесь кривые соответствуют кривым рис. 9.4.

Точки пересечения кривых с прямой с наклоном 45° (с кривой частоты возмущения) определяют места резонансов. В любом случае существуют минимум три такие точки — это пересечения с кривыми ω^{I}, ω^{II} и ω^{III}. При вытянутом роторе ($C^R/A^R < 1$) существует четвертая точка — пересечение с кривой ω^{IV} в области очень больших значений ω_{30}. Кривая ω^{IV} асимптотически приближается к прямой, проходящей через начало координат с наклоном $\operatorname{tg}\varphi = C^R/A^R$. При сплюснутом роторе $\varphi > 45°$, поэтому точки пересечения и соответствующего резонанса нет. На этом основании можно сделать вывод, что для гироскопов с угловой скоростью выше критической предпочтительнее соотношение $C^R > A^R$.

Место пересечения прямой с наклоном 45° и кривой ω^{III} зависит от упругости вала гироскопа. При работе в закритической области этот резонанс надо проходить как можно быстрее, при рабочих же скоростях ниже критической он вообще не достигается. Пересечение с кривой ω^{I} опасности не представляет, потому что соответствует очень малой угловой скорости. В основном оно зависит от связей c_1 и c_2. Для технических приложений существенное значение имеет точка пересечения с кривой ω^{II}. Положение этой точки пересечения зависит прежде всего от соотношений между моментами инерции. При абсолютно жестком вале кривая ω^{II} имела бы асимптоту, проходящую через начало координат с тангенсом угла наклона

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C^R}{\sqrt{AB}} = \frac{C^R}{\sqrt{(A^R + A^J + A^A)(A^R + B^J)}}\,.$$

Эта величина меньше 1 для вытянутой системы и больше 1 для сплюснутой. Подобную взаимосвязь можно усмотреть и на рис. 9.10. Здесь изображены кривые ω^{II} для тех же случаев, для которых при абсолютно жестком вале были получены кривые рис. 9.8. Для вытянутой системы (случай 1) точка пересечения лежит низко и соответствующий резонанс не опасен. Для сплюснутой же системы (случай 3) или в граничном случае 2 резонансная точка может оказаться близкой к рабочим скоростям и вызвать сильные возмущения.

В области средних значений ω_{30} кривая ω^{II} близка к прямой, а при высоких скоростях под влиянием упругости вала она отклоняется вниз. Отсюда нетрудно увидеть, что у вытянутых систем резонанс смещен в сторону низких частот. Положение этого резонанса особенно важно, потому что при разгоне гироскопа он обычно проходится очень медленно. Пересечение кривой ω^{II} и прямой с наклоном 45° происходит под малым углом, так что частота возмущений остается близкой к собственной частоте системы в широком интервале скоростей.

Из приведенных рассуждений можно заключить, что моменты инерции гироскопа и рамок карданова подвеса целесообразно

выбирать так, чтобы выполнялось условие

$$A^R < C^R < \sqrt{AB} = \sqrt{(A^R + A^J + A^A)(A^R + B^J)}. \qquad (9.26)$$

Это означает, что ротор должен быть сплюснутым, а система в целом — вытянутой.

Амплитуды R_α и R_β [см. (9.23) и (9.25)] содержат множитель $(A^R - C^R)\varepsilon\omega_{30}^2$. Может показаться, что наиболее выгоден ротор со сферическим эллипсоидом инерции ($A^R = C^R$), для которого этот

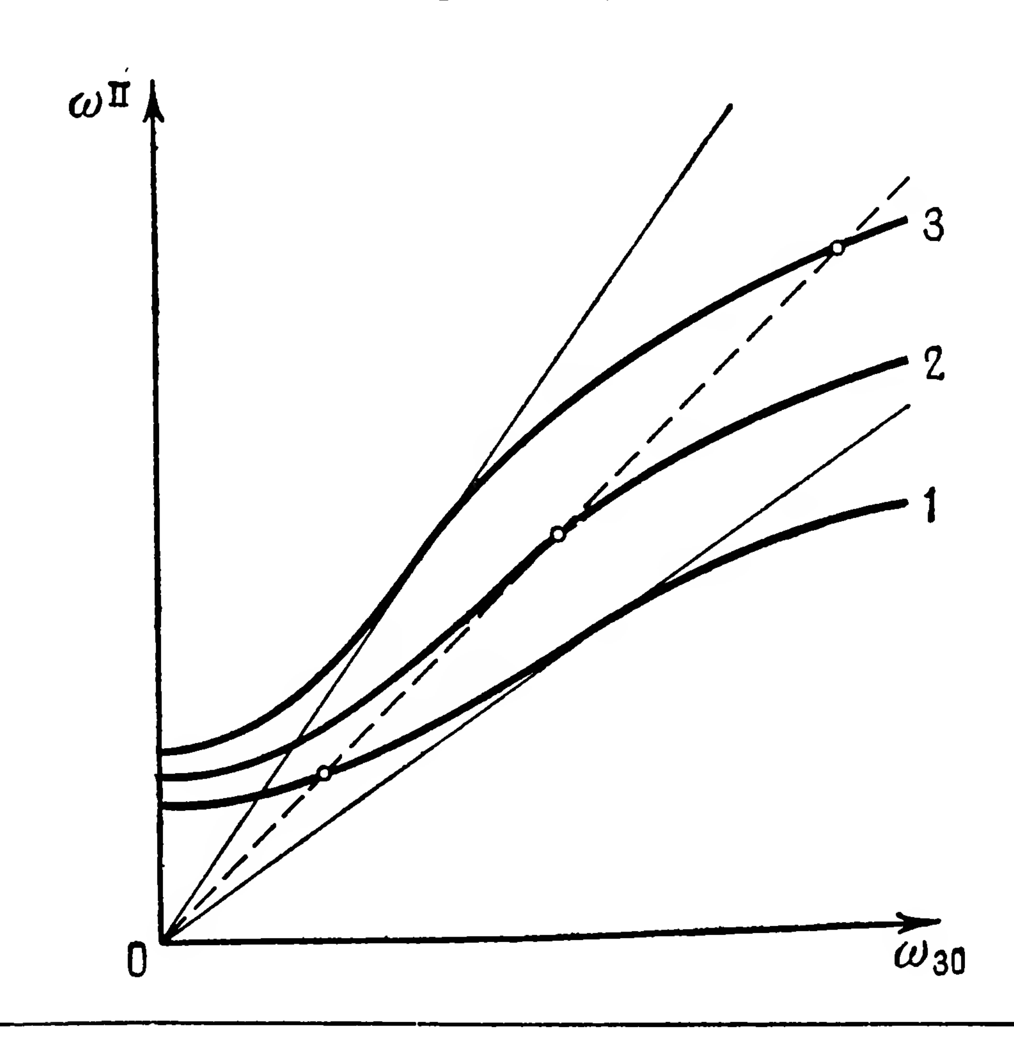


Рис. 9.10. Резонанс с нутационными колебаниями у гироскопа с упругим валом; те же три случая, что и на рис. 9.7.

множитель обращается в нуль. Однако такой вывод был бы ошибочным, так как важна величина произведения $(A^R - C^R)\varepsilon$. В случае $A^R = C^R$ малейшее изменение в распределении масс приводит к большим значениям ε. Можно показать [66], что произведение $(A^R - C^R)\varepsilon$ при заданной величине возмущений практически не зависит от формы эллипсоида инерции, так что никакими преимуществами шаровой гироскоп не обладает.

9.3. Влияние гироскопических эффектов на изгибные колебания

В § 9.2 мы исследовали влияние угловых колебаний ротора с упругим валом на собственные частоты гироскопа в кардановом подвесе, причем поступательные перемещения ротора не были приняты во внимание. Существует, однако, много случаев, когда поступательные колебания ротора на упругом валу существенно меняются под действием гироскопических эффектов. Три такие задачи мы здесь

вкратце рассмотрим, а за более детальным анализом отсылаем читателя к специальным работам (см., например, Бицено и Граммель [67] или Тондл [68]).

9.3.1. Колебания вращающегося диска. Пусть ротор, имеющий форму диска, закреплен на свободном конце упругого вала (рис. 9.11); второй конец вала фиксируется подшипником. Будем считать диск абсолютно жестким, вал нескручивающимся и рабочую угловую скорость ω постоянной. Положим также, что масса вала пренебрежимо мала по сравнению с массой диска, демпфирующие силы отсутствуют и сила тяжести не оказывает влияния на движение (последнее справедливо при малых отклонениях вала от вертикали).

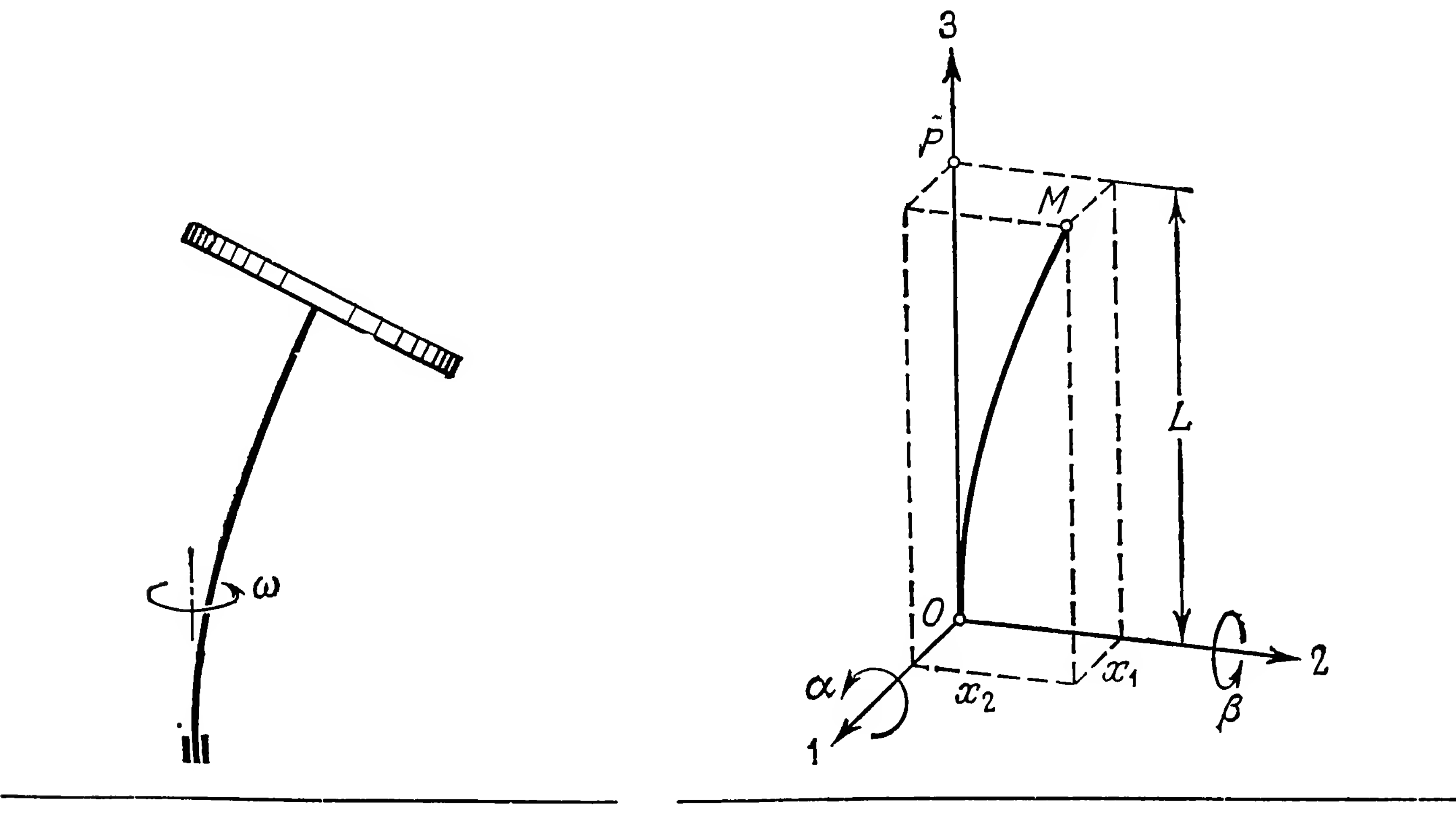


Рис. 9.11. Диск на свободном конце упругого вала.

Рис. 9.12. К описанию деформированного вала.

В недеформированном состоянии вал принимает направление вертикальной оси 3 (рис. 9.12) и его конец, совпадающий с центром диска, находится в точке P. При деформации конец вала отклоняется в некоторую точку M. Ее координаты обозначим x_1 и x_2. Направление касательной к оси вала в точке M характеризуется углами α и β. Все четыре координаты могут считаться малыми. Если в точке M к валу приложены силы F_1, F_2 и моменты M_1, M_2, то, согласно теории балки, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= aF_1 + cM_2, \\ x_2 &= aF_2 - cM_1, \\ \alpha &= -cF_2 + bM_1, \\ \beta &= cF_1 + bM_2. \end{aligned} \qquad (9.27)$$

Коэффициенты a, b, c зависят от длины балки L, модуля упругости E и момента инерции поперечного сечения I. Для конструкции, изображенной на рис. 9.11, имеем

$$a = \frac{L^3}{3EI}, \quad b = \frac{L}{EI}, \quad c = \frac{L^2}{2EI}. \tag{9.28}$$

Из (9.27) находим

$$F_1 = \frac{bx_1 - c\beta}{ab - c^2}, \qquad F_2 = \frac{bx_2 + c\alpha}{ab - c^2},$$

$$M_1 = \frac{a\alpha + cx_2}{ab - c^2}, \qquad M_2 = \frac{a\beta - cx_1}{ab - c^2}.$$

Согласно закону импульса и закону кинетического момента, при $\alpha, \beta \ll 1$ (см. вычисления для гироскопа в кардановом подвесе в п. 9.2.1) имеем

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -F_1 = \frac{1}{N}(c\beta - bx_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -F_2 = \frac{1}{N}(-c\alpha - bx_2), \\ A\ddot{\alpha} + C\omega\dot{\beta} &= -M_1 = \frac{1}{N}(-cx_2 - a\alpha), \\ A\ddot{\beta} - C\omega\dot{\alpha} &= -M_2 = \frac{1}{N}(cx_1 - a\beta), \end{aligned} \tag{9.29}$$

где

$$N = ab - c^2.$$

Эта система четырех взаимосвязанных уравнений с введением комплекснозначных переменных

$$x_1 + ix_2 = \xi, \qquad \beta - i\alpha = \eta \tag{9.30}$$

упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} Nm\ddot{\xi} + b\xi - c\eta &= 0, \\ NA\ddot{\eta} - iNC\omega\dot{\eta} + a\eta - c\xi &= 0. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} Nm\lambda^2 + b & -c \\ -c & NA\lambda^2 - iNC\omega\lambda + a \end{vmatrix} = 0 \tag{9.32}$$

при $\lambda = i\nu$ переходит в алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами

$$\nu^4 mA(ab - c^2) - \nu^3 mC\omega(ab - c^2) - \nu^2(am + bA) + \nu bC\omega + 1 = 0. \tag{9.33}$$

Если бы вместо ротора на конце вала была укреплена точечная масса, то в силу $A = C = 0$ частота изгибных колебаний определялась бы формулой

$$\nu^2 = \nu_0^2 = \frac{1}{am} = \frac{3EI}{mL^3}. \tag{9.34}$$

В безразмерных переменных

$$\tau = \nu/\nu_0 \quad \text{и} \quad \sigma = \omega/\nu_0 \qquad (9.35)$$

с учетом (9.28) характеристическое уравнение (9.33) принимает вид

$$\tau^4 \frac{3A}{4mL^2} - \tau^3\sigma \frac{3C}{4mL^2} - \tau^2\left(1 + \frac{3A}{mL^2}\right) + \tau\sigma \frac{3C}{mL^2} + 1 = 0. \qquad (9.36)$$

Это уравнение имеет четыре действительных корня. Их зависимость от величины относительной угловой скорости σ представлена на рис. 9.13. При $\sigma \to \infty$ кривые *2*, *3*, *4* асимптотически приближаются

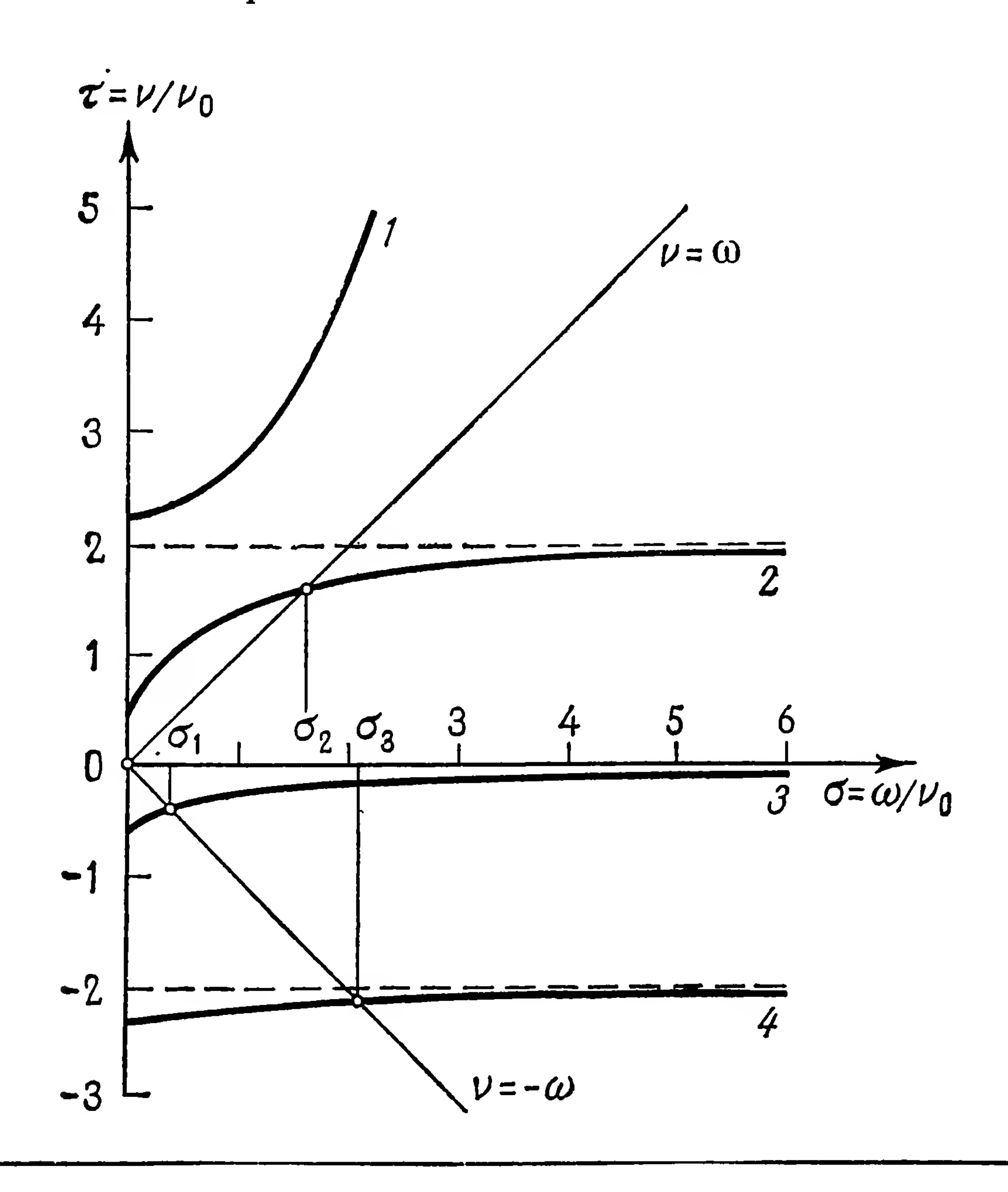


Рис. 9.13. Зависимость собственных частот от относительной угловой скорости.

к горизонтальным прямым $\tau = +2$, 0, -2. Это видно непосредственно из уравнения (9.36). Каждому корню $\tau = \nu/\nu_0$ соответствует решение вида

$$\xi = x_1 + ix_2 = \Phi e^{i\nu t} = \Phi(\cos\nu t + i\sin\nu t). \qquad (9.37)$$

Из самой формы решения следует, что положительным частотам ν_1 и ν_2 соответствует движение, при котором точка M обегает окружность в направлении собственного вращения вала. При отрицательных частотах ν_3 и ν_4 движение точки M по окружности происходит в сторону, противоположную вращению ω. Собственные

колебания могут возникнуть после действия соответствующего внешнего возмущения, например после удара, и будут накладываться на другие, уже имевшиеся движения диска. При возмущениях, действующих в такт собственным колебаниям, возможны резонансные явления, однако влияние демпфирования и нелинейностей ограничивает рост амплитуды колебаний.

Поскольку вращающийся диск никогда не является идеально уравновешенным, всегда имеется возмущение с частотой ω, причем вектор возмущения вращается в том же направлении, что и диск. При совпадении угловой скорости ω с одной из собственных частот ν возникает резонанс. Резонансные частоты могут быть найдены как абсциссы точек пересечения кривых собственных частот с прямой $\tau = \sigma$, т. е. $\nu = \omega$ (рис. 9.13). Таким образом получают критическую скорость $\omega_2 = \nu_0\sigma_2$, значение которой легко находится из уравнений (9.36).

Иногда критическими считают также скорости $\omega_1 = \nu_0\sigma_1$ и $\omega_3 = \nu_0\sigma_3$ (рис. 9.13), соответствующие точкам пересечения частотных кривых с прямой $\tau = -\sigma$, т. е. $\nu = -\omega$. Однако собственные колебания с частотами ω_1 и ω_3 не могут быть вызваны неуравновешенностью ротора и поэтому на практике почти не наблюдаются.

Собственные колебания, совпадающие по направлению с вращением ротора при частоте ω_2 и противоположные ему при частотах ω_1 и ω_3, схематично изображены на рис. 9.14. Траектория точки M

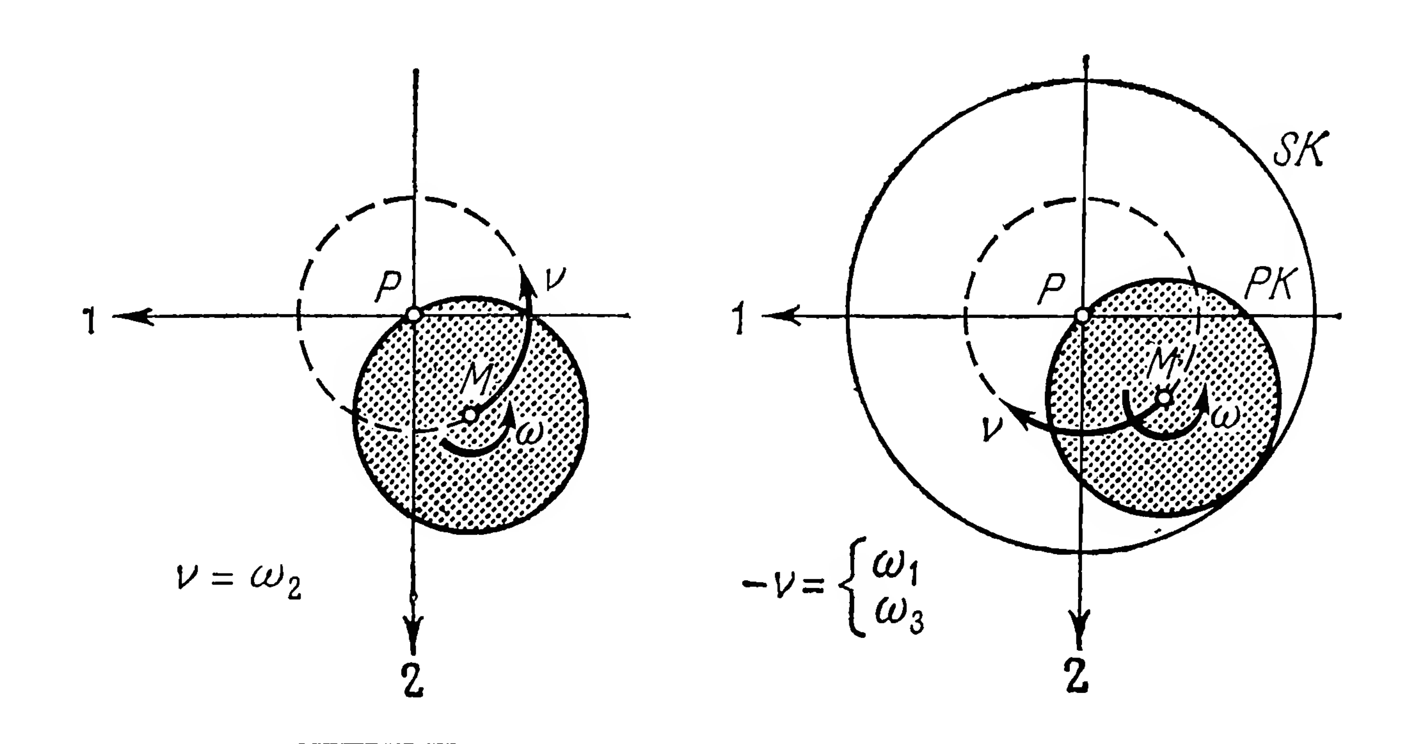


Рис. 9.14. Движение диска, по направлению совпадающее с собственным вращением (слева) и противоположное ему (справа).

в плоскости 1-2 нанесена штриховой линией, сам ротор изображен в виде затененного круга. Если направления вращений совпадают ($\nu = \omega_2$), то диск ротора перемещается так, что в неподвижной точке P находится все время одна и та же точка диска. Наблюдателю, вращающемуся вместе с диском, положение диска и деформация его вала кажутся неизменными. Встречное движение при

скоростях ω_1 и ω_3 кинематически может быть представлено качением некоторой окружности PK, связанной с ротором, по внутренней стороне неподвижной окружности SK вдвое большего радиуса. Центр диска M перемещается по окружности с угловой скоростью $\nu = -\omega$ навстречу вращению самого диска. При таком движении направление деформации относительно материала вала непрерывно меняется и неизбежное внутреннее трение приводит к затуханию колебаний. При критических скоростях, соответствующих совпадающим направлениям вращений, такое демпфирование не происходит.

Формы колебаний при критических скоростях изображены на рис. 9.15.

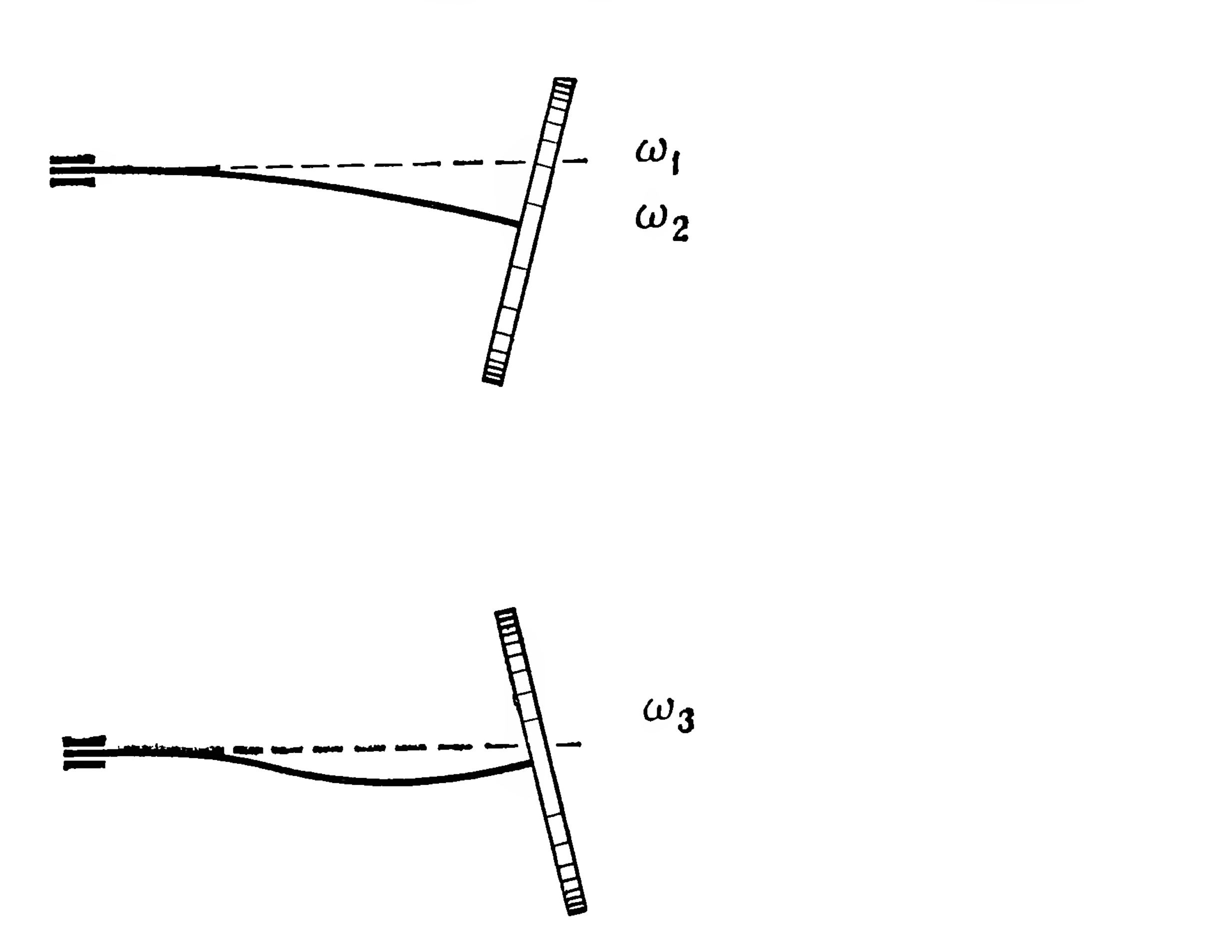


Рис. 9.15. Формы колебаний при критических угловых скоростях ω_1, ω_2, ω_3.

9.3.2. Критические скорости вращения роторов с бóльшим числом степеней свободы. Метод, использованный в п. 9.3.1 для исследования ротора с упругим валом, можно применить и для анализа систем с бóльшим числом степеней свободы. Однако многообразие возможных форм собственных колебаний и источников возмущений затрудняет формулировку каких-либо общих положений, относящихся к таким системам.

Большинство практических задач решается численными методами. С помощью электронных вычислительных машин решение систем даже с большим числом степеней свободы не вызывает затруднений. В связи с этим целесообразно саму формулировку задачи привести к виду, удобному для решения на электронных машинах. В этом отношении очень удобна матричная форма записи уравнений (гл. 5). Во всех рассмотренных случаях уравнения движения в матричной форме записываются так:

$$a_{\alpha\gamma}\ddot{x}_\alpha + b_{\alpha\gamma}\dot{x}_\alpha + c_{\alpha\gamma}x_\alpha = E_\gamma(t), \tag{9.38}$$

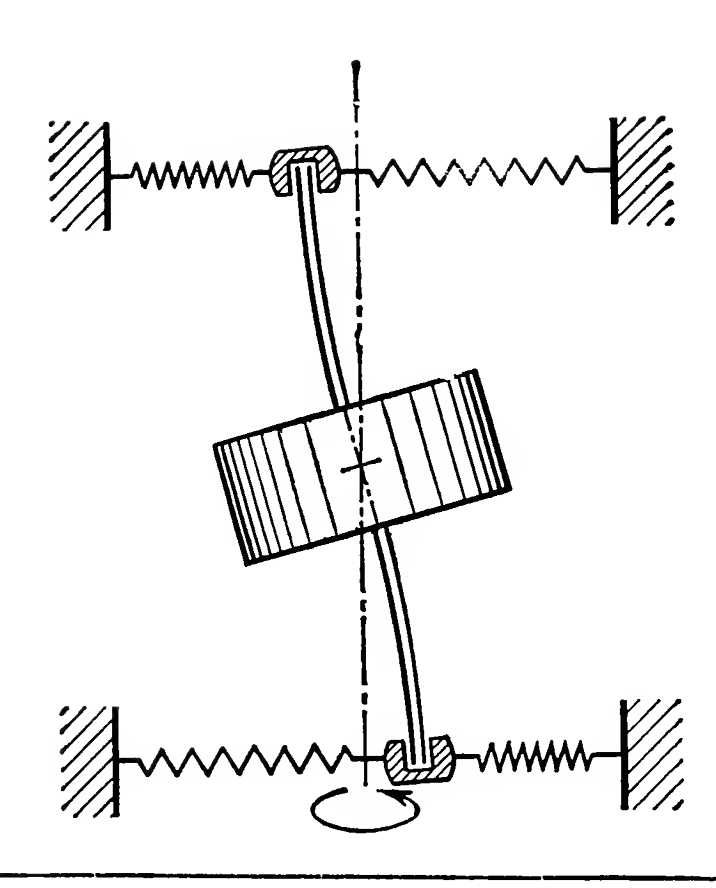


Рис. 9.16. Ротор с упруго закрепленными подшипниками.

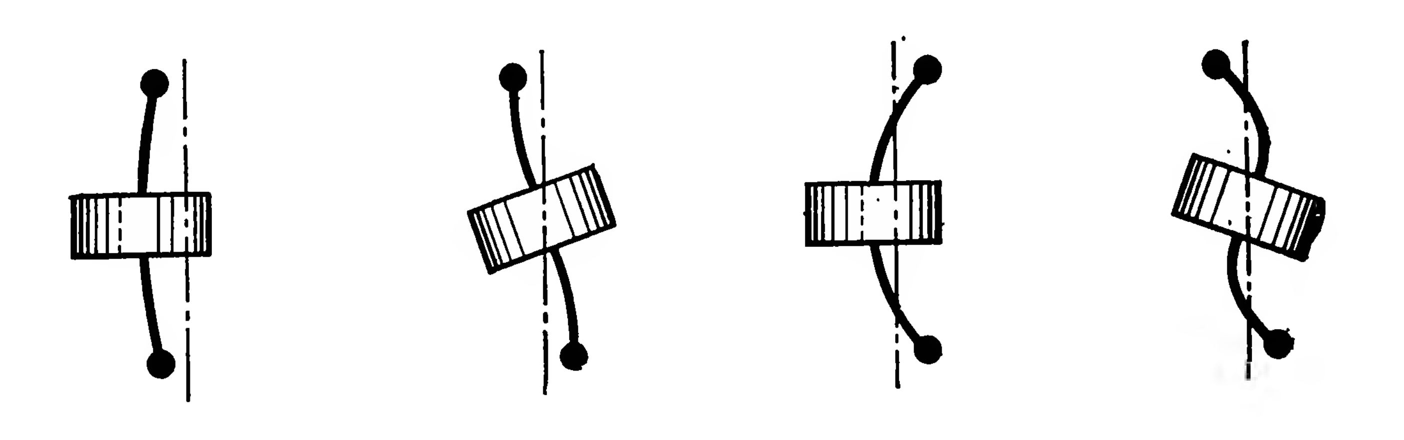


Рис. 9.17. Формы собственных колебаний для ротора, изображенного на рис. 9.16.

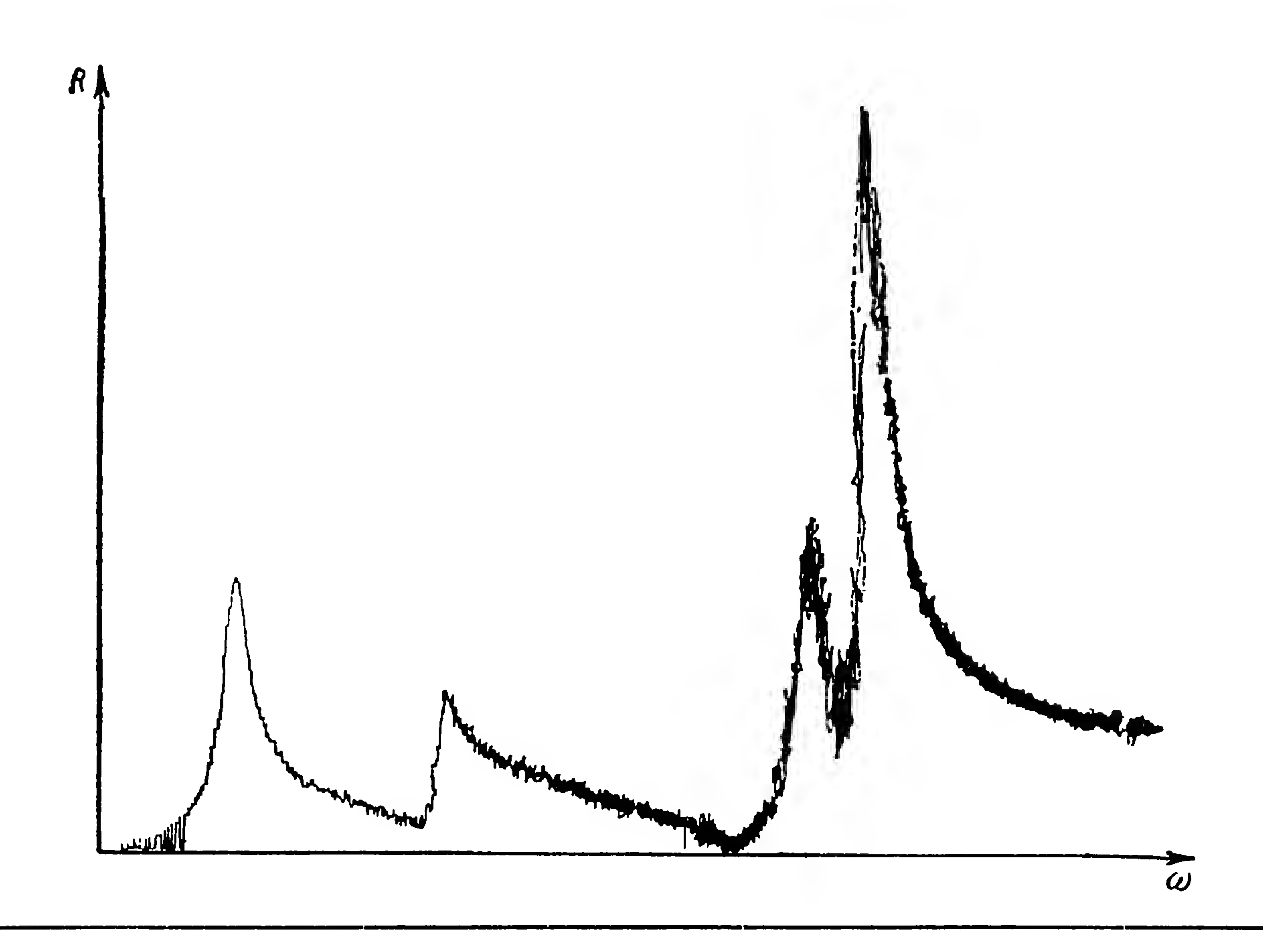


Рис. 9.18. Экспериментальные резонансные кривые для ротора, изображенного на рис. 9.16.

Например, для рассмотренного в п. 9.2.1 гироскопа в кардановом подвесе с учетом упругости вала и неуравновешенности ротора уравнения (9.9) и (9.14) соответствуют уравнению (9.38) при $x_\alpha = [\alpha, \beta, \alpha^R, \beta^R]$ с матрицами

$$a_{\alpha\gamma} = \begin{bmatrix} A^S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^R \end{bmatrix}, \quad b_{\alpha\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \\ 0 & 0 & -H & 0 \end{bmatrix},$$

$$c_{\alpha\gamma} = \begin{bmatrix} c_\alpha + c & 0 & -c & 0 \\ 0 & c_\beta + c & 0 & -c \\ -c & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & c \end{bmatrix}, \quad E_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \sin\omega_{30}t \\ (A^R - C^R)\,\varepsilon\omega_{30}^2 \cos\omega_{30}t \end{bmatrix}.$$

Матрица $b_{\alpha\gamma}$ как чисто гироскопическая антисимметрична, матрицы же $a_{\alpha\gamma}$ и $c_{\alpha\gamma}$ симметричны.

Несколько более сложная система изображена на рис. 9.16. Она может рассматриваться в качестве модели гироскопа с гибким валом при упругом креплении подшипников, массой которых нельзя пренебречь. Если число оборотов ротора известно, то при плоском движении подшипников и центра масс ротора система имеет восемь степеней свободы. Используя матрицу-столбец (запишем ее в виде строки)

$$x_\alpha = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8], \tag{9.39}$$

уравнения движения системы можно привести к виду (9.38) с матрицами $a_{\alpha\gamma}$, $b_{\alpha\gamma}$ и $c_{\alpha\gamma}$ размера 8×8. По ним могут быть найдены собственные частоты, формы собственных колебаний, а также (при заданных возмущениях) и частотные характеристики. Формы собственных колебаний системы, изображенной на рис. 9.16, представлены на рис. 9.17. Рис. 9.18 воспроизводит резонансную кривую системы, полученную экспериментально и вычерченную самописцем. Возмущение создавалось неуравновешенностью ротора.

Подобным образом можно исследовать любые часто встречающиеся на практике конструкции с несколькими дисками или роторами, насаженными на общий вал. Этот вопрос подробно рассмотрен в литературе, и мы не будем на нем останавливаться.

9.3.3. Влияние асимметрии ротора и вала. Если система асимметрична, то наряду с описанными выше явлениями имеют место и другие эффекты. Они могут относиться как к самому ротору, так и к валу или к подшипникам. Если, например, жесткость вала различна в разных направлениях, как у вала со шлицем или с сечением прямоугольной формы, то существуют два взаимно

перпендикулярных направления главных осей упругости[1]). Поскольку эти главные оси вращаются вместе с валом, его упругие свойства относительно неподвижных осей меняются с угловой частотой, равной удвоенной скорости вращения. В соответствующих уравнениях, например в уравнениях (9.29), для свободно вращающегося диска коэффициенты a, b, c становятся функциями времени, что служит источником параметрического возбуждения и приводит к появлению дополнительных резонансных областей (см., например, Тондл [68]).

Для роторов, у которых все три главных момента инерции различны (например, для двухлопастного пропеллера), вследствие асимметрии масс появляются дополнительные области критических скоростей. Нетрудно установить, что при очень высоких скоростях гироскопические силы должны доминировать над упругими силами, и поэтому вращение ротора вокруг средней главной оси инерции должно быть неустойчивым. Если доминируют упругие силы, то свойства системы приближаются к свойствам вращающегося упругого вала, нагруженного сосредоточенной массой (без гироскопических эффектов). Промежуточные переходы от областей неустойчивости, обусловленных упругими свойствами, к областям неустойчивости, связанным с действием гироскопических эффектов при высоких скоростях вращения, подробно исследованы Кренделлом и Брозенсом [69]. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь то обстоятельство, что особое значение имеет взаимная ориентация главных осей инерции и главных осей упругости. При заданной асимметрии масс и заданных жесткостях вала области неустойчивости минимальны, если ось большего главного момента инерции в плоскости, перпендикулярной оси вращения, совпадает с осью наименьшей жесткости. Это соответствует такой ориентации осей, при которой собственные частоты колебаний невращающегося ротора ($\omega=0$) наиболее удалены одна от другой.

[1]) Под главными осями упругости в данном случае подразумеваются оси, для которых жесткость вала на изгиб принимает экстремальные значения. — *Прим. ред.*

Глава 10

Элементы инженерной теории гироскопов

Рассмотренные в гл. 5 возможности общей теории гироскопических систем представляют особую ценность и полезны при расчетах гироскопических приборов, используемых в технике. Однако во многих случаях путь расчета, ведущий через точные уравнения движения, слишком труден и утомителен. Кроме того, реальные системы по большей части настолько сложны, что интегрирование общих уравнений движения возможно лишь для конкретных численных значений параметров. Поэтому в гл. 5 были намечены два пути, позволяющие при определенных ограничениях прийти к приближенным уравнениям: в § 5.2 были выведены и исследованы уравнения для расчета *малых колебаний*, а в § 5.3 было принято, что гироскопы являются *быстровращающимися*. Представляется, однако, желательным дополнить полученные выше в весьма общем виде результаты следующим образом:

1) должен быть указан путь, непосредственно приводящий к необходимым приближенным уравнениям;

2) приближенные уравнения должны быть распространены на весьма важный случай подвижных систем отсчета;

3) должна быть найдена такая форма уравнений гироскопа, которая облегчала бы согласование ее с обычными методами теории регулирования. Для этой цели удобны структурные схемы, передаточные функции и передаточные матрицы.

10.1. Упрощенные уравнения движения гироскопических систем

На примере гироскопического маятника в кардановом подвесе покажем вывод уравнений движения, основанный непосредственно на теореме о кинетическом моменте. Такой путь имеет особое значение и для получения приближенных уравнений, играющих важную роль в технике.

Пусть дан гироскопический маятник в кардановом подвесе согласно рис. 10.1, и пусть ось его внешней рамки составляет угол δ с вертикалью. Пусть направление оси ротора определяется кардановыми углами α и β, причем при $\alpha = 0$ ось внутренней рамки (ось 2) горизонтальна. При $\beta = 0$ плоскости обеих рамок взаимно перпендикулярны. Так же как и выше при анализе гироскопа в

кардановом подвесе (гл. 4), примем, что все три оси координат одновременно являются главными осями отдельных тел, образующих систему: внешней рамки, внутренней рамки и ротора (мы предполагаем, что ротор симметричен).

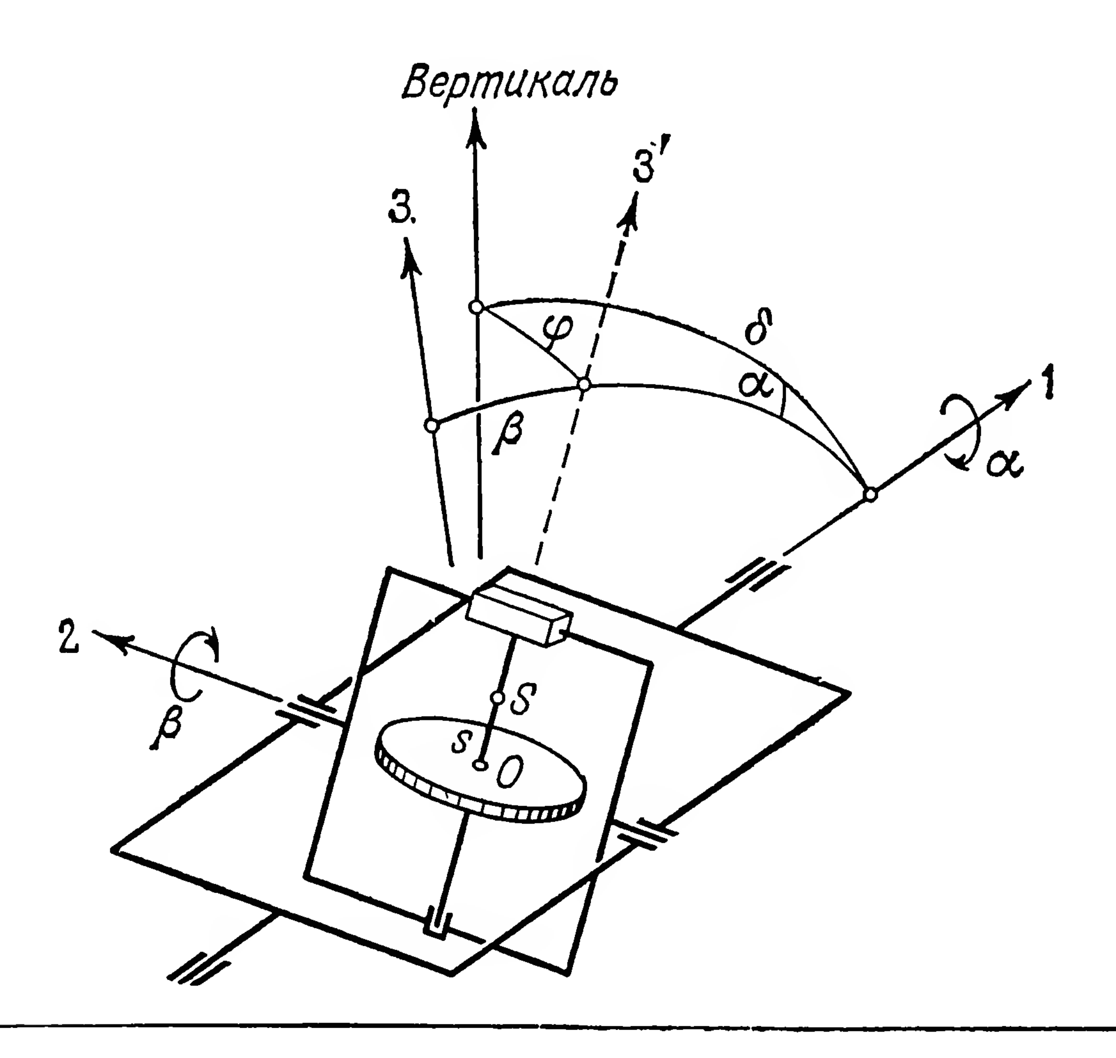


Рис. 10.1. Гироскопический маятник в кардановом подвесе с наклонной осью внешней рамки и связанная с внешней рамкой система отсчета 1, 2, 3.

Согласно теореме о кинетическом моменте, составим уравнения движения в системе координат 1, 2, 3, связанной с внешней рамкой. Так как она вращается относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью $\dot{\alpha}$, мы получим

$$\frac{d' H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k = M_i, \tag{10.1}$$

где

$$\Omega_i = (\dot{\alpha},\ 0,\ 0).$$

Кинетический момент H_i складывается из трех составляющих соответственно трем отдельным телам системы:

$$H_i = H_i^R + H_i^J + H_i^A.$$

Используя обозначения (4.31) и (4.32), после приведения составляющих кинетического момента к осям, связанным с внешней рамкой, получаем

$$H_i = \begin{bmatrix} A^A\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A^J\cos^2\beta + C^J\sin^2\beta)\,\dot{\alpha} \\ B^J\dot{\beta} \\ (C^J - A^J)\,\dot{\alpha}\,\sin\beta\cos\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^R\,\dot{\alpha}\cos^2\beta + C^R\omega_3'\sin\beta \\ A^R\dot{\beta} \\ -A^R\dot{\alpha}\sin\beta\cos\beta + C^R\omega_3'\cos\beta \end{bmatrix}. \tag{10.2}$$

Прежде чем подставить это выражение в (10.1), рассмотрим уравнение моментов относительно оси 3'. Если суммарный момент внешних по отношению к ротору сил относительно этой оси равен нулю, то вследствие $M_3' = 0$ и $A^R = B^R$ (см. также (4.35)) имеем

$$C^R\omega_3' = C^R(\dot\gamma + \dot\alpha\sin\beta) = C^R\omega_0 = H_3' = H = \text{const}. \qquad (10.3)$$

Таким образом, здесь, как и далее, мы обозначаем через H величину не общего кинетического момента, а его составляющей (всегда преобладающей) — собственного кинетического момента ротора (относительно его оси симметрии). Подставляя (10.2) в (10.1) и принимая во внимание (10.3), мы получаем следующие уравнения:

$$[A\cos^2\beta + (A^A + C^J)\sin^2\beta]\,\ddot\alpha - (A^R + A^J - C^J)\sin 2\beta\,\dot\alpha\dot\beta + \\ + H\cos\beta\,\dot\beta = M_1, \qquad (10.4)$$

$$B\ddot\beta + (A^R + A^J - C^J)\sin\beta\cos\beta\,\dot\alpha^2 - H\cos\beta\,\dot\alpha = M_2,$$

где

$$A = A^A + A^J + A^R \quad \text{и} \quad B = B^J + A^R.$$

Левые части этих уравнений совпадают с полученными выше при помощи метода Лагранжа уравнениями (4.61).

Как видно из рис. 10.1, моменты M_1 и M_2 возникают у гироскопического маятника вследствие того, что центр тяжести S не совпадает с точкой опоры O (точка пересечения осей рамок). Если точка S расположена на оси 3' на расстоянии s от точки O, то момент силы тяжести равен

$$M_i = \varepsilon_{ijk}s_jG_k, \qquad (10.5)$$

где

$$s_j = s\begin{bmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad G_k = -G\begin{bmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta\sin\alpha \\ \sin\delta\cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad (10.6)$$

Координаты вектора момента таковы:

$$\begin{aligned} M_1 &= Gs\sin\delta\cos\beta\sin\alpha, \\ M_2 &= -Gs(\cos\delta\cos\beta - \sin\delta\sin\beta\cos\alpha). \end{aligned} \qquad (10.7)$$

Подставив полученные выражения в (10.4), получим точные уравнения движения гироскопического маятника в кардановом подвесе с учетом наклона оси внешней рамки. Легко видеть, что частными решениями этих уравнений будут следующие положения равновесия:

$$\begin{aligned} &1)\ \sin\alpha_0 = 0,\ \cos(\delta + \beta_0) = 0, \\ &\quad \text{т. е. } \alpha_0 = 0,\ \pm\pi,\ \ldots, \\ &\qquad \beta_0 = \pm\pi/2 - \delta,\ \pm 3\pi/2 - \delta,\ \ldots; \\ &2)\ \cos\alpha_0 = 0,\ \cos\beta_0 = 0, \\ &\quad \text{т. е. } \alpha_0 = \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \ldots, \\ &\qquad \beta_0 = \pm\pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \ldots. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Первое решение соответствует вертикальной оси ротора, причем центр тяжести может находиться как выше, так и ниже неподвижной точки карданова подвеса. Второе решение указывает на то, что обе рамки лежат в одной вертикальной плоскости (*складывание рамок*).

Полученные уравнения движения можно шаг за шагом упростить. Рассмотрим сначала возмущенное движение относительно первого положения равновесия (10.8). Мы можем положить

$$\beta = \beta_0 + x = \pi/2 - \delta + x \tag{10.9}$$

и, кроме того, считать α и x малыми величинами. Полагая малыми первого порядка также и производные от α и x, как это обычно принято в теории малых колебаний, и пренебрегая величинами второго и высших порядков малости в (10.4) и (10.7), мы приходим к следующим линейным уравнениям:

$$\begin{gathered} [A\cos^2\beta_0 + (A^A + C^J)\sin^2\beta_0]\,\ddot{\alpha} + H\cos\beta_0\,\dot{x} - Gs\cos^2\beta_0\,\alpha = 0, \\ B\ddot{x} - H\cos\beta_0\dot{\alpha} - Gsx = 0. \end{gathered} \tag{10.10}$$

В частном случае горизонтальной оси внешней рамки ($\delta = \pi/2$, $\beta_0 = 0$, $x = \beta$), представляющем особый технический интерес, отсюда следует

$$\begin{gathered} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - Gs\alpha = 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} - Gs\beta = 0. \end{gathered} \tag{10.11}$$

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению специально для случая быстровращающегося гироскопа (большого значения кинетического момента H), покажем, что уравнения (10.11) могут быть выведены значительно проще непосредственно из теоремы о кинетическом моменте в неподвижной системе координат, ось 3 которой вертикальна (рис. 10.2). Для малых α и β получаем

$$H_i = \begin{bmatrix} A\dot{\alpha} + H\beta \\ B\dot{\beta} - H\alpha \\ H \end{bmatrix}, \quad M_i = \begin{bmatrix} Gs\alpha \\ Gs\beta \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10.12}$$

Подставив (10.12) в

$$\frac{dH_i}{dt} = M_i, \tag{10.13}$$

сразу получим уравнения (10.11). Соответственно могут быть выведены и уравнения (10.10), но при этом потребуется провести некоторые дополнительные выкладки.

Для вывода приближенных уравнений в случае быстровращающегося гироскопа можно воспользоваться методикой, изложенной в п. 5.3.1. Однако в частных случаях, подобных рассматриваемому гироскопическому маятнику, к необходимым упрощениям можно

прийти более простым путем. Покажем это на примере системы уравнений (10.11). Ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 - Gs & H\lambda \\ -H\lambda & B\lambda^2 - Gs \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$AB\lambda^4 + [H^2 - Gs(A+B)]\lambda^2 + G^2s^2 = 0, \qquad (10.14)$$

имеет корни

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1^2 = (\omega^N)^2 \\ -\lambda_2^2 = (\omega^P)^2 \end{aligned}\right\} = \frac{H^2 - Gs(A+B)}{2AB}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ABG^2s^2}{[H^2 - Gs(A+B)]^2}}\right]. \qquad (10.15)$$

На рис. 10.3 представлены графики собственных частот ω^N и ω^P в зависимости от кинетического момента H. Эти кривые можно

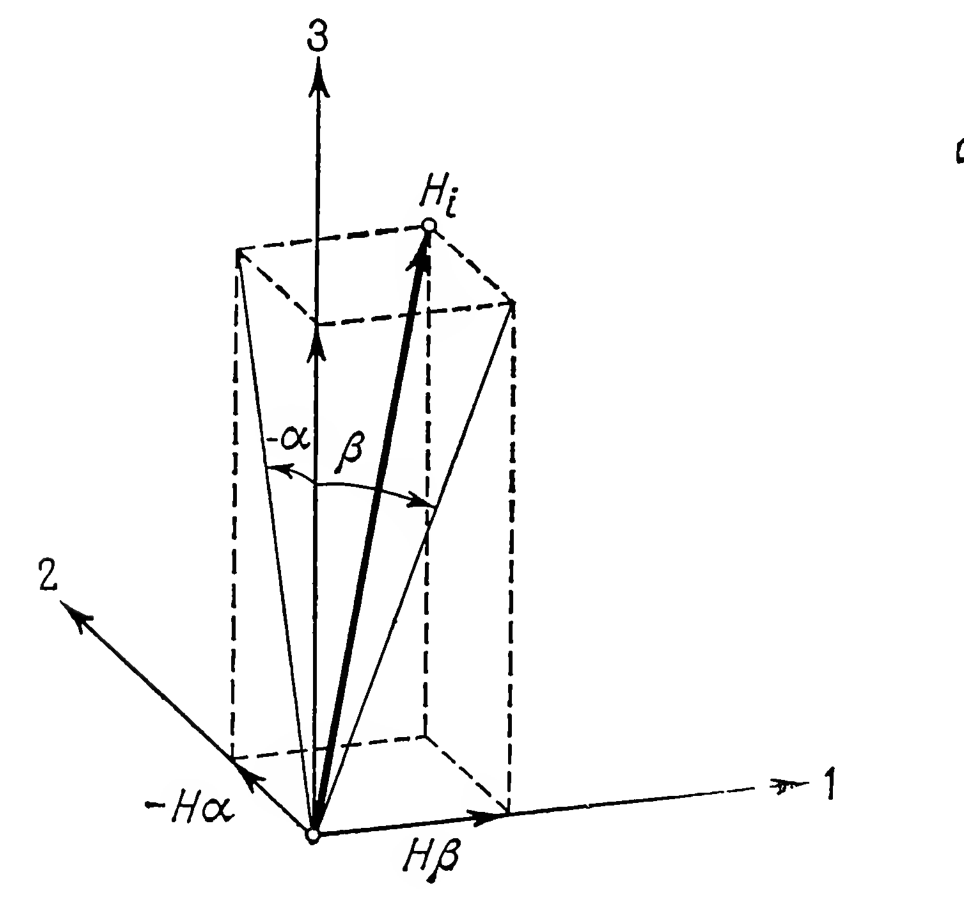


Рис. 10.2. К приближенной формуле для составляющих вектора кинетического момента H_i.

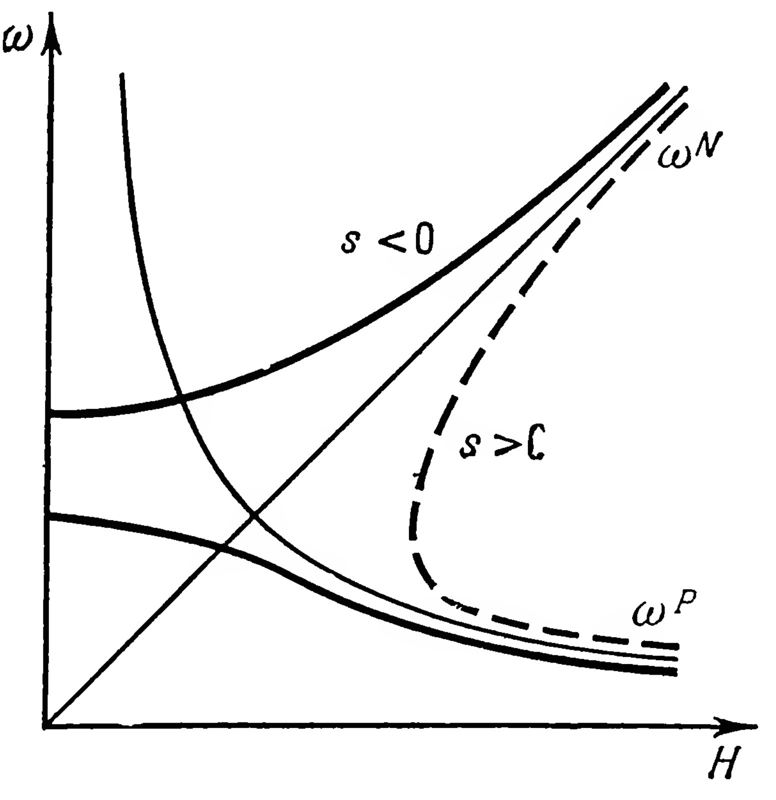


Рис. 10.3. Зависимость собственных частот ω^N и ω^P от кинетического момента H.

рассматривать как частные случаи исследованных выше кривых, показанных на рис. 3.22. При $H = 0$ мы получаем для частот колебаний выражения

$$\omega_0^N = \sqrt{-Gs/B}, \quad \omega_0^P = \sqrt{-Gs/A}, \qquad (10.16)$$

которые являются действительными числами только в случае маятника с нижним расположением центра тяжести ($s < 0$). Для большого H частоты будут

$$\omega^N \approx \frac{H}{\sqrt{AB}}, \quad \omega^P \approx \left|\frac{Gs}{H}\right| \qquad (10.17)$$

независимо от знака s. Эти формулы дают хорошее приближение для частот нутации и прецессии при достаточно большом кинетическом моменте H. На рис. 10.3 им соответствуют сплошные кривые, проведенные тонкой линией (прямая и гипербола).

К приближенным значениям (10.17) можно прийти двояким путем: либо разложив характеристическое уравнение (10.14) на множители, либо упростив исходные уравнения (10.11). Если момент H очень велик, то в уравнении (10.14) доминирует второе слагаемое. Тогда, поскольку $H^2 \gg Gs(A+B)$, уравнение можно разложить на множители:

$$AB\left(\lambda^2 + \frac{H^2}{AB}\right)\left(\lambda^2 + \frac{G^2s^2}{H^2}\right) \approx 0.$$

Корнями этого уравнения являются приближенные значения (10.17). Последние показывают, что при большом кинетическом моменте нутация не зависит от момента силы тяжести, а прецессия — от моментов инерции. Поэтому соответствующими составляющими можно пренебречь непосредственно в исходных уравнениях (10.11). Тогда нутационное движение может быть приближенно определено из системы уравнений

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &\approx 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &\approx 0, \end{aligned} \tag{10.18}$$

а прецессионное — из системы

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} - Gs\alpha &\approx 0, \\ -H\dot{\alpha} - Gs\beta &\approx 0. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Этому результату можно дать физическую интерпретацию: при нутационном движении быстровращающегося гироскопа уравновешиваются гироскопический и инерционный моменты, а при прецессионном движении определяющим является равновесие гироскопического момента и момента внешних сил. Этот результат можно положить в основу весьма общих приближенных расчетов гироскопических систем. Так, например, прецессионное движение, описываемое системой (10.4), можно найти из приближенных уравнений

$$\begin{aligned} H\cos\beta\,\dot{\beta} &\approx M_1, \\ -H\cos\beta\,\dot{\alpha} &\approx M_2. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Уравнения такого рода называют *техническими уравнениями гироскопа*. Иначе они называются также *уравнениями прецессионной теории*. Те же уравнения можно получить с помощью описанного в п. 5.3.1 общего метода приближений для случая быстровращающегося гироскопа.

Обращение к техническим уравнениям гироскопов равносильно пренебрежению нутационным движением. Для очень многих слу-

чаев применения гироскопов это вполне допустимо. Следует, однако, напомнить, что при этом наряду с нутационными колебаниями мы пренебрегаем и вызываемыми ими вторичными явлениями, например кинетическими уходами, исследованными в § 4.4. Их невозможно определить из приближенных уравнений. Если требуется описать эти эффекты, то можно применить прием, которым мы пользовались в § 4.4. При этом малыми считаются только углы отклонения, но не их производные по времени. Полученные таким образом приближенные уравнения еще содержат нелинейные члены. Они образуют своего рода промежуточную ступень между точными исходными уравнениями и уравнениями движения, линеаризованными методом малых колебаний.

Вывод приближенных уравнений теории гироскопов способом, продемонстрированным на выбранном выше примере, имеет смысл только при выполнении следующих условий:

1) ротор симметричен ($A^R = B^R$) и вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью;

2) нутационные колебания отсутствуют или весьма малы, т. е. кинетическая ось и ось симметрии ротора практически совпадают;

3) кинетический момент $H = C^R\omega_3'$ велик.

В связи с рассуждениями, проведенными нами на базе простого, но типичного примера, следует указать на исследования более общего характера, с которыми мы познакомились в § 5.2 и 5.3. Разобранный там пример гироскопа в трехрамном подвесе (п. 5.3.3) также показывает значение полученных здесь результатов.

10.2. Движение гироскопа относительно вращающейся системы координат

Описанный метод вывода приближенных уравнений остается в силе и в том случае, когда система отсчета вращается. При этом предполагается, что ось ротора лишь немного отклоняется от некоторого направления, неизменного в выбранной системе координат. Это направление обычно совпадает с положением равновесия. Для большого числа гироскопических приборов, например для различного рода поворотных гироскопов (гл. 15), названная предпосылка оправдывается. Если $\Omega_i = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ — вектор угловой скорости системы отсчета, то вектор кинетического момента H_i вместо прежнего выражения (10.12) может быть записан в виде

$$H_i = \begin{bmatrix} A(\dot\alpha + \Omega_1) + H\beta \\ B(\dot\beta + \Omega_2) - H\alpha \\ H \end{bmatrix}. \qquad (10.21)$$

При этом мы снова принимаем $M_3' = 0$, так что кинетический момент $H = C^R(\dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta + \Omega_3')$ постоянен. Обычно переносное вращение системы отсчета бывает столь медленным, что $\Omega_3' \ll \dot\gamma$.

Тогда одновременно $A\Omega_3 \ll H$ и $B\Omega_3 \ll H$. Учитывая эти соотношения, после подстановки (10.21) в (10.1) мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + H\Omega_3\alpha &= M_1 - A\dot{\Omega}_1 - H\Omega_2, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + H\Omega_3\beta &= M_2 - B\dot{\Omega}_2 + H\Omega_1. \end{aligned} \tag{10.22}$$

Из этих уравнений видно, что направление оси ротора относительно системы координат будет сохраняться только при наложении моментов

$$\begin{aligned} M_1 &= A\dot{\Omega}_1 + H\Omega_2, \\ M_2 &= B\dot{\Omega}_2 - H\Omega_1 \end{aligned} \tag{10.23}$$

относительно осей обеих рамок. Поэтому к приборам, не снабженным датчиками моментов ($M_1 = M_2 = 0$), уравнения (10.22) приложимы лишь при условии $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, т. е. при совпадении оси вращения системы координат с осью ротора в ее положении равновесия. Это имеет место, например, у гироскопических горизонтов на вираже, о чем речь пойдет ниже (гл. 12).

На вращение системы отсчета указывает не только появление возмущающих членов в правых частях уравнений (10.22), но и наличие по одному из них в левых частях. Эти составляющие можно воспринимать как дополнительные восстанавливающие или опрокидывающие моменты: при $\Omega_3 > 0$, т. е. при вращении системы координат в направлении вращения ротора, дополнительный момент является восстанавливающим, а при $\Omega_3 < 0$ — опрокидывающим. Названное свойство выявляет стремление оси ротора и оси вращения системы координат к одноименному параллелизму.

Рассмотрим простой пример гироскопического маятника, точка подвеса которого неподвижна относительно вращающейся Земли. Если ось внешней рамки горизонтальна и направлена на север, а ось ротора в положении равновесия направлена вертикально вверх, то

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \omega^E \cos\varphi \\ 0 \\ \omega^E \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{\Omega}_i = 0, \tag{10.24}$$

где φ — географическая широта и ω^E — угловая скорость Земли (рис. 10.4).

Вектор результирующего момента равен

$$M_i = \begin{bmatrix} Gs\alpha + M_1^* \\ Gs\beta + M_2^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

где Gs — момент силы тяжести, а $M_i^* = (M_1^*, M_2^*)$ — дополнительный момент. Подставив M_i в (10.22), получим уравнения движения

в виде

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + (H\omega^E \sin\varphi - Gs)\,\alpha &= M_1^*, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + (H\omega^E \sin\varphi - Gs)\,\beta &= M_2^* + H\omega^E \cos\varphi. \end{aligned} \qquad (10.25)$$

Чтобы ось ротора оставалась неподвижной относительно Земли, нужно сформировать дополнительный момент по закону

$$M_1^* = 0, \qquad M_2^* = -H\omega^E \cos\varphi.$$

Такой момент относительно оси внутренней рамки постоянно поддерживает горизонтальное положение плоскости внешней рамки.

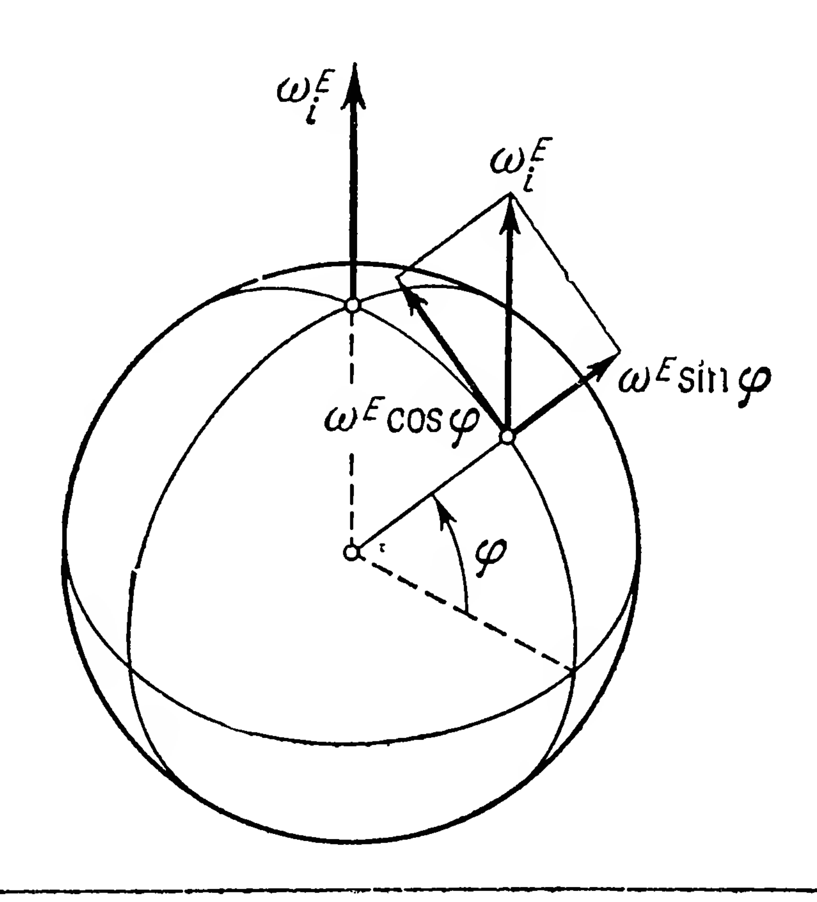


Рис. 10.4. Составляющие угловой скорости Земли ω_i^E для точки наблюдения с географической широтой φ.

Гироскопический маятник может совершать колебания около положения равновесия, которые нетрудно определить из левых частей уравнений (10.25). При достаточно большом H (быстровращающийся гироскоп) мы получим следующие приближенные значения обеих возможных частот:

$$\omega^N \approx \frac{H}{\sqrt{AB}}, \qquad \omega^P \approx \left| \omega^E \sin\varphi - \frac{Gs}{H} \right|. \qquad (10.26)$$

Выражение частоты нутаций осталось таким же, как и в (10.17), а в выражении частоты прецессии появилась составляющая, зависящая от вращения Земли; ее следует прибавить или отнять в зависимости от знака второго слагаемого. Знак этот проще всего определить, решая уравнения (10.25) согласно прецессионной теории и полагая правые части равными нулю. Это равносильно пренебрежению членами, содержащими ускорения. Мы можем, таким

образом, преобразовать уравнения (10.25) к виду

$$-iH\dot{z} + (H\omega^E \sin\varphi - Gs)z = 0, \tag{10.27}$$

где $z = \alpha + i\beta$. Решение этого уравнения таково:

$$z = Z_0 \exp[-i(\omega^E \sin\varphi - Gs/H)t]. \tag{10.28}$$

Отсюда следует, что при $s = 0$ (астатический маятник) прецессия происходит в направлении против вращения Земли с угловой скоростью $\omega^P = |\omega^E \sin\varphi|$. Для гироскопа с верхним расположением центра тяжести ($s > 0$) следует брать в скобках разность обеих составляющих, а для гироскопа с нижним расположением центра тяжести ($s < 0$) — сумму. В предельном случае $Gs = H\omega^E \sin\varphi$ ось ротора не меняет своего положения относительно Земли. Земной наблюдатель будет воспринимать такой гироскоп как астатический, несмотря на то что центр масс гироскопа расположен выше точки подвеса.

10.3. Передаточные функции гироскопа

Гироскопические приборы являются структурными элементами, у которых можно определить вход и выход в смысле теории регулирования. Математическая связь между величинами на входе и величинами на выходе может быть описана с помощью передаточных функций или передаточных матриц; структурное построение передаточных звеньев наглядно представляется с помощью структурных схем.

10.3.1. Структурная схема гироскопического маятника. Покажем составление различных вариантов структурных схем на примере гироскопического маятника в кардановом подвесе, снабженного датчиками момента по осям обеих рамок. Предусмотрев в уравнениях (10.11) моменты M_1 и M_2, развиваемые названными датчиками момента, и введя в них обычный в теории линейных систем оператор $p = d/dt$, получим уравнения малых колебаний гироскопического маятника в форме

$$\begin{aligned} Ap^2\alpha + Hp\beta - Gs\alpha &= M_1, \\ Bp^2\beta - Hp\alpha - Gs\beta &= M_2. \end{aligned} \tag{10.29}$$

Разрешая первое уравнение относительчо β, а второе относительно α, находим

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{Hp}(M_1 - Ap^2\alpha + Gs\alpha), \\ \alpha &= -\frac{1}{Hp}(M_2 - Bp^2\beta + Gs\beta). \end{aligned} \tag{10.30}$$

Эти уравнения можно наглядно представить в виде структурной схемы, изображенной на рис. 10.5. Каждый элемент снабжен

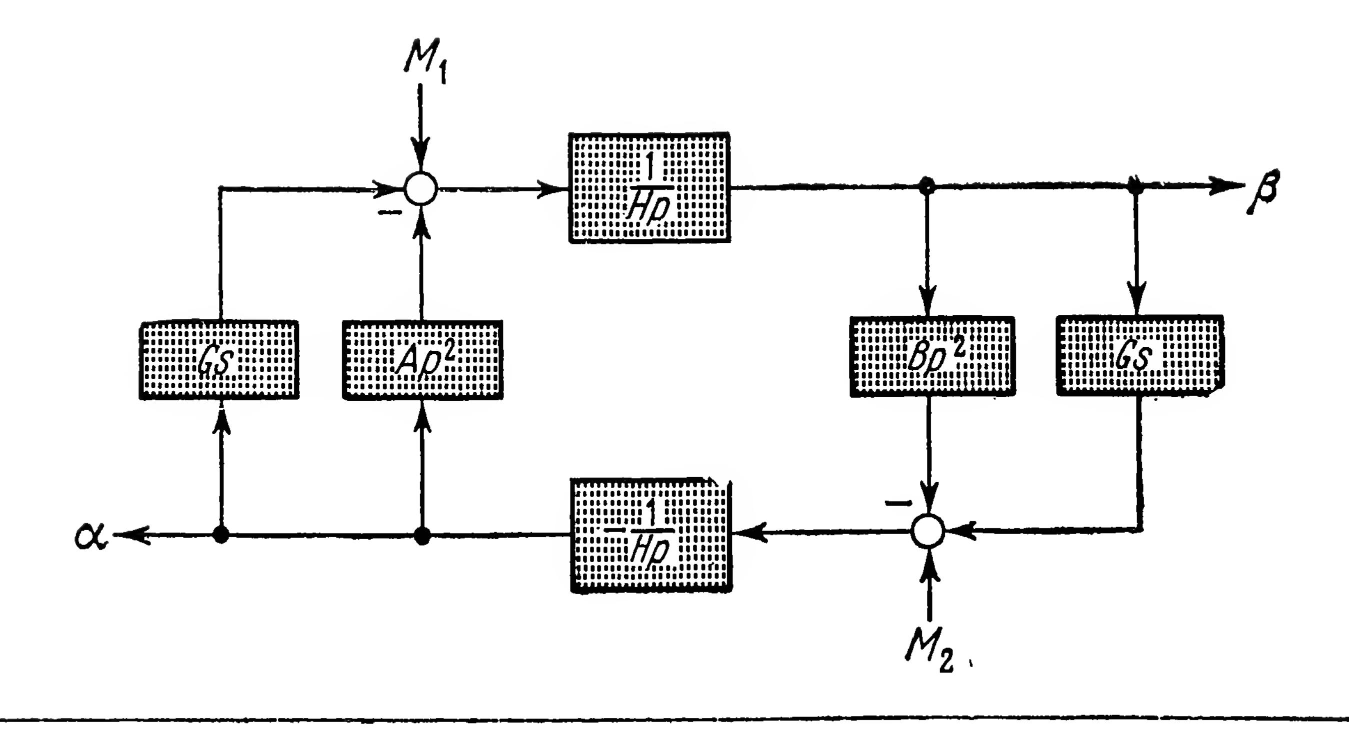


Рис. 10.5. Первый вариант структурной схемы для системы уравнений (10.29).

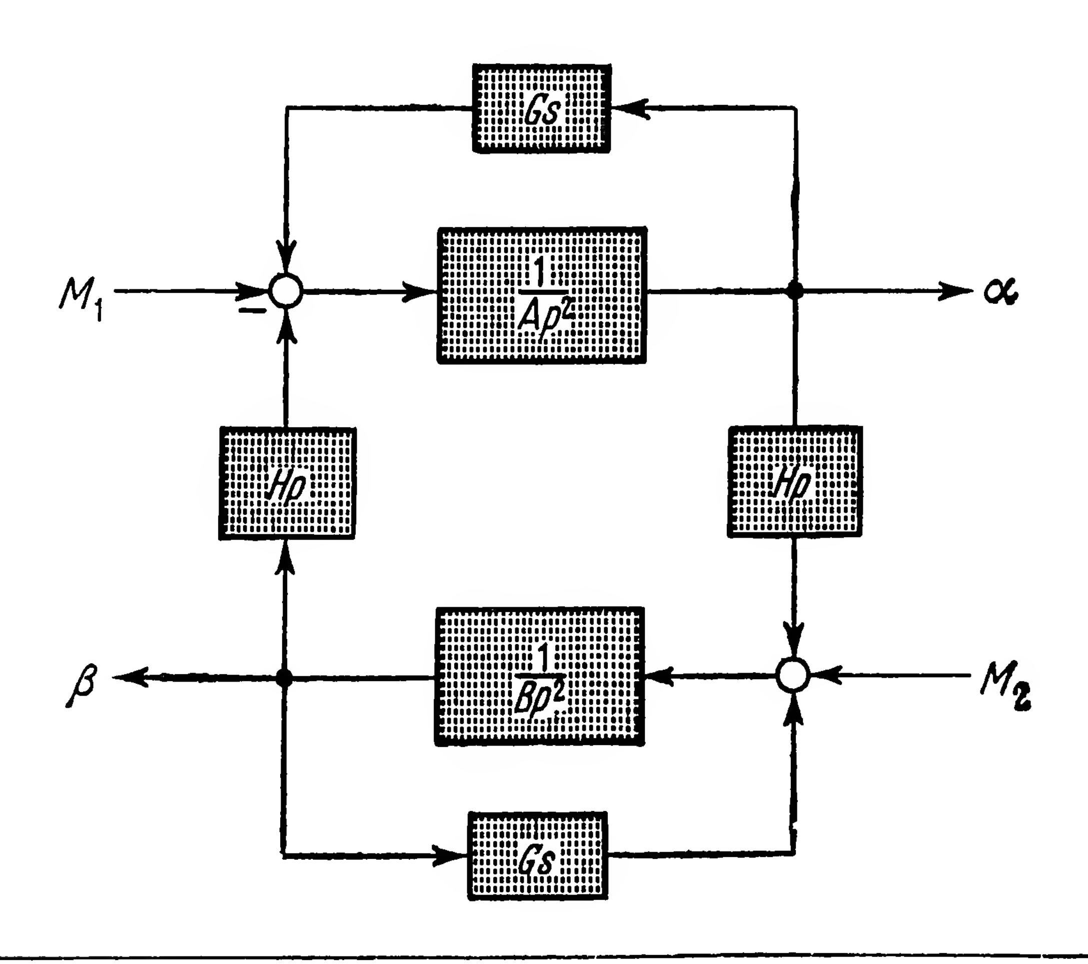


Рис. 10.6. Второй вариант структурной схемы для системы уравнений (10.29).

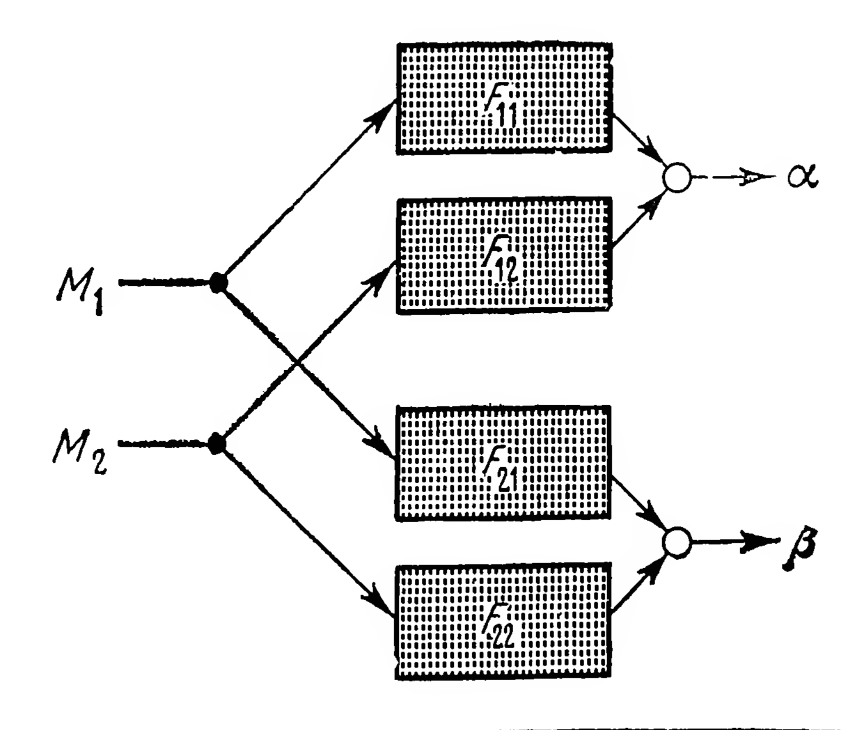


Рис. 10.7. Передаточные функции.

надписью, которая указывает оператор, применяемый к данной входной величине: оператор p означает дифференцирование, p^2 указывает на двукратное дифференцирование, $1/p$ соответствует интегрированию; все другие фигурирующие в клетках величины играют роль коэффициентов. Точками изображены разветвления, а кружками — узлы, причем знак плюс означает сложение, а знак минус — вычитание сходящихся в узле величин. Стрелками указаны направления сигналов. В разбираемом нами примере M_1 и M_2 являются входными величинами, а α и β — выходными. Гироскоп может быть истолкован как четырехполюсник и рассчитан методами теории четырехполюсников.

Структурную схему иного вида можно получить, разрешая уравнения (10.29) по переменным в первых членах:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{Ap^2}(M_1 - Hp\beta + Gs\alpha), \\ \beta &= \frac{1}{Bp^2}(M_2 + Hp\alpha + Gs\beta). \end{aligned} \tag{10.31}$$

Согласно этим равенствам построена структурная схема, представленная на рис. 10.6. Она эквивалентна схеме рис. 10.5, так как обе соответствуют одним и тем же уравнениям. Придерживаясь общих правил преобразования структурных схем (Оппельт [70]), можно построить ряд других вариантов. Остановимся на трех из них. Первый (рис. 10.7) удобен для теоретического анализа, тогда как два других (рис. 10.8 и 10.9) больше подходят для исследования поведения системы на аналоговых вычислительных машинах.

10.3.2. Передаточные функции и передаточные матрицы. Обозначенные на элементах рис. 10.7 функции называются передаточными функциями, так как они непосредственно определяют зависимость между выходной и входной величинами. В разбираемом нами примере гироскопического маятника имеются четыре такие функции, которые можно найти, рассматривая уравнения (10.29) как алгебраические и решая их относительно α и β:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{N}[(Bp^2 - Gs) M_1 - HpM_2], \\ \beta &= \frac{1}{N}[HpM_1 + (Ap^2 - Gs) M_2], \end{aligned} \tag{10.32}$$

где

$$N = (Ap^2 - Gs)(Bp^2 - Gs) + H^2p^2.$$

Отсюда получаются передаточные функции

$$\begin{aligned} F_{11}(p) &= \frac{Bp^2 - Gs}{N}, & F_{12}(p) &= -\frac{Hp}{N}, \\ F_{21}(p) &= \frac{Hp}{N}, & F_{22}(p) &= \frac{Ap^2 - Gs}{N}. \end{aligned} \tag{10.33}$$

В этих выражениях роль переменной играет $p = i\omega$. Сравнивая их с характеристическим уравнением (10.14), мы можем констатировать, что передаточные функции имеют полюсы при $p = i\omega^N$ и $p = i\omega^P$, т. е. при собственных частотах нутации и прецессии. Кроме того, функции F_{11} и F_{22} при $s < 0$ имеют нули для тех частот, с которыми колеблется вокруг осей 1 и 2 маятник с центром тяжести, расположенным ниже точки подвеса при невращающемся гироскопе. Распределение нулей и полюсов передаточной функции и в особенности ее изменение при вариации параметров системы позволяют выяснить особенности структурного элемента, важные с точки зрения его динамических свойств (Оппельт [70]).

Используя равенства (10.33), можно записать уравнения (10.32) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \qquad (10.34)$$

Матрица передаточных функций F называется передаточной матрицей. В зависимости от характера входов и выходов могут быть получены различные передаточные матрицы. Если, например, астатический гироскоп в кардановом подвесе ($s = 0$, $M_1 = M_2 = 0$) используется для определения углов поворота движущегося объекта, то из уравнений (10.22), охватывающих этот случай, находим

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^* & F_{12}^* \\ F_{21}^* & F_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{bmatrix},$$

причем Ω_1, Ω_2 — входные величины, а F_{ij}^* — передаточные функции:

$$\begin{aligned} F_{11}^* &= -\frac{p}{N^*}[H^2 + A(Bp^2 + H\Omega_3)], \\ F_{21}^* &= -F_{12}^* = \frac{H^2\Omega_3}{N^*}, \\ F_{22}^* &= -\frac{p}{N^*}[H^2 + B(Ap^2 + H\Omega_3)], \end{aligned} \qquad (10.35)$$

где

$$N^* = (Ap^2 + H\Omega_3)(Bp^2 + H\Omega_3) + H^2p^2.$$

В данном случае передаточная матрица зависит еще и от Ω_3. Если пользоваться техническими уравнениями гироскопа, т. е. не принимать во внимание нутации, то передаточные функции упрощаются:

$$\begin{aligned} F_{11}^* &= F_{22}^* = -\frac{p}{p^2 + \Omega_3^2}, \\ F_{21}^* &= -F_{12}^* = \frac{\Omega_3}{p^2 + \Omega_3^2}. \end{aligned} \qquad (10.36)$$

При $\Omega_3 = 0$ функции F_{21} и F_{12}, выражающие перекрестные связи, отпадают, и тогда

$$\alpha = -\frac{\Omega_1}{p} \quad \text{и} \quad \beta = -\frac{\Omega_2}{p}.$$

Так как для $\Omega_3 = 0$ в предположении малости углов

$$\frac{\Omega_1}{p} = \int \Omega_1 \, dt = \alpha^F \quad \text{и} \quad \frac{\Omega_2}{p} = \int \Omega_2 \, dt = \beta^F,$$

углы α и β относительного поворота рамок соответствуют фактическим углам поворота объекта α^F и β^F. В этом случае прибор выполняет функции *позиционного гироскопа* (гл. 12), поскольку его можно применить для измерения позиционных углов (ориентации).

10.3.3. Структурные схемы для исследований с помощью аналоговых вычислительных машин. Исследованные нами уравнения можно решить также с помощью аналоговых вычислительных машин. В этом случае для их программирования можно использовать структурную схему. Правда, схемы, представленные на рис. 10.5 и 10.6, для этой цели пока не пригодны. Они включают операции дифференцирования, тогда как аналоговая вычислительная машина, как правило, может производить лишь интегрирование. Поэтому целесообразно преобразовать структурную схему так, чтобы она включала только интегрирование. С этой целью удобнее всего разрешить уравнения (10.29) относительно старших производных, а затем произвести интегрирование в два этапа. На рис. 10.8 изображена полученная таким путем структурная схема. Ее можно непосредственно преобразовать в схему программирования аналоговой вычислительной машины, как показано на рис. 10.9. При составлении схем программирования следует учитывать, что каждый интегрирующий усилитель меняет знак величины. При этом из суммы

$$M_1 - H\dot{\beta} + Gs\alpha = A\ddot{\alpha},$$

подаваемой на вход первого верхнего интегратора, на выходе получится величина $-A\dot{\alpha}$.

Структурную схему, позволяющую произвести необходимые расчеты, можно составить и для системы уравнений (10.22) во вращающейся системе координат применительно к астатическому гироскопу с датчиками момента (рис. 10.10). В этом случае в качестве входных величин удобнее всего взять производные $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$. Величину Ω_3 следует причислить к возмущениям; вместе с α (или β) и коэффициентом H она образует возмущающий член $H\Omega_3\alpha$ (или $H\Omega_3\beta$). Для программирования, согласно рис. 10.10, требуется шесть интеграторов. Схему можно еще более расширить в том случае, когда моменты M_1 и M_2 сами зависят, например, от выходных величин (или от входных, или от тех и других вместе), как это имеет место в контрольных устройствах позиционных гироскопов (гл. 12).

Обратим еще внимание на характерную трудность, которая возникает при попытке решить уравнения движения гироскопической системы на электронных вычислительных машинах. Собственные

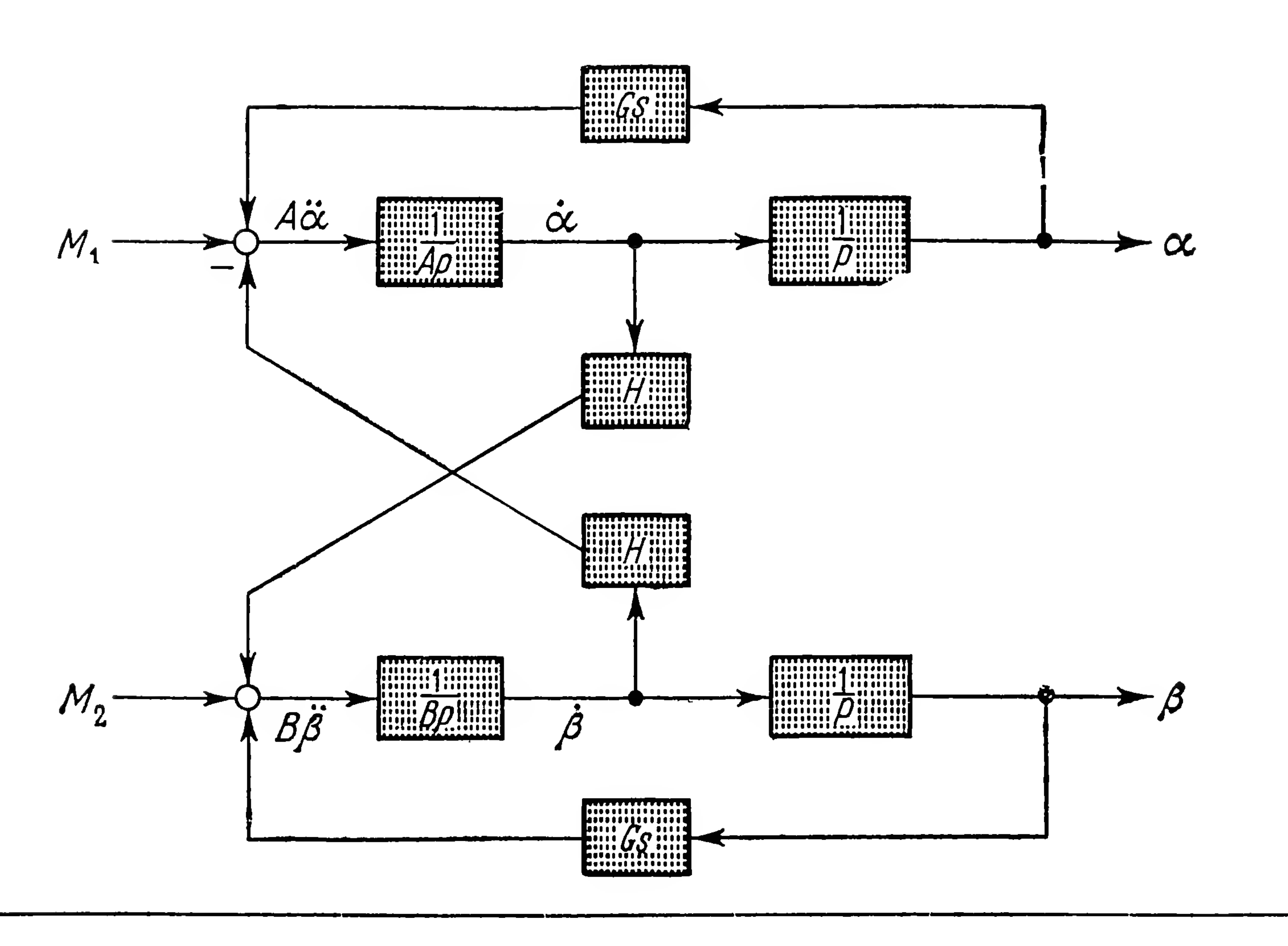


Рис. 10.8. Третий вариант структурной схемы для системы уравнений (10.29).

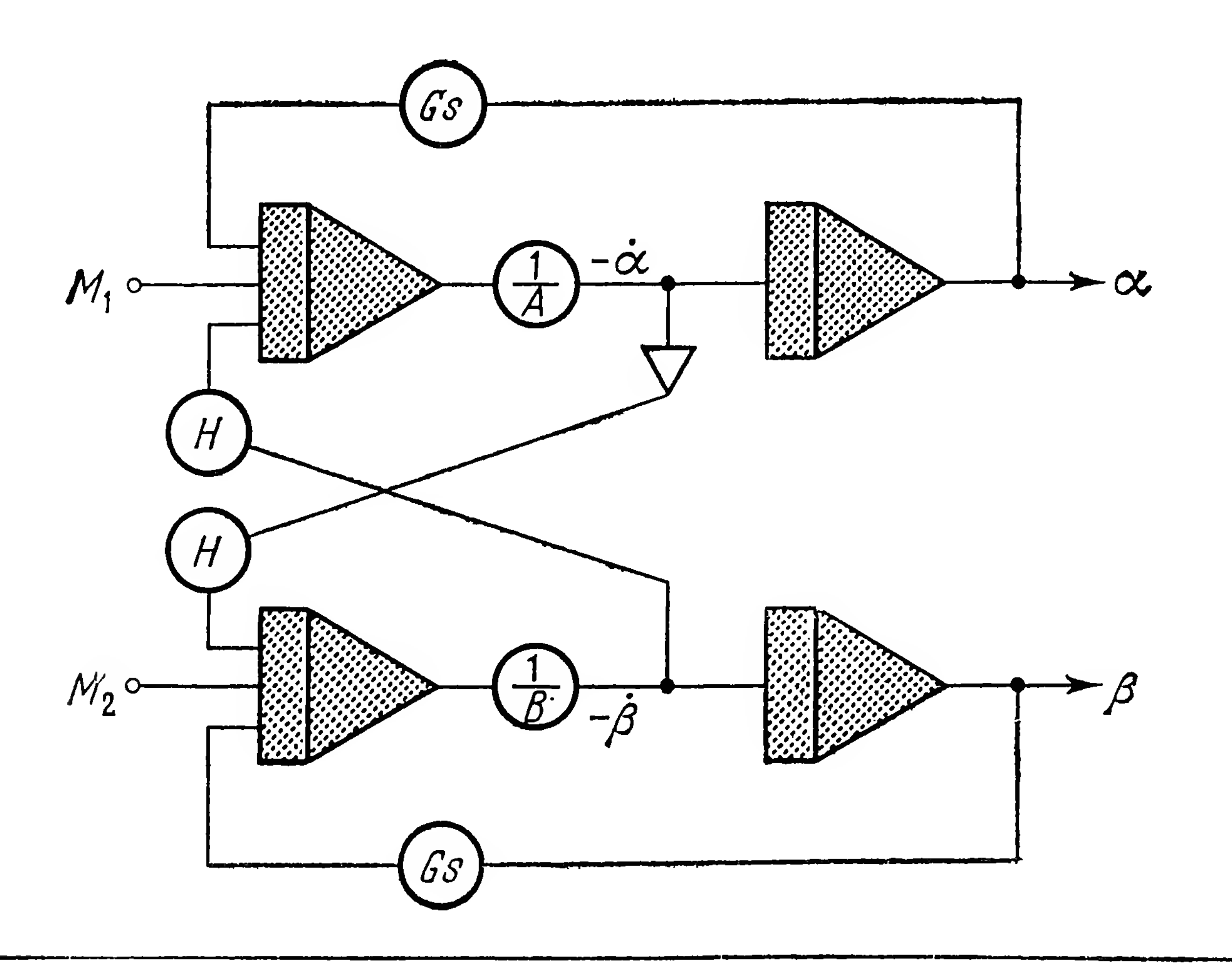


Рис. 10.9. Аналоговая схема решения системы уравнений (10.29).

частоты прецессии и нутаций почти всегда на несколько порядков отличаются одна от другой. Поэтому вычисление одного-единственного прецессионного колебания требует одновременно вычисления большого числа нутационных колебаний. При использовании цифровых вычислительных машин это может привести к значительным погрешностям и к большому вычислительному времени. Трудностей

можно ожидать и при использовании аналоговых вычислительных машин, например при нормировании уравнений или в случае

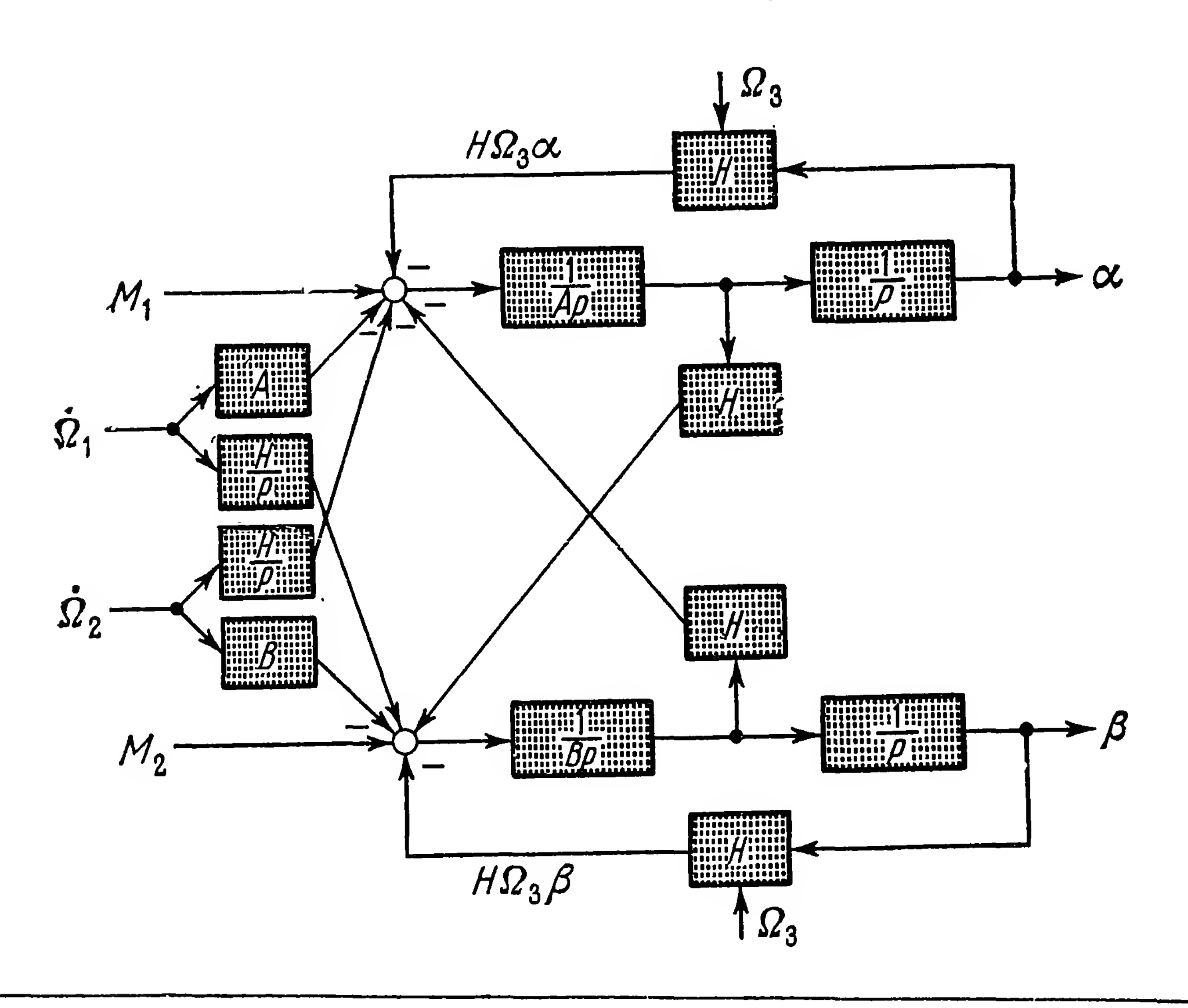


Рис. 10.10. Структурная схема для системы уравнений (10.22).

включения самописца на выход машины. В подобных случаях можно зачастую достичь лучших результатов, если с самого начала прибегнуть к упрощенным в силу большого кинетического момента приближенным уравнениям, т. е. к техническим уравнениям гироскопа.

Глава 11

Гироскопические приборы. Классификация и общие свойства

В настоящей главе наряду с общим обзором различных типов гироскопических приборов мы займемся изучением некоторых явлений, которые могут возникать в целом ряде приборов: эффекты трения, колебаний, разгона и выбега гироскопов. Представляется целесообразным рассмотреть их в общем виде независимо от конкретного устройства и специального назначения того или иного прибора.

11.1. Классификация гироскопических приборов

К подразделению гироскопических приборов на классы можно подходить с разных точек зрения. Одну из возможных классификаций демонстрирует сводная таблица на стр. 364—365. В ней главным является функциональный признак. Такого рода классификация в значительной мере совпадает и с подразделением приборов по определенным конструктивным признакам.

У *позиционных гироскопов* — хранителей направления (гл. 12) используется свойство свободного гироскопа сохранять неизменным в пространстве направление кинетической оси. Но такого рода некорректируемые приборы можно использовать только в течение ограниченного промежутка времени, так как неизбежные возмущающие моменты приводят с течением времени к уходу кинетической оси от первоначального положения. Во избежание этого можно прибегнуть к контролю и коррекции направления оси гироскопа.

Коррекция достигается главным образом при помощи более или менее жесткой связи гироскопа с чувствительным элементом, указывающим направление (индикатор направления), например магнитной стрелкой или маятником. Путем объединения индикатора направления с гироскопом — хранителем направления при надлежащей регулировке удается устранить или значительно снизить присущие обоим этим элементам погрешности, возникающие вследствие того, что индикаторы направления подвержены колебаниям, а хранители направления — медленному уходу. Корректируемые позиционные гироскопы выходят за пределы класса собственно

Гироскопические

Позиционные гироскопы (гироскопы — хранители направления)		*Гироскопические компасы* (гироскопы, обладающие избирательностью направления)
без коррекции	с коррекцией	
«Свободные гироскопы» Измерители углов Гироскопы для прямолинейного полета Свободные курсовые гироскопы	Курсовые гироскопы Компасные курсовые гироскопы Гироскопические вертикали (вертиканты) Гироскопические горизонты	Деклинометрические гироскопы Инклинометрические гироскопы Одно-, двух- и трехроторные гирокомпасы Пространственные компасы Гироуказатели меридиана Измерительные компасы Гироскопические теодолиты Гиронасадки

приборов — хранителей направления. Они способны самостоятельно устанавливаться в требуемом направлении. Этот процесс называют также *коррекцией гироскопа* от индикатора направления. Но ввиду того, что корректирующие устройства обычно оказывают слабое воздействие на гироскоп, эти приборы отнесены в таблице к разряду позиционных гироскопов.

В *гироскопических компасах,* приведенных во второй колонке таблицы, гироскоп способен самостоятельно устанавливаться в нужном направлении. У всех перечисленных в этой колонке приборов это достигается в конечном счете благодаря вращению Земли. Роль базового направления здесь играет либо направление на север, либо направление оси вращения Земли (у инклинометрического гироскопа). К различным вариантам гироскопического компаса мы еще вернемся в гл. 13.

Среди *стабилизирующих гироскопов* (третья колонка) надо различать два вида. Гироскопы, применяемые для непосредственной стабилизации, непосредственно участвуют в силовом балансе стабилизируемого объекта (гл. 14); более универсальными и большей частью более гибкими являются системы косвенной стабилизации, в которых гироскоп обычно служит только измерительным элементом, управляющим стабилизируемым объектом через усилительную сервосистему. К подобным приборам, разработанным и выполнен-

приборы

Стабилизирующие гироскопы		Поворотные гироскопы (гироскопические измерители угловой скорости)	Прочие гироскопы
непосредственная стабилизация	косвенная стабилизация		
Гироскоп торпеды Хоуэлла Монорельсовая дорога Корабельные гироскопы Гироскопические гасители колебаний Гироскопические рамы и платформы с двигателями стабилизации Приводные гироскопы вибраторов Сервогироскопы	Активные успокоители бортовой качки Гироскопические рамы и платформы со следящими системами	P-поворотный гироскоп (гиротахометр) I-, I^2- и D-поворотные гироскопы (интегрирующие, дважды интегрирующие и дифференцирующие) PD-, PI-, PID- и др. поворотные гироскопы (со смесительным съемом) Указатели ориентации	Гироинтеграторы линейных ускорений Гироакселерометры Управляющие гироскопы Релейные гироскопы Гироскопы с жесткой связью Вибрационные гироскопы Гироскопы нетрадиционного устройства

ным в разнообразных вариантах, относятся и стабилизированные платформы, играющие роль гироцентралей. Платформы такого рода могут быть использованы как в качестве хранителей направления, так и в качестве самоустанавливающихся систем. Приборы такого типа, отвечающие высоким требованиям, как, например, в технике инерциальной навигации, можно сначала использовать в их основном режиме, а затем перевести (нажатием кнопки) с режима поиска в режим хранения направления. Подобные приборы будут описаны в гл. 16.

Поворотные гироскопы, служащие для измерения угловой скорости (четвертая колонка), первоначально применялись в качестве указателей поворота в авиационной технике. В настоящее время они находят разнообразное применение в роли измерительных и управляющих гироскопов, прежде всего в системах автоматического управления. При этом используются не только так называемые P-поворотные гироскопы, у которых выходная величина пропорциональна измеряемой (угловой скорости ω); в настоящее время построены также приборы, способные выполнять функции интегрирующих и дифференцирующих элементов (так называемые I-поворотные и D-поворотные гироскопы). В качестве измерительных датчиков в системах позиционного регулирования часто находят применение приборы комбинированного типа (т. е. приборы

со смесительным съемом), в первую очередь так называемые PI-поворотные гироскопы. Изучение свойств поворотных гироскопов мы отложим до гл. 15.

В пятой колонке таблицы указаны приборы, которые в принятой классификации нельзя отнести ни к одной из рассмотренных групп. От названных выше приборов они отличаются главным образом областью применения, принципом работы или конструкцией. Мы на них останавливаться не будем.

Существуют гироскопические приборы, которые по принципам устройства или выполняемым функциям следовало бы поместить одновременно в несколько колонок сводной таблицы. К ним относится, например, гироскопический прибор, в котором поворотный гироскоп и гироскопический горизонт (позиционный гироскоп) объединены таким образом, что эта компактная конструкция позволяет получать полную информацию о состоянии полета. Такого рода универсальные гироскопические приборы в таблицу не включены.

Кроме того, в таблице не отражены те гироскопы, которые не являются собственно гироскопами, т. е. не имеют вращающихся масс. К ним относятся приборы, рабочими элементами которых являются вибрирующие камертоны, пластинки или кольца. С помощью этих приборов можно измерять угловую скорость (подобно гиротахометру). Такого рода приборы, часто называемые «экзотическими гироскопами», здесь не рассматриваются.

Часто производят классификацию гироскопических приборов по числу степеней свободы гироскопа. Если ротор гироскопа имеет одну опорную точку и полную свободу вращения вокруг нее, то, согласно принятому в физике определению, он имеет три степени свободы. Если ось симметрии ротора может двигаться лишь в одной определенной плоскости, то ротор имеет две степени свободы. Со времен классических исследований в области теории гироскопов под гироскопом принято понимать собственно ротор. Поэтому, когда говорят о *гироскопе с тремя степенями свободы*, под этим подразумевают, что *ротор* имеет три степени свободы. Наряду с этим, и прежде всего в литературе на английском языке, название гироскоп укоренилось за кожухом вместе с находящимся в нем ротором. Степень свободы, обусловленная возможностью поворота ротора относительно кожуха, в расчет не принимается. В случае идеальных синхронных гироскопов такой образ мыслей еще можно было бы оправдать, однако ввиду сложного движения, свойственного реальным гироскопам, он может привести к ошибочным заключениям. Поэтому во избежание недоразумений следует различать *число степеней свободы с учетом вращения ротора* и *число измерительных степеней свободы*. В английских и американских публикациях из области гироскопической техники обычно принимается в расчет только число измерительных степеней свободы. Таким образом, название *гироскоп с двумя степенями свободы* (Two Degree of Freedom

Gyro, сокращенно TDF Gyro) соответствует классическому *гироскопу с тремя степенями свободы* или *гироскопу с двумя измерительными степенями свободы*. Название *гироскоп с одной степенью свободы* (Single Degree of Freedom Gyro; сокращенно SDF-Gyro) по смыслу соответствует классическому *гироскопу с двумя степенями свободы* или *гироскопу с числом измерительных степеней свободы, равным единице*. Название *гироскоп с числом степеней свободы, равным нулю* (Zero Degree of Freedom Gyro, сокращенно ZDF-Gyro), принадлежит ротору, ось которого практически жестко связана с основанием.

У всех без исключения приборов, перечисленных в первых двух колонках таблицы, гироскопы обладают тремя степенями свободы по отношению к основанию прибора. Свобода движения ротора может быть при этом стеснена нежесткими связями или корректирующими моментами, но принципиальная возможность вращения вокруг всех трех осей сохраняется. У приборов, представленных в третьей и четвертой колонках таблицы, гироскопы обычно имеют только две степени свободы относительно основания прибора. И здесь зачастую возможность движения ротора ограничена из-за наличия нежестких связей электрического или механического происхождения. У гироскопа торпеды Хоуэлла, представляющего в лучшем случае исторический интерес, число степеней свободы равно даже единице.

11.2. Трение

Силы трения могут самым различным образом влиять на поведение гироскопических приборов, поскольку здесь играют роль как устройство и состояние движения самого прибора, так и характер закона трения. Обратимся к изучению некоторых типичных явлений, связанных с трением.

Что касается законов трения, то мы ограничимся здесь двумя простыми его характеристиками: в одном случае сила трения пропорциональна скорости (вязкое трение), в другом сила трения не зависит от скорости и имеет постоянную величину (кулоново трение). У быстровращающихся гироскопов возникают еще моменты трения, приблизительно пропорциональные квадрату угловой скорости, но качественно их влияние не отличается от влияния линейных демпфирующих составляющих.

11.2.1. Гироскоп в кардановом подвесе при наличии упругих связей и вязкого трения. Предположим, что на гироскоп в кардановом подвесе по осям обеих рамок наложена своего рода упругая связь, осуществляемая, например, в виде момента силы тяжести или момента силы упругости пружины, и одновременно существуют моменты трения, линейно зависящие от угловых скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$.

Тогда при условии малых отклонений системы от положения равновесия получаем уравнения (см. § 10.1)

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1 = -d_1\dot{\alpha} - c_1\alpha, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= M_2 = -d_2\dot{\beta} - c_2\beta, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где c_1, c_2 — удельные моменты упругих сил, d_1, d_2 — удельные моменты вязкого трения. Им соответствует характеристическое уравнение четвертой степени

$$\lambda^4 AB + \lambda^3 (Ad_2 + Bd_1) + \lambda^2 (H^2 + Ac_2 + Bc_1 + d_1 d_2) + \\ + \lambda (d_1 c_2 + d_2 c_1) + c_1 c_2 = 0. \quad (11.2)$$

Если численные значения параметров системы известны, то найти корни этого уравнения, а следовательно, собственные колебания и затухание гироскопа не составляет труда. Однако некоторые общие сведения можно почерпнуть и не прибегая к числовому расчету. Если требуется, чтобы корни (11.2) имели отрицательные действительные части, то вследствие $AB > 0$ все коэффициенты уравнения должны быть положительными. Отсюда следует, что система, у которой один из наложенных моментов является восстанавливающим, а другой опрокидывающим ($c_1 c_2 < 0$), неустойчива.

У тяжелого гироскопа с таким положением можно встретиться, например, в том случае, когда оси рамок карданова подвеса не пересекаются, а центр тяжести S внутренней рамки (кожуха) вместе с ротором расположен между этими осями на соединяющей их кратчайшей прямой, как показано на рис. 11.1. При этом потенциальная функция имеет в положении равновесия седло. Эту статическую

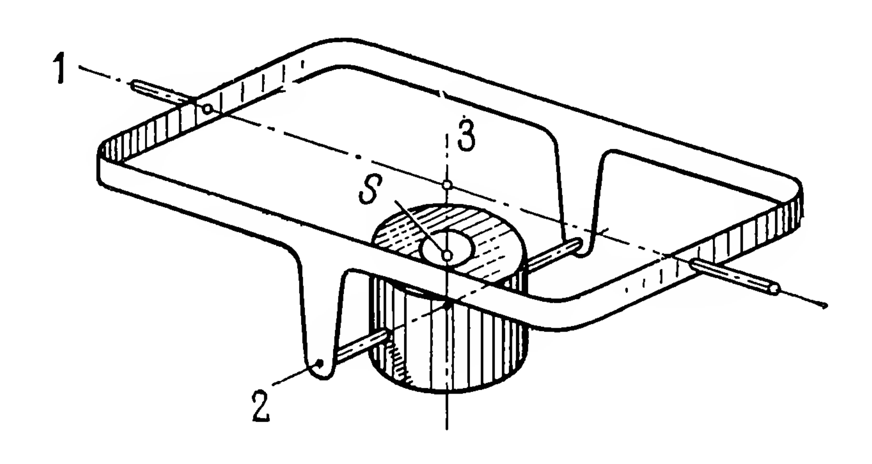


Рис. 11.1. Гироскоп в кардановом подвесе при наличии восстанавливающего и опрокидывающего моментов.

неустойчивость нельзя устранить ни путем увеличения кинетического момента гироскопа, ни путем демпфирования, поскольку ни H, ни α не входят в свободный член уравнения (11.2).

При отсутствии демпфирования ($d_1 = d_2 = 0$) статически неустойчивый гироскопический маятник ($c_1 < 0$, $c_2 < 0$) можно сделать устойчивым, если кинетический момент будет достаточно

большим. Это мы показали выше для гироскопа Лагранжа с верхним расположением центра тяжести (п. 3.3.2), и это следует также из характера кривых собственных частот гироскопа в кардановом подвесе (рис. 10.3) для $s > 0$. Но как только появляются демпфирующие силы, мы тотчас лишаемся возможности достичь устойчивости. (Действительно, в этом случае по крайней мере коэффициент при λ в уравнении (11.2) оказывается отрицательным.) Полученный результат согласуется с теоремами 11 и 14, приведенными в п. 5.2.2.

Несколько более подробно можно судить об этом, если обратиться к приближениям, справедливым при большом кинетическом моменте (см. § 10.1). Для расчета нутаций можно положить $c_1 = c_2 = 0$. При этом условии корни уравнения (11.2) будут равны

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} \approx -\frac{Ad_2 + Bd_1}{2AB} \pm i\sqrt{\frac{H^2}{AB} - \left(\frac{Ad_2 - Bd_1}{2AB}\right)^2}. \tag{11.3}$$

Соответственно этим выражениям при $d > 0$ нутационные колебания всегда затухают; при не слишком больших коэффициентах демпфирования мы вновь получаем уже известное приближенное выражение (10.17) для частоты.

Для расчета прецессионного движения можно положить $A = B = 0$. Тогда мы получим корни уравнения (11.2) в виде

$$\left.\begin{matrix}\lambda_3\\ \lambda_4\end{matrix}\right\} \approx -\frac{d_1c_2 + d_2c_1}{2(H^2 + d_1d_2)} \pm i\sqrt{\frac{H^2c_1c_2}{(H^2 + d_1d_2)^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d_1c_2 - d_2c_1}{H^2 + d_1d_2}\right)^2}. \tag{11.4}$$

Отсюда следует, что в случае статической устойчивости ($c > 0$) прецессионные колебания затухают, а в случае статической неустойчивости ($c < 0$), наоборот, нарастают. При не слишком больших коэффициентах демпфирования мы получаем для частоты выражение

$$\omega^P \approx \frac{\sqrt{c_1c_2}}{H}, \tag{11.5}$$

которое соответствует (10.17).

11.2.2. Гироскопический маятник с кулоновым трением в опорах рамок. Будем считать гироскоп быстровращающимся. Тогда, используя прием, подробно описанный в § 10.1, мы можем вести исследование нутационных и прецессионных колебаний раздельно. В предположении идеального кулонова трения, при котором сила трения имеет постоянную величину, но зависящее от знака скорости направление, мы можем рассчитать нутационные колебания, исходя из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1 = -r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= M_2 = -r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Ввиду прерывности функций sgn $\dot{\alpha}$ и sgn $\dot{\beta}$ замкнутое аналитическое решение этих уравнений невозможно, но можно получить полное представление о характере движения путем изучения кривых в фазовой плоскости. Наиболее удобно нанести $\dot{\beta}$ в зависимости от нормированной угловой скорости $\dot{\alpha}^* = \dot{\alpha}\sqrt{A/B}$, потому что, как станет ясно из дальнейшего, при этом фазовые траектории принимают весьма простой вид. Разрешая уравнения (11.6) относительно старшей производной и вводя указанное выше обозначение $\dot{\alpha}^*$, находим

$$\begin{aligned} \sqrt{AB}\,\ddot{\alpha}^* &= -H\dot{\beta} - r_1 \operatorname{sgn}\dot{\alpha}^*, \\ \sqrt{AB}\,\ddot{\beta} &= H\dot{\alpha}^* - \sqrt{\frac{A}{B}}\, r_2 \operatorname{sgn}\dot{\beta}. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\ddot{\beta}}{\ddot{\alpha}^*} = \frac{d\dot{\beta}}{d\dot{\alpha}^*} = -\frac{H\dot{\alpha}^* - \sqrt{A/B}\, r_2 \operatorname{sgn}\dot{\beta}}{H\dot{\beta} + r_1 \operatorname{sgn}\dot{\alpha}^*} = F(\dot{\alpha}^*, \dot{\beta}). \tag{11.8}$$

Для каждой точки плоскости $\dot{\alpha}^*$-$\dot{\beta}$, пользуясь равенством (11.8), можно найти крутизну $d\dot{\beta}/d\dot{\alpha}^*$ фазовой траектории, проходящей через данную точку. По виду этой траектории можно судить об изменении скорости, а следовательно, и о самом движении. Для того чтобы определить вид фазовых кривых, надо сначала найти особые точки в плоскости $\dot{\alpha}^*$-$\dot{\beta}$. Появление таких точек связано с одновременным обращением в нуль числителя и знаменателя дроби (11.8). Это происходит при

$$\dot{\alpha}_0^* = \frac{r_2}{H}\sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sgn}\dot{\beta}, \quad \dot{\beta}_0 = -\frac{r_1}{H} \operatorname{sgn}\dot{\alpha}^*. \tag{11.9}$$

Соответственно числу возможных комбинаций значений сигнум-функций существуют четыре особые точки, сопоставляемые с определенными квадрантами плоскости $\dot{\alpha}^*$-$\dot{\beta}$. В первом квадранте $\dot{\alpha}^* > 0$ и $\dot{\beta} > 0$. Отсюда, согласно (11.9), следует $\dot{\alpha}_0^* > 0$ и $\dot{\beta}_0 < 0$. Таким образом, особая точка, сопоставляемая с первым квадрантом, лежит не в этом, а в четвертом квадранте; особая точка сопоставляемая с вторым квадрантом, лежит в первом и т. д. (см. рис. 11.2, на котором квадранты пронумерованы римскими цифрами, а сопоставляемые с ними особые точки — арабскими).

Для получения интегральных кривых произведем замену переменных:

$$u = \dot{\alpha}^* - \dot{\alpha}_0^*, \quad v = \dot{\beta} - \dot{\beta}_0.$$

Уравнение (11.8) в новых переменных имеет вид

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}, \quad \text{или} \quad u\,du + v\,dv = 0.$$

В результате интегрирования этого уравнения получаем уравнение окружности в плоскости u-v:

$$u^2 + v^2 = \text{const} = \rho^2.$$

Следовательно, фазовая траектория в каждом из квадрантов представляет собой дугу окружности, описанной из сопоставляемой с данным квадрантом особой точки как из центра. Таким образом, вся фазовая траектория может быть легко построена путем сопряжения отдельных дуг окружностей.

Направление движения по фазовой траектории можно установить по уравнениям (11.6). Так, из первого уравнения для первого квадранта непосредственно следует $\ddot{\alpha} < 0$, значит, $\dot{\alpha}$, а следовательно, и $\dot{\alpha}^*$ могут только уменьшаться, так что движение по соответствующей дуге окружности происходит против часовой стрелки. Из точки *1* как из центра надо, начиная с точки *a* на положительной оси $\dot{\alpha}^*$ (рис. 11.2), описать в первом квадранте дугу радиусом

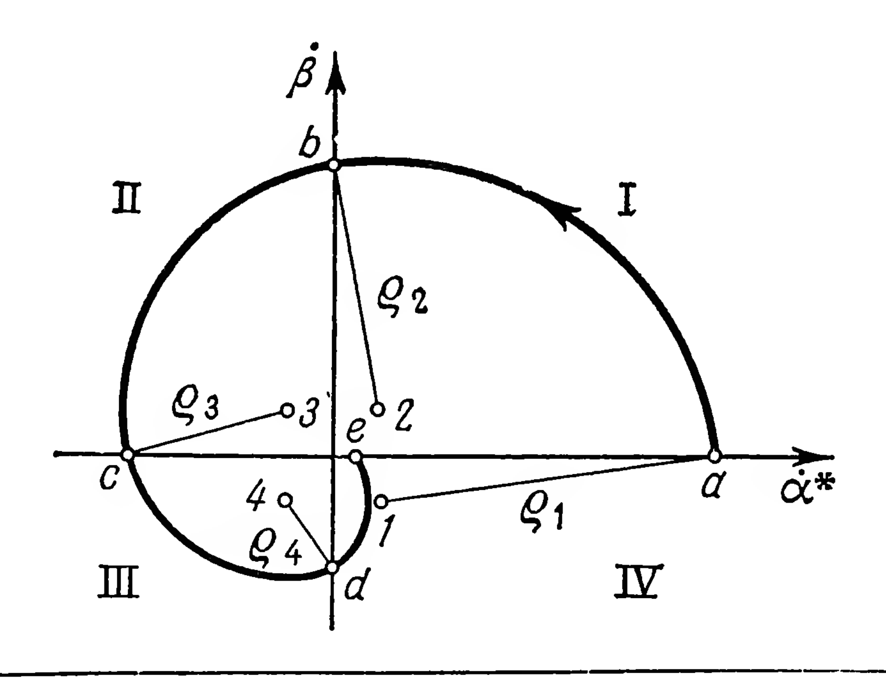


Рис. 11.2. Нутационное движение гироскопа в кардановом подвесе с кулоновым трением в опорах рамок.

ρ_1. За ней во втором квадранте следует дуга, описанная из точки *2* радиусом ρ_2, и т. д. Построенная таким способом фазовая траектория всегда заканчивается на одной из осей в точке, расположенной внутри четырехугольника, образуемого четырьмя особыми точками.

Остановка в какой-либо точке, не совпадающей с началом координат в плоскости $\dot{\alpha}^*$-$\dot{\beta}$, означала бы, что по завершении колебаний гироскоп уходит вокруг одной из карданових осей с постоянной угловой скоростью. Опыт, однако, показывает, что по истечении определенного времени этот уход прекращается, и гироскоп останавливается. Для объяснения этого явления рассмотрим представленную на рис. 11.3 в увеличенном виде область фазовой плоскости около начала координат.

Пусть фазовая траектория тянется из четвертого квадранта и, образуя дугу окружности, описанной из точки *4*, достигает первого квадранта в точке *e*. Можно предположить, что перемена знака силы кулонова трения происходит не строго при $\dot{\beta} = 0$, а при некотором близком к нему значении $\Delta\dot{\beta}$. Таким образом, должна существовать определенная зона застоя, определяемая значением $\Delta\dot{\beta}$ или $\Delta\dot{\alpha}^*$, в которой знак трения зависит от направления входа в эту зону. Согласно сказанному, в случае фазовой траектории, представленной на рис. 11.3, перемена направления момента трения происходит не в точке *e*, а лишь в точке *e'*. К ней примыкает дуга окружности, описанная из точки *1*. Очередная перемена знака вновь происходит несколько позже, в точке *f'*, к которой примыкает

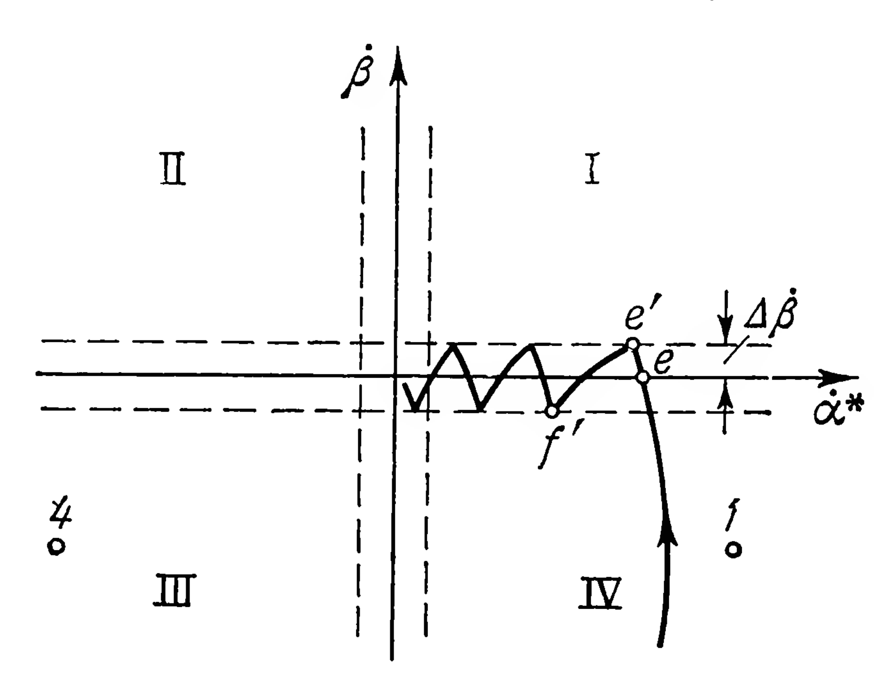


Рис. 11.3. К возникновению вибрирующего скольжения.

дуга окружности, описанная из точки *4*. Совершая практически едва заметные дрожания, фазовая точка описанным образом постепенно приближается вдоль оси $\dot{\alpha}^*$ к началу координат до совпадения с ним. Это движение получило название *вибрирующее скольжение* или, коротко, *скольжение*. В подобном виде оно возникает также в релейных системах при наличии зон нечувствительности.

Движение гироскопа в процессе скольжения в среднем нетрудно определить из (11.6). Если скольжение начинается из точки *e* на положительной оси $\dot{\alpha}^*$, как показано на рис. 11.3, то с достаточным приближением можно принять $\dot{\beta} \approx 0$. Тогда из (11.6/1) для правой полуплоскости (первый и четвертый квадранты) следует

$$A\ddot{\alpha} \approx -r_1,$$

или после интегрирования

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 - \frac{r_1}{A} t, \quad \alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t - \frac{r_1}{2A} t^2.$$

Следовательно, фазовая точка в плоскости $\dot{\alpha}^*$-$\dot{\beta}$ движется с убывающей скоростью к началу координат. Собственно угол α при постоянном замедлении r_1/A растет, пока наконец гироскоп не остановится в положении

$$\alpha(t_0) = \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2 A}{2r_1} \quad \text{в момент времени} \quad t_0 = \frac{\dot{\alpha}_0 A}{r_1}. \tag{11.10}$$

Таким образом, в результате проведенного нами исследования мы можем констатировать, что наличие кулонова трения в опорах рамок приводит к затуханию нутационного движения и к отклонению оси гироскопа.

Поведение гироскопа может, однако, качественно измениться, если наряду с моментами трения будут существовать и другие моменты относительно осей рамок или если рассматривается движение гироскопа относительно вращающейся системы координат. Покажем это на примере постоянного дополнительного момента M_0 относительно оси внешней рамки (Бутенин [71]). В этом случае уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1 = -r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha} + M_0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= M_2 = -r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta}. \end{aligned} \tag{11.11}$$

Отсюда аналогично тому, как это было сделано выше, мы получаем уравнение фазовой траектории

$$\frac{d\dot{\beta}}{d\dot{\alpha}^*} = -\frac{H\dot{\alpha}^* - \sqrt{A/B}\, r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta}}{H\dot{\beta} + r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}^* - M_0}. \tag{11.12}$$

Особые точки существуют при

$$\dot{\alpha}_0^* = \frac{r_1}{H}\sqrt{\frac{A}{B}} \operatorname{sgn} \dot{\beta}, \quad \dot{\beta}_0 = -\frac{r_1}{H} \operatorname{sgn} \dot{\alpha}^* + \frac{M_0}{H}. \tag{11.13}$$

По сравнению с разобранным выше случаем особые точки теперь сдвинулись в направлении оси $\dot{\beta}$. Если это смещение окажется настолько большим, что все особые точки будут лежать в верхней (или в нижней) полуплоскости, то возникнут новые явления. Пример тому иллюстрируется рис. 11.4. Фазовая траектория, начинающаяся в точке a, проходит сначала через точку b, а затем приходит в c. От точки c до точки d происходит скольжение, затем фазовая точка движется в первом квадранте по дуге окружности, описанной из точки *1*, достигая точки e. После повторного короткого скольжения от точки e до точки f движение точки происходит по полной окружности радиуса $\dot{\alpha}_0^*$, описанной в первом квадранте из точки *1* как из центра. Движение фазовой точки по этой окружности продолжается далее непрерывно, т. е. нутация не затухает.

В результате мы получаем *предельный цикл*, который в данном случае описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{\alpha}^* = \dot{\alpha}_0^* (1 - \cos \omega^N t) > 0,$$
$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_0 - \dot{\alpha}_0^* \sin \omega^N t > 0. \qquad (11.14)$$

Отсюда после интегрирования находим

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0^* \left(t - \frac{1}{\omega^N} \sin \omega^N t \right),$$
$$\beta = \beta_0 + \dot{\beta}_0 t + \frac{\dot{\alpha}_0^*}{\omega^N} \cos \omega^N t. \qquad (11.15)$$

Таким образом, гироскоп отклоняется, поворачиваясь не только вокруг той оси, относительно которой приложен момент, но вокруг обеих осей. На это отклонение накладываются незатухающие нутационные колебания.

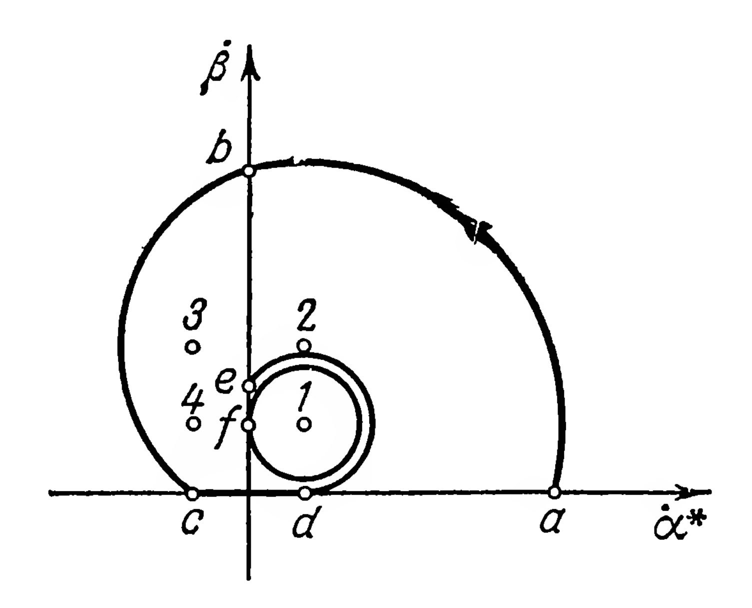


Рис. 11.4. Нутационное движение гироскопа в кардановом подвесе с кулоновым трением при наличии постоянного внешнего момента.

В заключение остается еще исследовать влияние трения на прецессионное движение. В предположении большого кинетического момента уравнения движения в этом случае могут быть записаны следующим образом:

$$H\dot{\beta} = M_1 = - c_1 \alpha - r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha},$$
$$- H\dot{\alpha} = M_2 = - c_2 \beta - r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta}. \qquad (11.16)$$

Движение удобнее всего рассматривать в плоскости α^*-β, где $\alpha^* = \sqrt{c_1/c_2}\alpha$. Уравнение фазовой траектории имеет вид

$$\frac{d\beta}{d\alpha^*} = - \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{\sqrt{c_1 c_2}\, \alpha^* + r_1 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}^*}{c_2 \beta + r_2 \operatorname{sgn} \dot{\beta}}. \qquad (11.17)$$

Особые точки таковы:

$$\alpha_0^* = -\frac{r_1}{\sqrt{c_1 c_2}} \operatorname{sgn} \dot{\alpha}^*, \quad \beta_0 = -\frac{r_2}{c_2} \operatorname{sgn} \dot{\beta}. \tag{11.18}$$

Мы вновь получаем четыре особые точки, которые, однако, сопоставлены квадрантам *плоскости скоростей,* поскольку сигнум-функции зависят от скорости. Эти точки нанесены на плоскости α^*-β, показанной на рис. 11.5, и обозначены соответственно квадрантам плоскости скоростей.

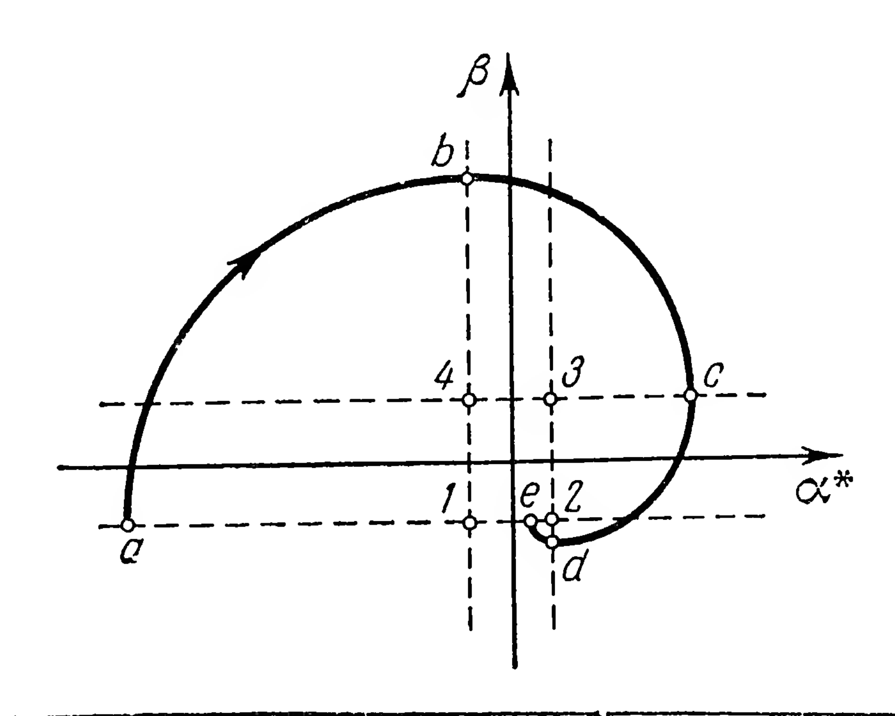


Рис. 11.5. Прецессионное движение статически устойчивого гироскопа в кардановом подвесе с кулоновым трением в опорах рамок.

Для определения фазовых траекторий введем переменные

$$x = \alpha^* - \alpha_0^* \quad \text{и} \quad y = \beta - \beta_0,$$

после чего получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \text{или} \quad x\,dx + y\,dy = 0,$$

решением которого является

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Фазовые кривые вновь оказываются окружностями, описанными из соответствующих особых точек. Если моменты наложены так, что система статически устойчива относительно обеих осей ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$), то движение по этим окружностям совершается по часовой стрелке. Так, первому квадранту плоскости скоростей ($\dot{\alpha} > 0$, $\dot{\beta} > 0$) принадлежит дуга в четверть окружности, проходящая от точки a до точки b. В точке b знак $\dot{\beta}$ изменяется на обратный, что соответствует переходу в четвертый квадрант плоскости $\dot{\alpha}$-$\dot{\beta}$. Этому квадранту принадлежит дуга bc в плоскости α^*-β. Путем последовательного припасовывания названных дуг в четверть

окружности мы получаем в результате искомую траекторию. В примере, приведенном на рисунке, она заканчивается в точке *e* на отрезке, соединяющем точки *1* и *2*. Нетрудно сообразить, что скольжение, как это было в случае нутационных колебаний, здесь возникнуть не может.

Если моменты наложены так, что система статически неустойчива относительно обеих осей ($c_1 < 0$, $c_2 < 0$), то соответствие особых точек тем или иным квадрантам и направление движения по траектории меняются. Как видно из рис. 11.6, теперь изображающая точка отходит от начала координат и удаляется от него по спирали, составленной из дуг в четверть окружности.

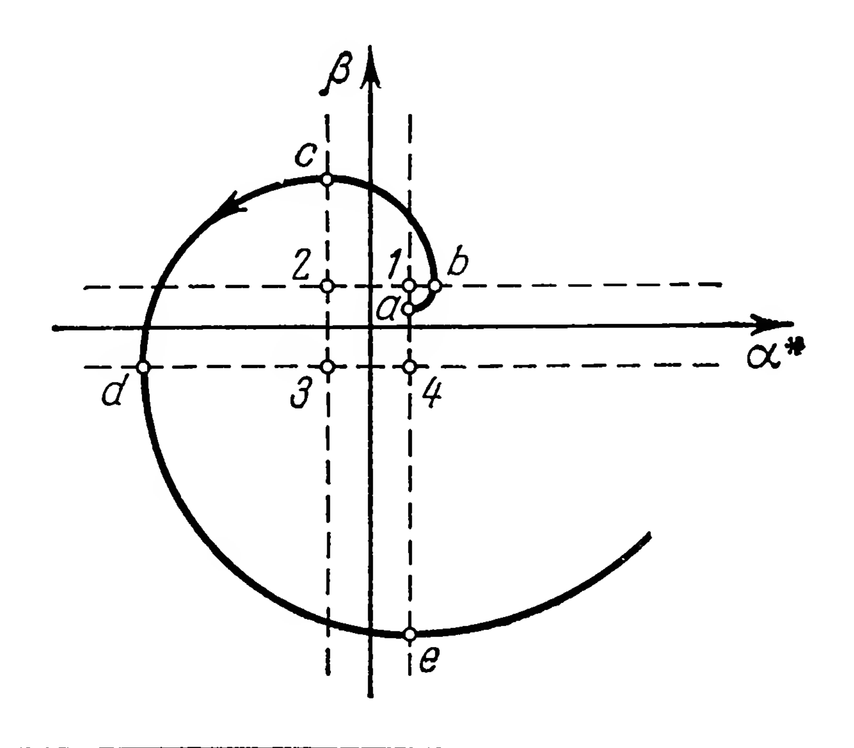


Рис. 11.6 Прецессионное движение статически неустойчивого гироскопа в кардановом подвесе с кулоновым трением в опорах рамок.

Если один из моментов является восстанавливающим, а другой опрокидывающим ($c_1 c_2 < 0$), то приведенные выше рассуждения сохраняют свою силу. В этом случае удобнее всего воспользоваться плоскостью α-β, и тогда из (11.16) мы сразу получаем

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{c_1(\alpha - \alpha_0)}{c_2(\beta - \beta_0)}, \tag{11.19}$$

где

$$\alpha_0 = -\frac{r_1}{c_1}\operatorname{sgn}\dot{\alpha} \quad \text{и} \quad \beta_0 = -\frac{r_2}{c_2}\operatorname{sgn}\dot{\beta}.$$

Произведя в (11.19) замену переменных $x = \alpha - \alpha_0$, $y = \beta - \beta_0$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c_1 x}{c_2 y}, \quad \text{или} \quad c_1 x\,dx + c_2 y\,dy = 0, \tag{11.20}$$

решение которого имеет вид

$$c_1 x^2 + c_2 y^2 = \text{const}. \tag{11.21}$$

Поскольку теперь знаки c_1 и c_2 противоположны, траектории будут гиперболами, асимптоты которых проходят через особые точки. Такое семейство гипербол, соответствующее первому квадранту плоскости $\dot{\alpha}$-$\dot{\beta}$, изображено на рис. 11.7. Из рисунка видно, что движение заключается в непрерывном удалении от положения равновесия.

Резюмируя, можно сказать, что кулоново трение в опорах гироскопического маятника в кардановом подвесе оказывает на прецессионное движение последнего качественно такое же влияние, как и вязкое трение: если наложенные моменты таковы, что гироскоп статически устойчив, то его колебания затухают, если же гироскоп

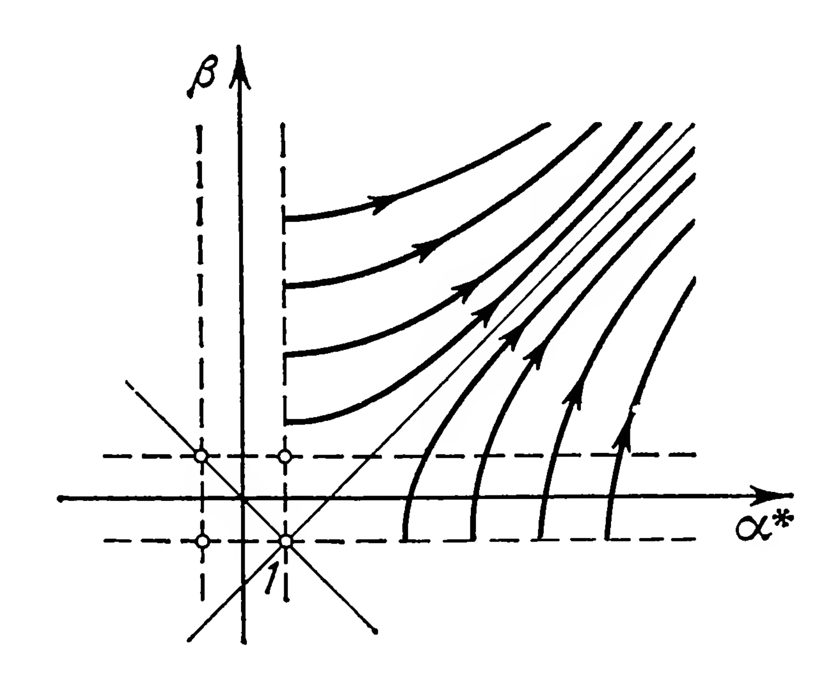


Рис. 11.7. Прецессионное движение гироскопа в кардановом подвесе с кулоновым трением в опорах рамок при наличии опрокидывающего и восстанавливающего моментов.

статически неустойчив, то он раскачивается. Если гироскоп относительно одной из осей статически устойчив, а относительно другой — нет, то он неустойчив, причем его ось апериодически удаляется от положения равновесия. Нутационные колебания затухают во всех случаях. Однако при наличии внешних моментов могут сохраниться остаточные нутационные колебания, накладывающиеся на медленный уход оси ротора.

Явления, наблюдаемые у гироскопов в кардановом подвесе, отнюдь не исчерпываются описанными выше. Так, при наличии кулонова трения возможно также движение, при котором наблюдаются *временные остановки*, когда вращение вокруг одной из осей подвеса или вокруг обеих одновременно прекращается. Особенным разнообразием отличаются движения относительно вращающихся систем координат, например при использовании гироскопов в земных условиях. Мы ограничимся здесь лишь ссылкой на более обстоятельные работы Граммеля и Циглера [72], а также Бутенина и Лунца [73].

11.2.3. Влияние кулонова трения в опорах рамок гироскопа с двумя степенями свободы. При ограниченной свободе движения силы трения могут влиять на поведение гироскопа совсем иначе, чем в случае гироскопов с тремя степенями свободы. Покажем это на примере гироскопа в кардановом подвесе, обладающего двумя степенями свободы, как показано на рис. 11.8. Если плоскость

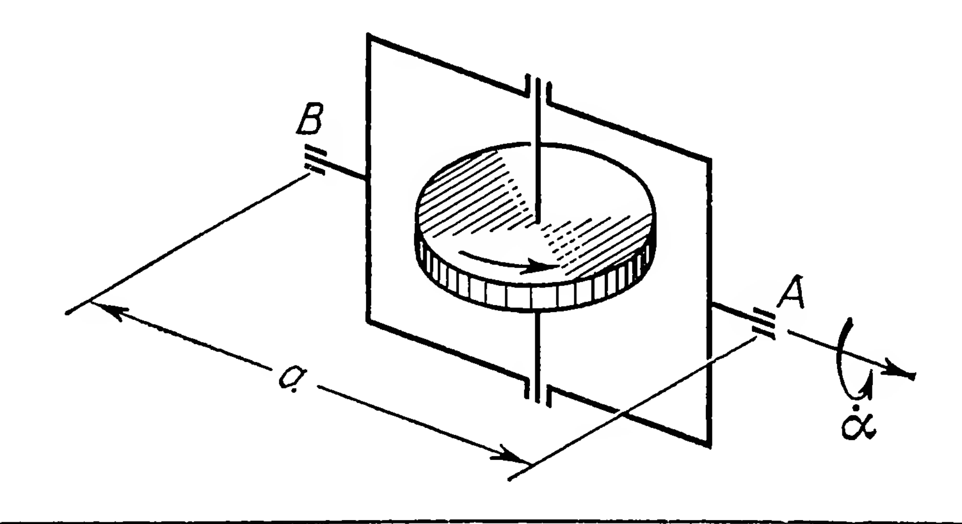


Рис. 11.8. К расчету поворотного гироскопа с кулоновым трением в опорах рамок.

рамки близка к вертикальной, т. е. может отклоняться от последней лишь на небольшой угол α, как то нередко имеет место у применяемых на практике поворотных гироскопов, то в опорах рамки возникают силы давления, направленные вертикально и складывающиеся из веса G и давления $H\dot{\alpha}/a$, обусловленного прецессией,

$$F_A = \frac{G}{2} + \frac{H\dot{\alpha}}{a}, \qquad F_B = \frac{G}{2} - \frac{H\dot{\alpha}}{a}. \tag{11.22}$$

Они порождают касательные силы трения R (рис. 11.9), момент которых относительно оси рамки, согласно закону Кулона для трения скольжения, равен

$$M = -rR = -\mu r F,$$

где r — радиус цапфы рамки и μ — коэффициент трения скольжения. Независимо от знака нормальных сил этот момент всегда направлен против направления движения. Так как при

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 = \pm \frac{aG}{2H}$$

силы (11.22) могут обратиться в нуль, то результирующий момент можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\text{для } |\dot{\alpha}| < |\dot{\alpha}_0|: \quad M = -\mu r (F_A + F_B) = -\mu r G \operatorname{sgn} \dot{\alpha}, \\ &\text{для } |\dot{\alpha}| > |\dot{\alpha}_0|: \quad M = -\mu r (F_A - F_B) = -\frac{2\mu r H}{a} \dot{\alpha}. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Таким образом, характеристика момента трения $M_1(\dot{\alpha})$ оказывается нелинейной и имеет вид, показанный на рис. 11.10. Для малых угловых скоростей момент трения следует закону кулонова трения. При возрастании угловой скорости он становится пропор-

циональным $\dot{\alpha}$. Следовательно, если угловая скорость прецессии достигает значения $\dot{\alpha}_0$, то в результате наличия гироскопических реакций в опорах кулоново трение действует подобно вязкому трению (Метелицын [74]).

Вследствие такой характеристики трения, какая изображена на рис. 11.10, колебания рамки затухают в течение конечного промежутка времени. Описанное явление наступает, вообще говоря,

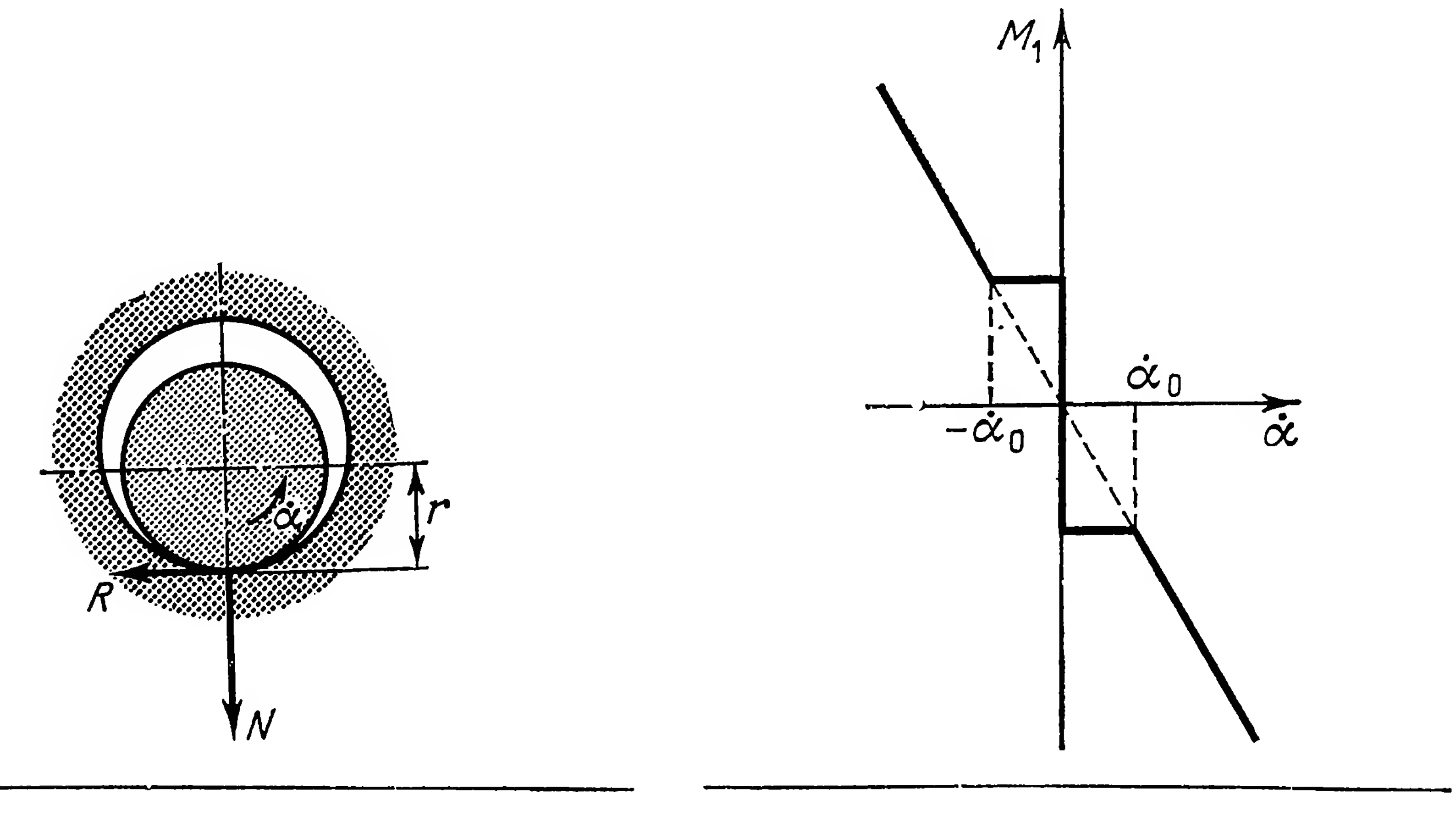


Рис. 11.9. Сила нормального давления и сила трения в цапфе опоры рамки.

Рис. 11.10. Нелинейная характеристика трения поворотного гироскопа.

лишь у гироскопов с сильно ограниченной свободой движения, так как только в этом случае вызванная прецессией сила давления может превысить вес. У гироскопов с тремя степенями свободы опоры испытывают, кроме веса, действие сил, сообщающих ускорение присоединенным к ротору массам [1]). Эти силы обычно значительно меньше, чем сила тяжести.

11.3. Разгон и выбег гироскопов

К эффектам, обусловленным трением, можно отнести также некоторые своеобразные явления, которые наблюдаются у гироскопов в кардановом подвесе с тремя степенями свободы при включении или выключении двигателя ротора. При разгоне ротора внутренняя рамка постепенно устанавливается в такое положение, при котором плоскости обеих рамок взаимно перпендикулярны ($\beta \to 0$). При внезапном включении двигателя на это движение обычно накладываются нутационные колебания, амплитуда которых

[1]) То есть массам рамок карданова подвеса. — *Прим. ред.*

уменьшается по мере перехода ротора в указанное выше положение. Наоборот, при отключении двигателя внутренняя рамка отходит от своего нормального положения. Если при этом ей случится дойти до ограничителя, то внешняя рамка начнет почти внезапно и с большой скоростью вращаться вокруг своей оси. У курсовых гироскопов уход внутренней рамки обычно незаметен. Тем более поразительно, что через некоторое время после отключения двигателя наблюдаемая через смотровое окошко картушка вдруг начинает вращаться со сравнительно большой скоростью. Это явление получило название *гироскопического коллапса.*

Описанные явления объясняются последствиями нарушения равновесия моментов относительно оси ротора. Для того чтобы в этом разобраться, рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе,

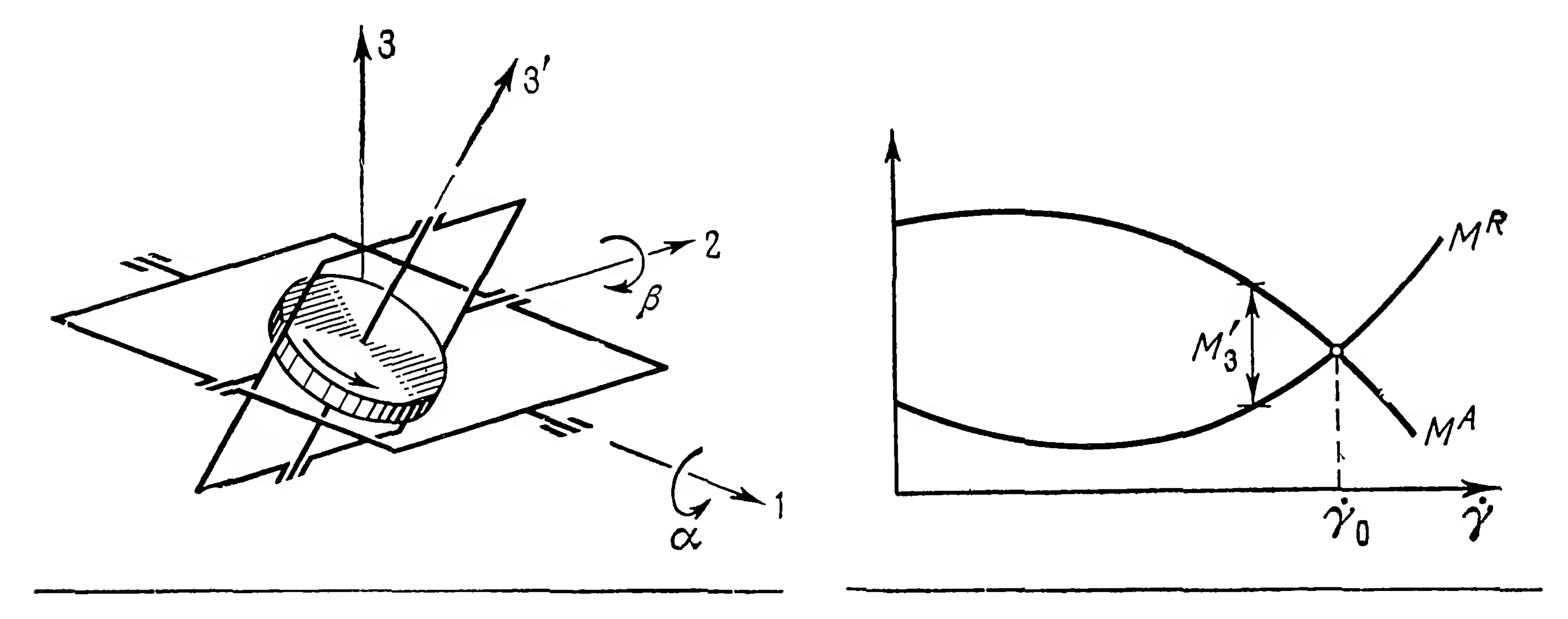


Рис. 11.11. Астатический гироскоп в кардановом подвесе.

Рис. 11.12. Моменты относительно оси ротора.

схематически изображенный на рис. 11.11, и напишем уравнение моментов относительно оси ротора 3′. Имеем

$$\dot H_3' = C^R \dot\omega_3' = M^A - M^R = M_3', \tag{11.24}$$

где M^A — момент приводного двигателя, а M^R — момент трения, обусловленный трением в опорах и сопротивлением воздуха. Зависимость этих моментов от относительной угловой скорости $\dot\gamma$ сходна с показанной на рис. 11.12. В силу

$$\omega_3' = \dot\gamma + \dot\alpha \sin\beta$$

у неколеблющегося гироскопа ($\dot\alpha = 0$) при рабочей угловой скорости $\omega_3' = \dot\gamma = \omega_0$ должен соблюдаться баланс моментов, т. е. $M_3' = M^A - M^R = 0$. При других угловых скоростях $M_3' = M_3'(\dot\gamma)$ следует зависимости, иллюстрируемой рис. 11.12. Для $M_3'(\dot\gamma) = M_3'(\omega_3')$ и $\dot\alpha \approx 0$ из уравнения (11.24) можно найти угловую скорость ω_3', а значит, и кинетический момент H_3'.

Рассмотрим теперь связанную с внешней рамкой систему координат 1, 2, 3. Предполагая, что гироскоп вращается настолько

быстро, что составляющими кинетического момента обеих рамок по сравнению с кинетическим моментом ротора можно пренебречь, получаем

$$H_i \approx (H \sin\beta,\ 0,\ H\cos\beta).$$

Если $\Omega_i = (\alpha, 0, 0)$ — вектор угловой скорости внешней рамки, то по теореме о кинетическом моменте (10.1) получаем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{H}\sin\beta + H\cos\beta\,\dot{\beta} &= M_1, \\ -H\cos\beta\,\dot{\alpha} &= M_2. \end{aligned} \tag{11.25}$$

При отсутствии трения в опорах и астатической системе имеем $M_1 = M_2 = 0$. Тогда из (11.25) следует

$$\frac{d}{dt}(H\sin\beta) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\alpha} = 0.$$

Отсюда

$$H\sin\beta = H_0 \sin\beta_0, \quad \alpha = \alpha_0. \tag{11.26}$$

Ввиду $H = H_3' = C^R\omega_3'$ движение внутренней рамки описывается соотношением

$$\sin\beta = \frac{H_0\sin\beta_0}{C^R\omega_3'(t)}. \tag{11.27}$$

Тем самым подтверждаются указанные выше явления. В интересующей нас области для ускоряющегося ротора $\dot{\omega}_3' > 0$ и поэтому $\dot{\beta} < 0$: внутренняя рамка движется к своему основному положению. Для замедляющегося ротора $\dot{\omega}_3' < 0$ и поэтому $\dot{\beta} > 0$: внутренняя рамка уходит. Этим можно объяснить и гироскопический коллапс. Если внутренняя рамка отклоняется настолько, что достигает ограничителя, то это значит, что во второе уравнение (11.25) надо ввести момент M_2, зависящий от давления, производимого ограничителем. Вследствие этого внешняя рамка начинает вращаться с угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = -\frac{M_2}{C^R\omega_3'(t)\cos\beta_A}, \tag{11.28}$$

где β_A — угол отклонения внутренней рамки по достижении ею ограничителя. Так как $\dot{\alpha}$ при уменьшении $\omega_3'(t)$ еще продолжает расти, в некоторых гироскопических приборах приходится принимать специальные меры для предотвращения слишком быстрого вращения внешней рамки.

Если, кроме того, существуют моменты, вызванные трением в опорах, то в полученных выше результатах качественно ничего не меняется. С учетом моментов трения $M_1(\dot{\alpha})$ и $M_2(\dot{\beta})$ уравнения

(11.25) переходят в следующие:

$$\begin{aligned} \dot{H}\sin\beta + H\cos\beta\,\dot{\beta} &= M_1(\dot{\alpha}), \\ -H\cos\beta\,\dot{\alpha} &= M_2(\dot{\beta}). \end{aligned} \tag{11.29}$$

Независимо от вида характеристик трения всегда $\operatorname{sgn} M_2 = -\operatorname{sgn}\dot{\beta}$, поскольку трение постоянно препятствует движению. Поэтому в силу $H > 0$ и $\cos\beta > 0$ из второго уравнения следует $\operatorname{sgn}\dot{\alpha} = \operatorname{sgn}\dot{\beta}$. Таким образом, уход вокруг обеих осей происходит всегда в одинаковом направлении.

Поскольку $\operatorname{sgn} M_1 = -\operatorname{sgn}\dot{\alpha} = -\operatorname{sgn}\dot{\beta}$, из (11.29/1) вытекает соотношение

$$\dot{H}\sin\beta + H\cos\beta\,\dot{\beta} + |M_1|\operatorname{sgn}\dot{\beta} = 0. \tag{11.30}$$

Оно удовлетворяется только тогда, когда

для ускоряющегося гироскопа ($\dot{H} > 0$) $\begin{cases} \text{при } \sin\beta > 0 & \dot{\beta} < 0, \\ \text{при } \sin\beta < 0 & \dot{\beta} > 0, \end{cases}$

для замедляющегося гироскопа ($\dot{H} < 0$) $\begin{cases} \text{при } \sin\beta > 0 & \dot{\beta} > 0, \\ \text{при } \sin\beta < 0 & \dot{\beta} < 0. \end{cases}$

Это означает, что независимо от конкретного вида характеристики трения у замедляющегося гироскопа ($\dot{H} < 0$) внутренняя рамка всегда уходит от основного положения, а у ускоряющегося ($\dot{H} > 0$) стремится к нему.

11.4. Эффекты, вызванные колебаниями

Когда в гироскопических приборах возникают колебания, то это может повлечь за собой различного рода явления, которые иногда мешают прибору выполнять свои функции. Наиболее важным среди них, безусловно, является так называемый *выпрямительный эффект (детектирование)*, при котором вследствие определенной несимметрии, присущей системе, возможно возникновение одностороннего ухода или односторонних вредных моментов. Подобные явления могут быть обусловлены следующими причинами:

1) инерцией рамок,
2) пульсациями момента на валу ротора,
3) упругой податливостью конструкции,
4) кинематической взаимосвязью колебаний у гироскопов с двумя степенями свободы.

Так как последняя из указанных причин существенна только для поворотных гироскопов, мы вернемся к ней ниже (§ 15.5). Что касается остальных причин, то мы рассмотрим несколько относящихся к ним типичных примеров.

11.4.1. Влияние инерции рамок. Здесь следует различать два принципиально разных случая в зависимости от того, является ли основание прибора, а вместе с ним и ось внешней рамки, неподвижным или само колеблется. В случае неподвижного основания рамки и ротор могут совершать колебания, которые либо возбуждаются как собственные колебания (нутации), либо вынужденно возникают вследствие неуравновешенности. Возможны также колебания, возбуждаемые разного рода контрольными устройствами (коррекцией). В случае подвижного основания колебания возбуждаются всегда извне и частично передаются на систему рамок.

Выпрямительный эффект, обусловленный инерцией рамок, влечет за собой *кинетический уход*. Частный случай такого ухода уже был исследован нами выше (§ 4.4). Там мы, исходя из нелинейных уравнений движения (4.61), определили среднюю скорость ухода оси астатического симметричного гироскопа в кардановом подвесе. Осреднение за один период нутаций показало нам, что ухода внутренней рамки не происходит ($\overline{\dot{\beta}} = 0$), а внешняя рамка вращается с угловой скоростью $\overline{\dot{\alpha}}$, определяемой выражением (4.67).

Вычисления (§ 4.4) производились в предположении, что в основном положении геометрические оси карданова подвеса совпадают с главными осями ротора, внутренней и внешней рамок. Для реальных гироскопических приборов такое предположение не всегда справедливо. Поэтому интересно также выяснить, каково влияние на кинетический уход центробежных моментов инерции рамок. Это можно установить тем же способом, что и в § 4.4. Более точная теория [75] приводит к следующему выводу: следует ожидать, что средняя скорость ухода внешней рамки вместо формулы (4.67) будет определяться формулой

$$\overline{\dot{\alpha}} \approx \frac{\beta_A^2 H \left[E^J \cos\beta_0 - (A^A + C^J)\sin\beta_0\right]}{2\left[A^0 - 2E^J \cos\beta_0 \sin\beta_0\right]^2}. \tag{11.31}$$

При $E^J = 0$ с учетом вытекающего из формулы (4.64) соотношения $\beta_A = \alpha_A \sqrt{A^0/B}$ формула (11.31) переходит в (4.67). Следует отметить тот факт, что на уход влияет только центробежный момент инерции E^J внутренней рамки. Как D^J и F^J, так и центробежные моменты инерции внешней рамки в конечном результате не фигурируют. Из (11.31) видно, что кинетический уход возможен и при $\beta_0 = 0$. Чтобы его избежать, необходимо динамически отбалансировать внутреннюю рамку, т. е. добиться $E^J = 0$.

При неуравновешенном роторе у гироскопа в кардановом подвесе возбуждаются вынужденные колебания с частотой вращения ротора. Их амплитуду и фазу можно определить известными методами, причем необходимо обращать особое внимание на то, что вследствие резонансных явлений можно столкнуться с весьма большой амплитудой. Путем осреднения этих колебаний за один

период можно найти также односторонние вибрационные моменты, приводящие к кинетическому уходу [75]. То же относится и к самовозбуждающимся колебаниям карданова подвеса. Во всех этих случаях результирующая скорость ухода пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Зависимость ухода от моментов инерции и центробежных моментов инерции рамок для разного рода колебаний различна. То же относится и к влиянию угла наклона β_0 внутренней рамки и кинетического момента H.

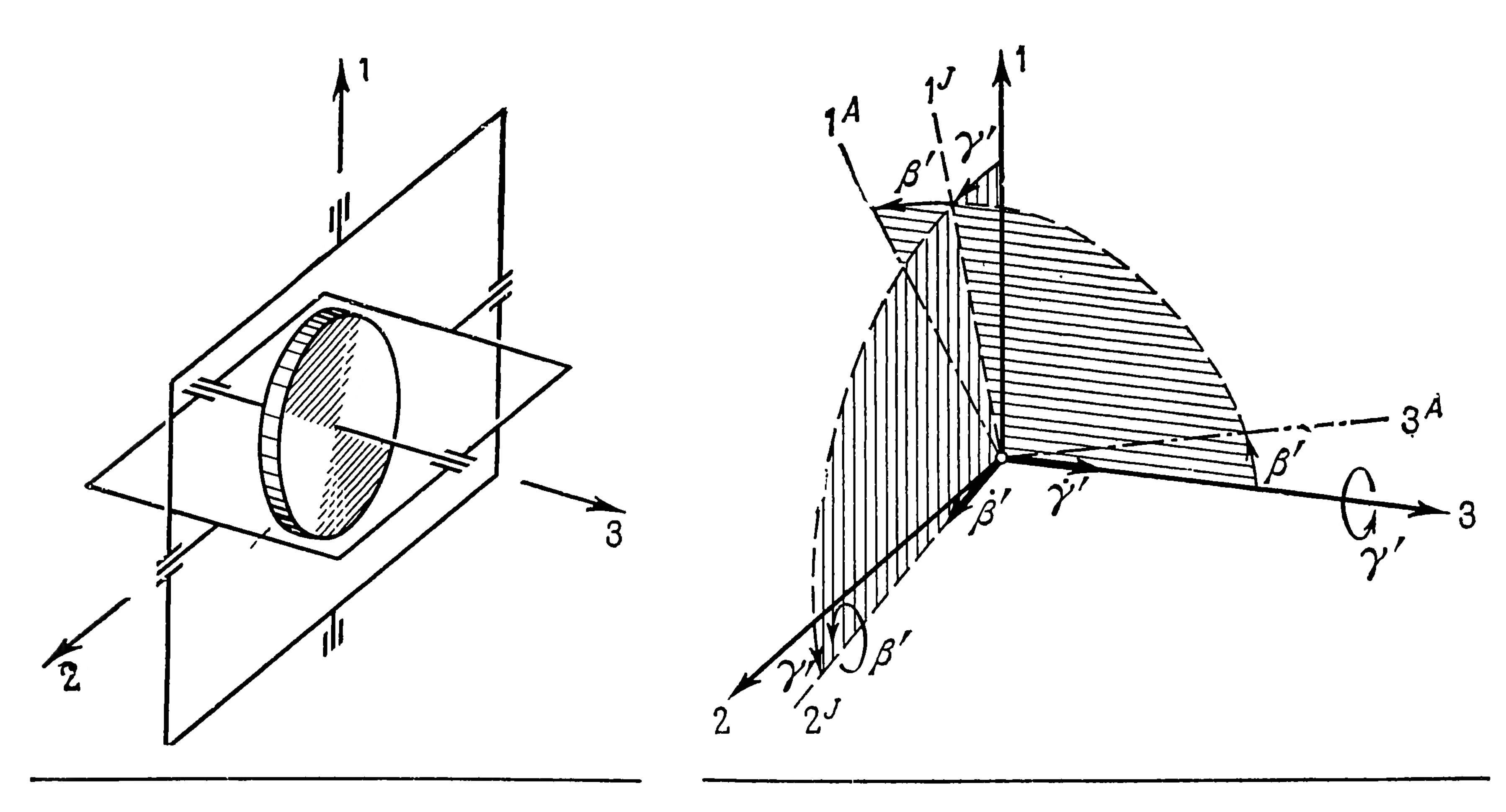


Рис. 11.13. Гироскоп в кардановом подвесе и связанные с ним оси координат.

Рис. 11.14. К расчету поворота рамок относительно ротора.

Названные уходы могут иметь отрицательные последствия, если приборы подвергаются юстировке в лабораторных наземных условиях, а затем используются на спутниках и космических кораблях в условиях невесомости. Так как путем тщательной балансировки гироскопы юстируются в лаборатории так, чтобы их уход относительно звезд сводился к нулю, то может случиться, что скорость ухода, обусловленная кинетическими причинами, окажется скомпенсированной как раз тем остаточным моментом силы тяжести, который является следствием указанной балансировки. Поскольку этот момент в условиях невесомости, характерных для движения в космосе, обращается в нуль или в период старта космического корабля принимает значение, отличное от земного, не исключено появление погрешностей, которые при испытаниях в лабораторных условиях могли оказаться незамеченными.

При рассмотрении названных выше явлений мы предполагали, что сам ротор участвует в колебаниях системы. Но в случае таких колебаний, которые передаются через основание прибора, ось ро-

тора можно считать не втянутой в колебательный процесс. Во всяком случае, уход оси, с которым мы здесь можем столкнуться, происходит настолько медленно, что на протяжении одного периода колебаний ось ротора можно считать неподвижной. Тогда по известному движению рамок можно определить создаваемые ими моменты реакций. Осреднив за период момент, наложенный на ротор внутренней рамкой, мы можем найти средний уход оси ротора.

Воспользуемся изображенной на рис. 11.13 системой осей и положим, что ее ось 3 совпадает с неподвижной осью ротора. Следовательно, внутренняя рамка может вращаться только вокруг оси 3; соответствующий угол поворота обозначим γ'. Векторы угловых скоростей рамок имеют вид (рис. 11.14)

$$\begin{aligned} \omega_i^J &= (0,\ 0,\ \dot\gamma'), \\ \omega_i^A &= (-\dot\gamma' \sin\beta',\ \dot\beta',\ \dot\gamma' \cos\beta'), \end{aligned} \tag{11.32}$$

где β' — угол поворота внешней рамки относительно внутренней. Уравнения движения внутренней и внешней рамок в осях, связанных с рамками, могут быть написаны в форме Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot H_i^J + \varepsilon_{ijk}\omega_j^J H_k^J &= M_i^J = M_i^{JR} + M_i^{JA}, \\ \dot H_i^A + \varepsilon_{ijk}\omega_j^A H_k^A &= M_i^A = M_i^{AJ} + M_i^{AG}. \end{aligned} \tag{11.33}$$

Если геометрические оси карданова подвеса не совпадают с главными осями рамок, то векторы кинетических моментов будут равны

$$\begin{aligned} H_i^J &= \Theta_{ij}^J \omega_j^J = \begin{bmatrix} -E^J\dot\gamma' \\ -D^J\dot\gamma' \\ C^J\dot\gamma' \end{bmatrix}, \\ H_i^A &= \Theta_{ij}^A \omega_j^A = \begin{bmatrix} -A^A \sin\beta'\dot\gamma' - F^A\dot\beta' - E^A\cos\beta'\dot\gamma' \\ F^A \sin\beta'\dot\gamma' + B^A\dot\beta' - D^A\cos\beta'\dot\gamma' \\ E^A\sin\beta'\dot\gamma' - D^A\dot\beta' + C^A\cos\beta'\dot\gamma' \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{11.34}$$

В обозначениях моментов в (11.33) первый верхний индекс указывает на тело, к которому момент приложен, а также на систему координат, в которой составлены уравнения. Второй индекс уточняет происхождение данного момента. Так, M^{AG} — это момент, накладываемый основанием на внешнюю рамку. Поскольку уравнения (11.33) относятся к системам координат, связанным с рамками, необходимо иметь в виду следующее преобразование:

$$M_l^{JA} = -a_{il}^{\beta} M_i^{AJ} = -\begin{bmatrix} \cos\beta' & 0 & \sin\beta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta' & 0 & \cos\beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^{AJ} \\ 0 \\ M_3^{AJ} \end{bmatrix}. \tag{11.35}$$

Соответственно в неподвижных осях 1, 2, 3 для момента, наложенного на ротор, имеем

$$M_j^{RJ} = -a_{ij}^{\gamma} M_i^{JR} = -\begin{bmatrix} \cos\gamma' & -\sin\gamma' & 0 \\ \sin\gamma' & \cos\gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1^{JR} \\ M_2^{JR} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.36)$$

При этом имеется в виду отсутствие трения в опорах, т. е. $M_1^{AG} = M_2^{JA} = M_3^{JR} = 0$. Теперь для вычисления искомого момента M_i^{RJ} можно из (11.33/2) найти M_i^{AJ}. После преобразования последнего согласно (11.35) и подстановки в (11.33/1) мы определим M_i^{JR}. Отсюда, согласно (11.36), получаем

$$M_j^{RJ} = -a_{ij}^{\gamma}\left[a_{ki}^{\beta}\left(-M_k^{AG} + \dot{H}_k^A + \varepsilon_{klm}\omega_l^A H_m^A\right) + \dot{H}_i^J + \varepsilon_{ikl}\omega_k^J H_l^J\right]. \quad (11.37)$$

Надо подставить в это выражение функции $\beta'(t)$ и $\gamma'(t)$ и произвести осреднение за период колебаний T:

$$\overline{M_i^{RJ}} = \frac{1}{T}\int_0^T M_i^{RJ}\,dt. \quad (11.38)$$

Далее, опираясь на приближенные уравнения (11.25) ($\dot{H} = 0$), отсюда получаем составляющие средней угловой скорости ухода оси ротора, теперь уже не рассматриваемой как неподвижная:

$$\bar{\dot{\alpha}} \approx -\frac{\overline{M_2^{RJ}}}{H\cos\beta_0}, \quad \bar{\dot{\beta}} \approx \frac{\overline{M_1^{RJ}}}{H\cos\beta_0}. \quad (11.39)$$

Вычисление входящего в (11.39) выражения (11.37) в общем случае может подчас оказаться затруднительным, однако при осреднении согласно (11.38) большинство членов выпадает, в том числе и неизвестный момент M_i^{AG}. Для иллюстрации сказанного рассмотрим простой пример конического движения основания, при котором ось внешней рамки описывает прямой круговой конус с углом при вершине, равным 2δ (рис. 11.15). В данном случае

$$\beta' = \delta\cos\Omega t, \quad \gamma' = \delta\sin\Omega t. \quad (11.40)$$

Вычисление значений (11.37) в предположении $\delta \ll 1$ после осреднения согласно (11.38) дает

$$\overline{M_1^{RJ}} = -{}^1/_2 D^A\delta^2\Omega^2, \quad \overline{M_2^{RJ}} = -{}^1/_2 E^A\delta^2\Omega^2. \quad (11.41)$$

Подставив эти значения в (11.39), получим составляющие средней скорости ухода

$$\bar{\dot{\alpha}} \approx \frac{E^A\delta^2\Omega^2}{2H}, \quad \bar{\dot{\beta}} \approx -\frac{D^A\delta^2\Omega^2}{2H}. \quad (11.42)$$

Эти угловые скорости опять-таки пропорциональны квадратам амплитуды и частоты. При динамически уравновешенной внешней

рамке никакого ухода не возникает. Однако при колебаниях или коническом движении, происходящих не около основного положения ($\beta' = 0$), можно констатировать уход и при равных нулю центробежных моментах инерции. Различные случаи подобного рода были исследованы, например, Климовым [76].

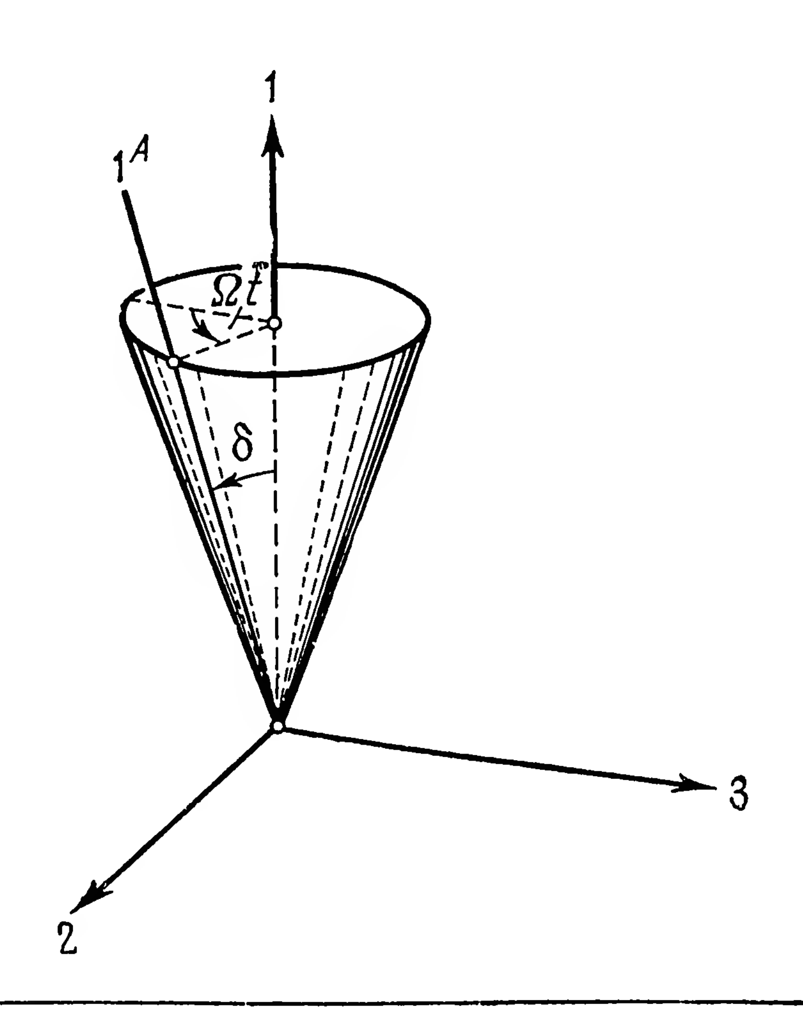


Рис. 11.15. Коническое движение оси внешней рамки.

11.4.2. Последствия нарушения баланса моментов относительно оси ротора. В § 11.3 мы уже рассматривали некоторые явления, возникающие при ускорении или замедлении ротора. Займемся еще двумя эффектами, которые могут возникнуть при колебаниях гироскопа.

Режим гиродвигателя регламентируется скоростью ротора относительно статора, т. е. у гироскопа в кардановом подвесе величиной $\dot{\gamma}$. При установившемся режиме (рис. 11.12) $\dot{\gamma} = \omega_0 = \text{const}$. С другой стороны, для гироскопа в кардановом подвесе, согласно (1.51),

$$\omega_3' = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta.$$

У колеблющегося гироскопа при $\dot{\alpha} \sin \beta > 0$ относительная угловая скорость $\dot{\gamma}$ оказывается меньше, так как вследствие инерции ротора абсолютная угловая скорость ω_3' при быстрых нутационных колебаниях остается практически неизменной. Согласно рис. 11.12, это приводит к появлению момента рассогласования

$$\Delta M_3' = -k\, \Delta\dot{\gamma} \approx k\dot{\alpha} \sin \beta. \qquad (11.43)$$

У синхронных гироскопов постоянный коэффициент k может достигать очень большой величины. Момент, противоположный $\Delta M_3'$,

приложен к статору (внутренней рамке) и имеет составляющую в направлении оси внешней рамки (ось 1)

$$\Delta M_1 = -\Delta M_3' \sin\beta = -k \sin^2\beta\, \dot{\alpha}. \tag{11.44}$$

При малой амплитуде нутационных колебаний можно положить $\beta = \beta_0 + \tilde{\beta}$ и

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_A \cos\omega^N t, \\ \tilde{\beta} &= \alpha_A \sqrt{\frac{A^0}{B}} \sin\omega^N t. \end{aligned} \tag{11.45}$$

Подставив (11.45) в (11.44), получим

$$\Delta M_1 = -k\dot{\alpha}(\sin^2\beta_0 + \tilde{\beta}\sin 2\beta_0) =$$
$$= k\sin^2\beta_0\alpha_A\omega^N \sin\omega^N t + k\sin 2\beta_0\alpha_A^2 \sqrt{\frac{A^0}{B}}\,\omega^N \sin^2\omega^N t.$$

Среднее значение этого момента за период нутации не равно нулю:

$$\overline{\Delta M_1} = \frac{\omega^N}{2\pi}\int_0^{T_N} \Delta M_1\, dt = \frac{1}{2}\omega^N k \sin 2\beta_0 \alpha_A^2 \sqrt{\frac{A^0}{B}}\,.$$

Используя знакомые нам соотношения (11.39) и (4.65)

$$\overline{\dot{\beta}} = \frac{\overline{\Delta M_1}}{H\cos\beta_0} \quad \text{и} \quad \omega^N = \frac{H\cos\beta_0}{\sqrt{A^0 B}},$$

находим из полученного выражения скорость ухода внутренней рамки

$$\overline{\dot{\beta}} = \frac{k\alpha_A^2 \sin 2\beta_0}{2B}. \tag{11.46}$$

По этой причине начальное отклонение внутренней рамки еще больше возрастает.

У гироскопов в кардановом подвесе можно наблюдать еще одно явление, связанное с колебаниями. В определенном интервале угловых скоростей выбегающего ротора амплитуда нутационных колебаний сильно возрастает, тогда как при ускоряющемся роторе она обычно уменьшается, хотя иногда и возрастает. Эти явления можно объяснить, если обратиться к уравнениям движения. Включая в приближенные уравнения (11.25), которыми мы уже пользовались, инерционные члены и полагая $M_1 = M_2 = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\cos\beta\,\dot{\beta} + \dot{H}\sin\beta &= 0, \\ B\ddot{\beta} - H\cos\beta\,\dot{\alpha} \qquad &= 0. \end{aligned} \tag{11.47}$$

Здесь $H(t)$ является функцией времени и $\dot{H}=\Delta M_3'$ равно результирующему моменту относительно оси ротора. Умножая первое уравнение (11.47) на $\dot{\alpha}$ и подставляя в него $\cos\beta$ из второго, после интегрирования по времени находим следующее энергетическое соотношение:

$$^1/_2(A\dot{\alpha}^2+B\dot{\beta}^2)+\int\dot{H}\dot{\alpha}\sin\beta\,dt=E_0. \qquad (11.48)$$

Так как при нутационных колебаниях движение оси фигуры совершается всегда в том же направлении, что и вращение ротора, изображающая точка системы на плоскости α-β, а следовательно, и на плоскости $\alpha\cdot\sin\beta$ движется в направлении, принятом в математике за положительное (рис. 11.16). Поэтому всегда справедливо соотношение

$$\int\dot{\alpha}\sin\beta\,dt=\int\sin\beta\,d\alpha<0.$$

Отсюда следует, что интеграл в равенстве (11.48) является при ускоряющемся роторе ($\dot{H}>0$) монотонно убывающей функцией

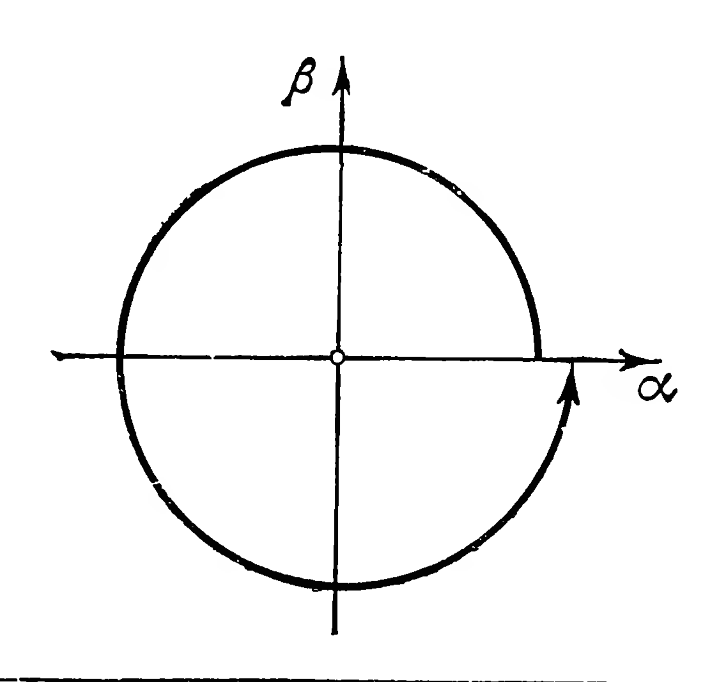


Рис. 11.16. Вид нутационной дуги в плоскости α-β

времени, а при выбегающем роторе ($\dot{H}<0$) монотонно возрастающей. В силу этого у ускоряющегося гироскопа энергия движения передается рамкам, а у замедляющегося, наоборот, отнимается от них. Но непосредственно из этого еще нельзя делать заключение об изменении амплитуды нутационных колебаний, поскольку $H(t)$ — величина переменная. Тенденцию к изменению амплитуды для малого $\dot{H}$ и $\beta\ll 1$ можно оценить следующим образом. Решение уравнений (11.47) можно искать в такой форме:

$$\begin{aligned}\alpha&=\alpha_A(t)\cos\varphi(t),\\ \beta&=\beta_A(t)\sin\varphi(t)=\sqrt{\frac{A}{B}}\,\alpha_A(t)\sin\varphi(t).\end{aligned} \qquad (11.49)$$

При $\dot{H} = 0$ оно дает уже знакомое нам решение для нутационных колебаний

$$\alpha_A = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = \omega^N t = \frac{H}{\sqrt{AB}} t. \tag{11.50}$$

Подставив (11.49) в (11.48), получим

$$\frac{1}{2} A \left[\alpha_A^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \dot{\alpha}_A^2\right] = E_0 - \int \dot{H} \sin\beta \, d\alpha. \tag{11.51}$$

Ввиду предположенной малости $\dot{H}$ имеем

$$\dot{\alpha}_A \ll \alpha_A \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{dt} \approx \omega^N \approx \frac{H}{\sqrt{AB}}$$

Таким образом, приближенно

$$\alpha_A^2 \approx \frac{2B}{H^2}\left[E_0 - \int \dot{H} \sin\beta \, d\alpha\right]. \tag{11.52}$$

Отсюда видно, что величина α_A в основном пропорциональна $1/H$, так что у ускоряющегося гироскопа следует ожидать уменьшения амплитуды нутаций, а у замедляющегося — ее увеличения. Это подтверждается и экспериментально. Интегральный член в квадратных скобках противодействует указанной тенденции, однако вследствие принятой малости $\dot{H}$ он в общем не может изменить качественную картину явления (ср. также Шмид [77]).

11.4.3. Влияние упругости элементов конструкции гироскопических приборов. Элементы конструкции, несущие ротор, как-то: валы, рамки, всевозможные крепления, корпуса, не являются абсолютно жесткими. Под действием нагрузки, наблюдаемой, например, при ускорениях, они всегда деформируются. Вследствие этого также могут возникать односторонние вибрационные моменты, приводящие к нежелательным погрешностям или уходам. Далее мы займемся их исследованием, считая деформации упругими.

В отличие от колебательных явлений, рассмотренных в предыдущих параграфах, мы будем теперь предполагать, что происходят не вращательные, а поступательные колебания основания. Если $a_i = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор ускорения этих колебаний, то в центре масс системы приложена сила инерции

$$F_i^R = -ma_i. \tag{11.53}$$

Но, как показано на рис. 11.17, вследствие упругой податливости конструкции центр масс S отклоняется от своего положения равновесия O; это отклонение определяется вектором r_i. Последний может быть найден из формулы

$$F_i^R = c_{ij} r_j. \tag{11.54}$$

При этом предполагается, что отклонения пропорциональны нагрузкам. Это, безусловно, допустимо, если частота вынужденных колебаний основания много меньше частоты собственных колебаний, обусловленных упругостью конструкции. В большинстве слу-

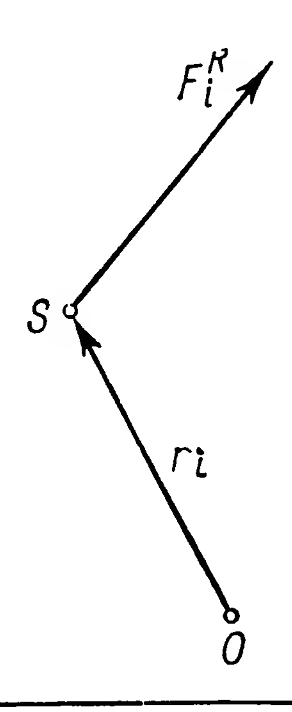


Рис. 11.17. К возникновению инерционного момента (11.56) при упругой податливости опоры гироскопа.

чаев это требование удовлетворяется. Если главные оси тензора упругости c_{ij} совпадают с осями координат, то

$$F_i^R = \begin{bmatrix} c_1 r_1 \\ c_2 r_2 \\ c_3 r_3 \end{bmatrix}, \qquad r_i = \begin{bmatrix} \dfrac{F_1^R}{c_1} \\ \dfrac{F_2^R}{c_2} \\ \dfrac{F_3^R}{c_3} \end{bmatrix}. \tag{11.55}$$

Сила инерции F_i^R, приложенная в смещенном центре масс S, создает момент относительно точки O, являющейся положением равновесия центра масс (рис. 11.17):

$$M_i = \varepsilon_{ijk} r_j F_k. \tag{11.56}$$

Подставляя сюда (11.55) и (11.53), получаем

$$M_i = \begin{bmatrix} F_2 F_3 \left(\dfrac{1}{c_2} - \dfrac{1}{c_3}\right) \\ F_3 F_1 \left(\dfrac{1}{c_3} - \dfrac{1}{c_1}\right) \\ F_1 F_2 \left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2}\right) \end{bmatrix} = m^2 \begin{bmatrix} a_2 a_3 \dfrac{c_3 - c_2}{c_2 c_3} \\ a_3 a_1 \dfrac{c_1 - c_3}{c_3 c_1} \\ a_1 a_2 \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 c_2} \end{bmatrix}. \tag{11.57}$$

Отсюда видно, что в случае равножесткого подвеса ($c_1 = c_2 = c_3$) никаких моментов не возникает. Если же коэффициенты c_1, c_2, c_3

не все одинаковы, то говорят об *эффекте неравножесткости* подвеса.

В качестве примера рассмотрим вначале весьма важный случай постоянного ускорения (ускорение силы тяжести!). Если вектор ускорения силы тяжести лежит, например, в плоскости 2-3 (рис. 11.13) и образует с осью 2 угол φ, то

$$a_1 = 0, \quad a_2 = g\cos\varphi, \quad a_3 = g\sin\varphi.$$

Подставляя эти значения в (11.57), находим

$$M_1 = \frac{m^2 g^2 (c_3 - c_2)\sin 2\varphi}{2c_2c_3}, \quad M_2 = M_3 = 0. \tag{11.58}$$

Момент равен нулю, если сила действует в одном из главных направлений, т. е. когда $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Он пропорционален разности $c_3 - c_2$ коэффициентов жесткости, а также квадрату ускорения (g^2-эффект!). Если направление вектора ускорения относительно основания неизменно, то указанный момент можно легко компенсировать. Однако при испытаниях гироскопических приборов на стенде часто преднамеренно исследуются различные положения прибора в поле силы тяжести. При вариации угла φ рассматриваемый нами эффект неравножесткости проявляется как возмущение удвоенной по сравнению с частотой изменения φ частоты.

В качестве следующего примера рассмотрим колебание основания с амплитудой $s_{i0} = (s_{10}, s_{20}, s_{30})$ и частотой Ω. В этом случае

$$a_i = s_{i0}\Omega^2\cos\Omega t. \tag{11.59}$$

Подставив это выражение в (11.57), получим момент, пропорциональный $\cos^2\Omega t$. Таким образом, после осреднения за один период

$$\bar{M}_i = \frac{1}{T}\int_0^T M_i\,dt \tag{11.60}$$

мы придем к моменту

$$\bar{M}_i = \frac{1}{2}m^2\Omega^4 \begin{bmatrix} s_{20}s_{30}\dfrac{c_3 - c_2}{c_2c_3} \\ s_{30}s_{10}\dfrac{c_1 - c_3}{c_3c_1} \\ s_{10}s_{20}\dfrac{c_2 - c_1}{c_1c_2} \end{bmatrix}. \tag{11.61}$$

Нетрудно убедиться в том, что при круговых поступательных колебаниях типа

$$a_2 = s\Omega^2\cos\Omega t, \quad a_3 = s\Omega^2\sin\Omega t \tag{11.62}$$

осреднённый момент от неравножесткости равен нулю. То же относится и к эллиптическим колебаниям, если главные оси эллипсов

совпадают с осями координат. Разумеется, при этом предполагается, что частота вынужденных колебаний достаточно мала по сравнению с собственной частотой конструкции, а демпфирование отсутствует. Тогда отклонение всегда находится в фазе с возбуждающей силой. Если указанные посылки не соблюдаются, то в результате появляется опять-таки постоянная составляющая момента, зависящая в данном случае от демпфирования, от частоты и от величины возбуждающего воздействия (Фернандец и Макомбер [78]).

Следует еще отметить, что моменты (11.58) или (11.61) у свободных гироскопов вызывают уход, а у гироскопов, на которые накладываются моменты (типа моментов упругих сил), погрешности в показаниях. И те, и другие поддаются расчету известными способами.

Глава 12

Позиционные гироскопы

Если суммарный момент приложенных к гироскопу внешних сил равен нулю, то из теоремы о кинетическом моменте следует постоянство вектора кинетического момента $H_i = H_{i0} = \mathrm{const}$. Так как у быстровращающихся гироскопов кинетическая ось, ось вращения и ось фигуры практически совпадают, то такой не подвергающийся действию внешних моментов гироскоп сохраняет неизменным направление своей оси в пространстве. Его можно назвать *хранителем направления* и использовать в этих целях.

Подвес позиционного гироскопа должен быть устроен так, чтобы ротор обладал тремя степенями свободы. Для обеспечения этого создано множество различных конструкций: подвес на острие, поплавковый подвес, электростатический и электромагнитный

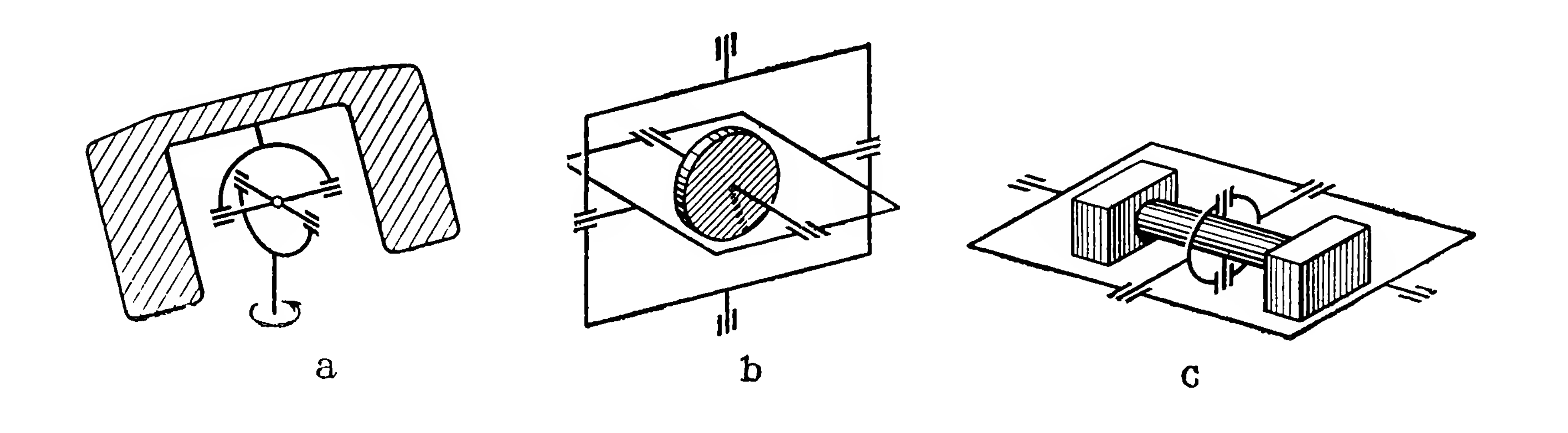


Рис. 12.1. Различные гипы кардановых подвесов: внутренний (a), внешний (b) и смешанный (c) подвесы.

подвесы, торсионный подвес, подвесы на упругих крестовинах. Но особенно большое распространение получил карданов подвес, который может быть выполнен в виде *внутреннего* (рис. 12.1, a), *внешнего* (рис. 12.1, b) или *комбинированного* (рис. 12.1, c) подвеса. Для гироскопов в кардановом подвесе характерны некоторые кинематические особенности, которые мы рассмотрим ниже.

12.1. Кинематическая погрешность позиционного гироскопа в кардановом подвесе

Исследуем для примера показания позиционного гироскопа, установленного на каком-либо объекте (скажем, на самолете). В зависимости от ориентации системы осей, связанной с самолетом (1^F, 2^F, 3^F, рис. 9.1), относительно осей 1, 2, 3 гироскопа разными будут и показания прибора. Наибольший интерес обычно представляют основные виды расположения прибора, характеризующиеся параллельностью осей рамок в их основном положении осям самолета. При этом возможны шесть случаев, изображенных на рис. 12.2. Каждый из них может быть однозначно определен при помощи одной из перестановок цифр 1, 2, 3. Пусть, например, «123» обозначает такое расположение, при котором вне зависимости от направления осей имеет место следующая ориентация: $1 \parallel 1^F$, $2 \parallel 2^F$, $3 \parallel 3^F$. Тогда «312» будет обозначать $3 \parallel 1^F$, $1 \parallel 2^F$, $2 \parallel 3^F$ и т. д.

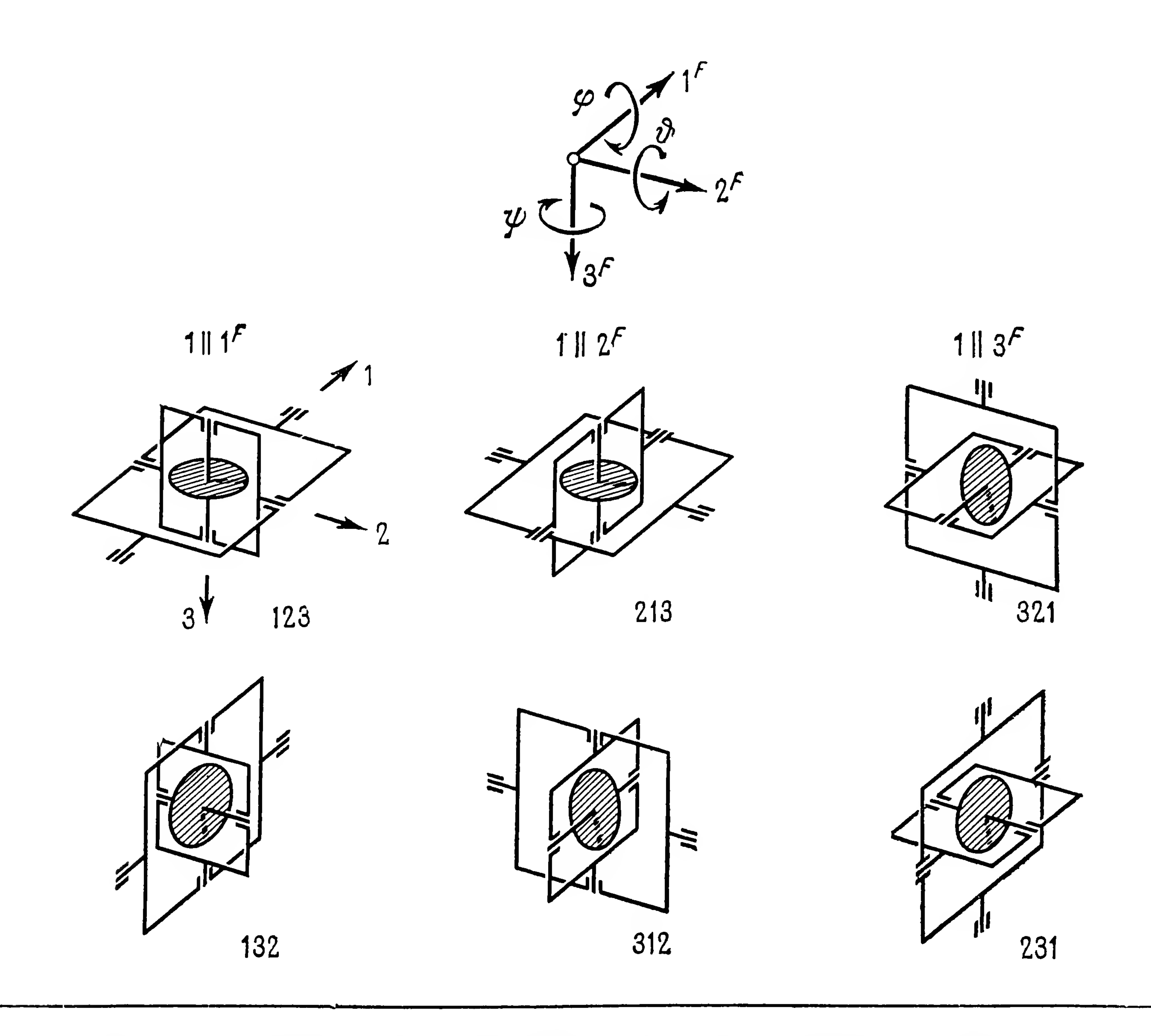


Рис. 12.2. Основные виды расположения гироскопа в кардановом подвесе.

Предположим, что для измерения угла ψ (угол рыскания) применяется, например, ориентация «321» или «231». И та, и другая допускают поворот внешней рамки на 360°, так что приборы пригодны и для работы на вираже. Если же углы рыскания ограниченны, то могут быть использованы конфигурации «132» или «312». Для вертикантов или гироскопических горизонтов, предназначенных для измерения углов ϑ (угол тангажа) и φ (угол крена), пригодны комбинации «123» и «213». Если конструкция допускает

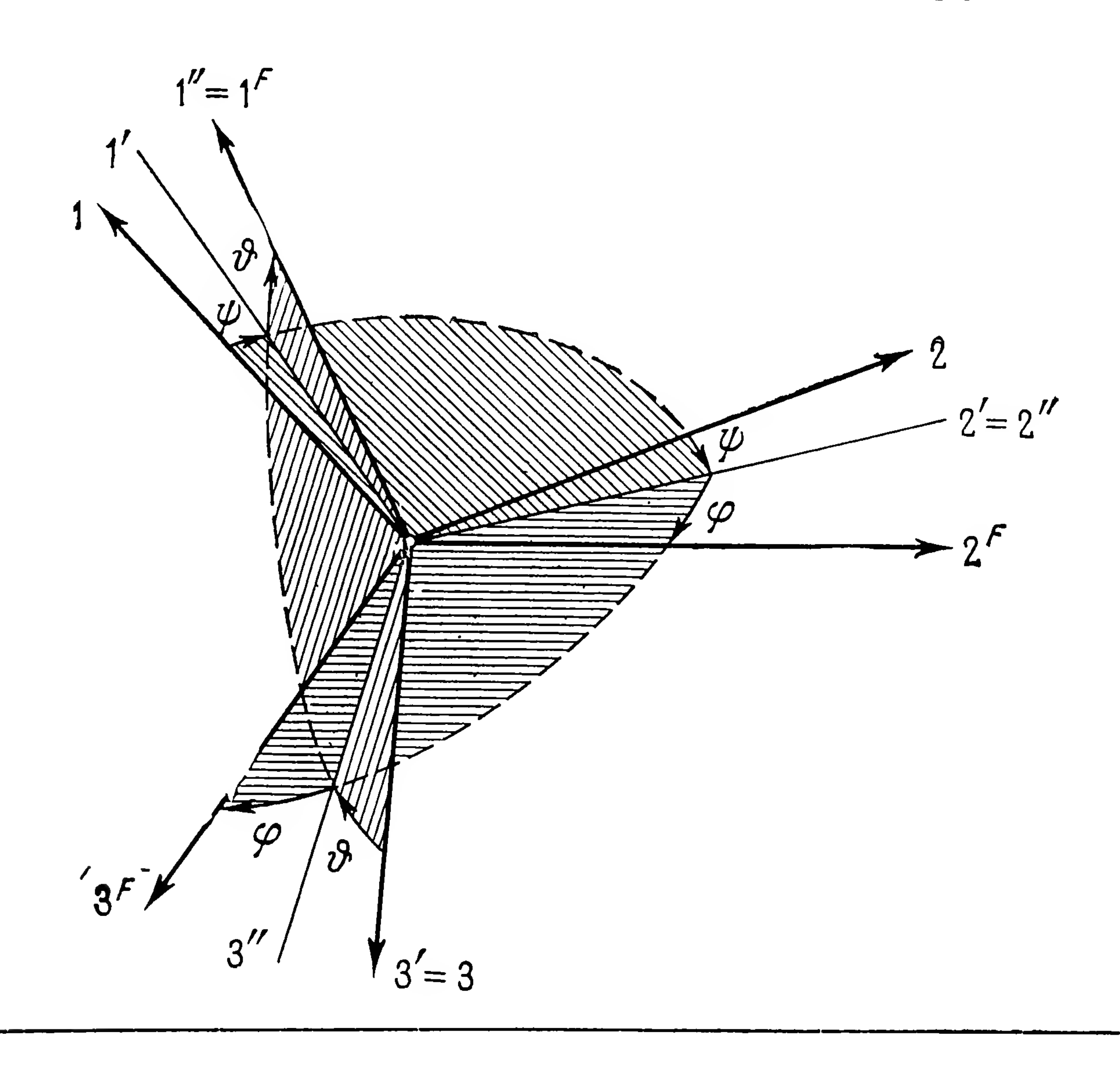


Рис. 12.3. Повороты системы координат 1^F, 2^F, 3^F, связанной с самолетом, относительно системы координат 1, 2, 3, связанной с гироскопом в кардановом подвесе.

полный поворот внешней рамки, то при расположении «123» может быть допущено вращение самолета («бочка»), а при расположении «213» — «мертвая петля».

У гироскопа в кардановом подвесе легко измерять углы α и β. Поэтому для нас представляет интерес зависимость углов α и β от углов ψ, ϑ, φ, определяющих положение самолета в пространстве. Таким образом, искомыми являются

$$\alpha = \alpha(\psi, \vartheta, \varphi), \quad \beta = \beta(\psi, \vartheta, \varphi). \tag{12.1}$$

При вычислении функций (12.1) можно исходить из того, что направление оси ротора в пространстве неизменно. На это допущение можно опираться даже при наличии медленного ухода, так как при приближенных расчетах можно считать, что возникающие от ухода погрешности просто складываются с кинематическими погрешностями подвеса.

Рассмотрим неподвижную систему координат 1, 2, 3 и систему 1^F, 2^F, 3^F, связанную с самолетом (рис. 12.3). Они могут быть совмещены путем трех последовательных ортогональных поворотов вокруг осей 3 (угол ψ), $2'$ (угол ϑ) и $1'' \equiv 1^F$ (угол φ). Следует иметь в виду, что эти углы, используемые в механике полета, определяются иначе, чем углы Эйлера на рис. 1.23. Для представления радиуса-вектора r_i в различных системах координат (рис. 12.3) справедливы следующие формулы преобразования:

$$
\begin{aligned}
r_i &= a^{\psi}_{ij} r'_j, \\
r_i &= a^{\psi}_{ij} a^{\vartheta}_{jk} r''_k, \\
r_i &= a^{\psi}_{ij} a^{\vartheta}_{jk} a^{\varphi}_{kl} r^F_l = a^F_{ij} r^F_j,
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

где

$$
a^{\psi}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a^{\vartheta}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix},
$$

$$
a^{\varphi}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix};
$$

$$
a^F_{ij} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{bmatrix}
\tag{12.3}
$$

являются матрицами преобразования[1]. С другой стороны, координаты вектора r^J_i в системе, связанной с внутренней рамкой, можно выразить через его же координаты в системе самолета; для этого нужно сделать последовательные преобразования сначала к осям, связанным с внешней рамкой, а затем к осям корпуса прибора и к осям самолета. Эти преобразования имеют вид

$$
\begin{aligned}
r^A_i &= a^{\beta}_{ij} r^J_i, \\
r^G_i &= a^{\alpha}_{ij} r^A_j = a^{\alpha}_{ij} a^{\beta}_{jk} r^J_k, \\
r^F_i &= a^E_{ij} r^G_j = a^E_{ij} a^{\alpha}_{jk} a^{\beta}_{kl} r^J_l,
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

где a^E_{ij} — установочная матрица, определяющая ориентацию прибора относительно самолета; ее можно получить, например, из (12.3), если подставить туда углы ψ_0, ϑ_0, φ_0, которые образуют между собой оси корпуса прибора и самолета. Так как в основном

[1]) Равенства (12.2) устанавливают связь между координатами вектора r_i в осях 1, 2, 3 и его же координатами в системах $1'$, $2'$, $3'$, $1''$, $2''$, $3''$ и в осях самолета соответственно. — *Прим. ред.*

рабочем режиме прибора углы α и β равны нулю, установочная матрица определяет ориентацию осей рамок карданова подвеса и ротора относительно самолета в этом основном положении. Остальные матрицы имеют вид

$$a_{ij}^{\beta}=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix},\quad a_{ij}^{\alpha}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Таким образом, связь между координатами вектора в системе внутренней рамки и в неподвижной системе определяется выражением

$$r_i=a_{ij}^{F}a_{jk}^{E}a_{kl}^{\alpha}a_{lm}^{\beta}r_m^{J}. \tag{12.5}$$

Если принять во внимание, что единичный вектор в направлении оси ротора $r_i^{J0}=(0,\ 0,\ 1)$ неподвижен, а начальное положение оси ротора в неподвижной системе в силу $a_{ij}^{\alpha}=a_{ij}^{\beta}=\delta_{ij}$ задано как

$$r_i^0=a_{ij}^{E}r_j^{J0},$$

то для произвольного движения объекта из (12.5) следует, что

$$a_{ij}^{E}r_j^{J0}=a_{ij}^{F}a_{jk}^{E}a_{kl}^{\alpha}a_{lm}^{\beta}r_m^{J0}.$$

Для вычислений это выражение удобно преобразовать, умножив его на a_{ji}^{F}:

$$a_{ji}^{F}a_{jk}^{E}r_k^{J0}=a_{ij}^{E}r_j^{G0}, \tag{12.6}$$

где

$$r_i^{G0}=a_{ij}^{\alpha}a_{jk}^{\beta}r_k^{J0}=\begin{bmatrix}\sin\beta\\ -\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}. \tag{12.7}$$

Координаты этого единичного вектора в направлении оси ротора в системе, связанной с корпусом, зависят только от углов α и β. Матрица a_{ij}^{F} содержит углы ψ, ϑ, φ, определяющие положение самолета, а матрица a_{ij}^{E} — углы начальной ориентации ψ_0, ϑ_0, φ_0. Это позволяет на основании (12.6) вычислить функции

$$\begin{aligned}\alpha&=\alpha(\psi,\ \vartheta,\ \varphi,\ \psi_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0),\\ \beta&=\beta(\psi,\ \vartheta,\ \varphi,\ \psi_0,\ \vartheta_0,\ \varphi_0)\end{aligned} \tag{12.8}$$

для любого вида установки гироскопа в самолете. В частных случаях можно также учесть возможный в основном рабочем положении угол наклона β_0 внутренней рамки относительно внешней. Тогда β_0 войдет в (12.8) в качестве дополнительного параметра.

Вычисление функций (12.8) может оказаться весьма трудоемким, однако при использовании электронных вычислительных машин оно не вызывает принципиальных затруднений.

В виде примера проведем расчет курсового гироскопа, установленного согласно конфигурации «321», как показано на рис. 12.4. Положительные направления осей, которые сами по себе могут быть заданы произвольно, в нашем случае выбраны так, как ука-

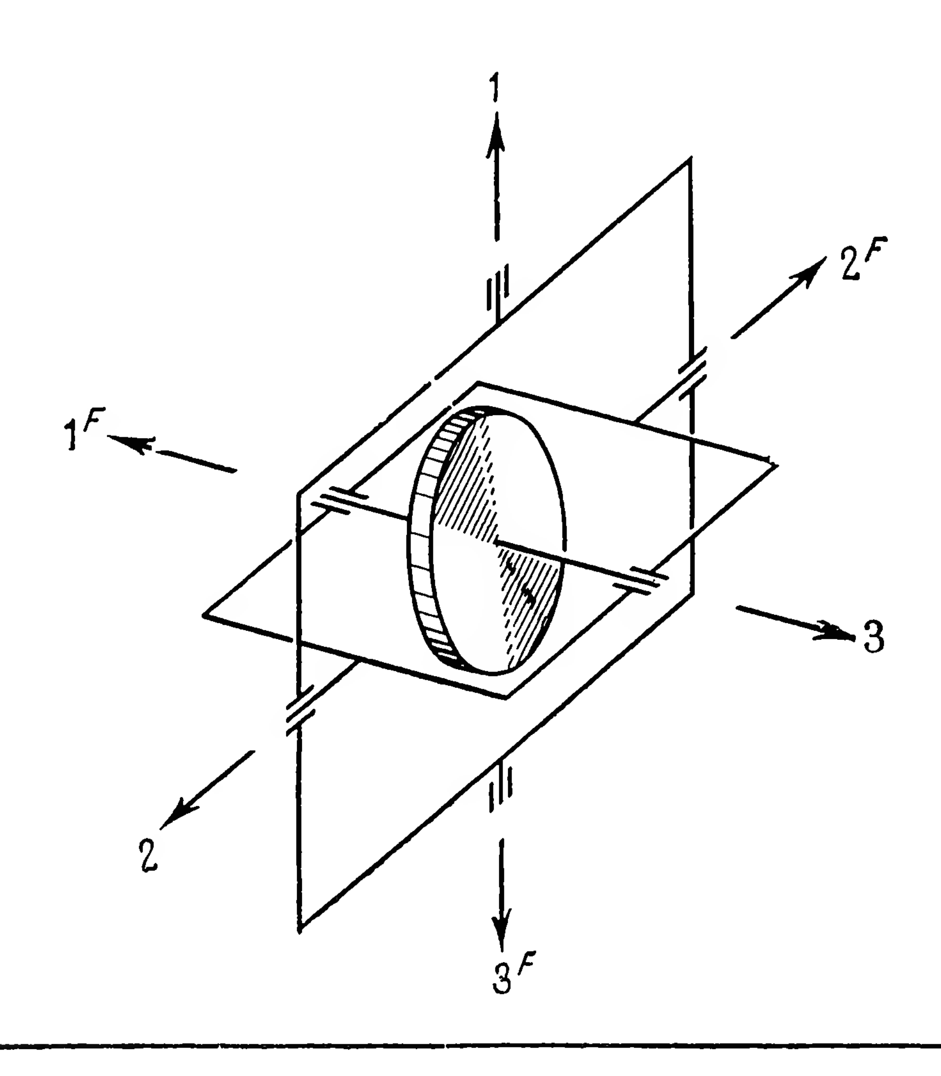


Рис. 12.4. Расположение курсового гироскопа в схеме «321».

зано на рисунке, с тем чтобы получить в результате положительные величины. Установочная матрица в данном случае имеет вид

$$a_{ij}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание (12.7), для правой части (12.6) получим

$$a_{ij}^E r_j^{G0} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \\ -\sin\beta \end{bmatrix}. \qquad (12.9)$$

С другой стороны, $a_{ij}^E r_j^{J0} = [-1,\ 0,\ 0]$, и поэтому в силу (12.3)

$$a_{ij}^F a_{jk}^E r_k^{J0} = \begin{bmatrix} -\cos\psi\cos\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (12.10)$$

Как следует из (12.6), матрицы (12.9) и (12.10) должны быть равны. Из вытекающих отсюда трех равенств могут быть найдены α и β:

«321»
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi}{\cos\psi\cos\vartheta},$$
$$\sin\beta = \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi. \quad (12.11)$$

Из этих формул видно, что при $\vartheta = \varphi = 0$ будет $\alpha = \psi$, а при $\psi = \varphi = 0$ будет $\beta = \vartheta$. Тогда относительный поворот внешней рамки дает в точности угол рыскания, а поворот внутренней рамки — угол тангажа. При более общем характере движения самолета это уже не имеет места. Напротив, здесь возникают *кинематические карданные погрешности*

$$\Delta\psi = \alpha - \psi \quad \text{и} \quad \Delta\vartheta = \beta - \vartheta. \quad (12.12)$$

Так, например, для горизонтального виража ($\vartheta \equiv 0$) из (12.11) находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\psi\cos\varphi, \quad (12.13)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\Delta\psi = \operatorname{tg}(\alpha - \psi) = -\frac{\operatorname{tg}\psi(1 - \cos\varphi)}{1 + \cos\varphi\operatorname{tg}^2\psi}. \quad (12.14)$$

Результаты расчета по этой формуле представлены в виде кривых на рис. 12.5 и 12.6. С увеличением крена самолета (угла φ) погрешность показаний растет; она имеет период π по углу рыскания ψ и при $\psi = \pm(n/2)\pi$ обращается в нуль. Для малых углов крена ($\varphi \ll 1$) получается

$$\Delta\psi \approx -{}^1/_4\varphi^2\sin 2\psi. \quad (12.15)$$

Расчет кардановых углов для других конфигураций, представленных на рис. 12.2, приводит к следующим результатам:

«123»
$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \vartheta; \quad (12.16)$$

«213»
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\cos\varphi}, \quad \sin\beta = \sin\varphi\cos\vartheta; \quad (12.17)$$

«132»
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\psi + \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi},$$
$$\sin\beta = \sin\psi\cos\vartheta; \quad (12.18)$$

«312»
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi}{\cos\psi\cos\vartheta},$$
$$\sin\beta = \sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi; \quad (12.19)$$

«231»
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi},$$
$$\sin\beta = \sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi, \quad (12.20)$$

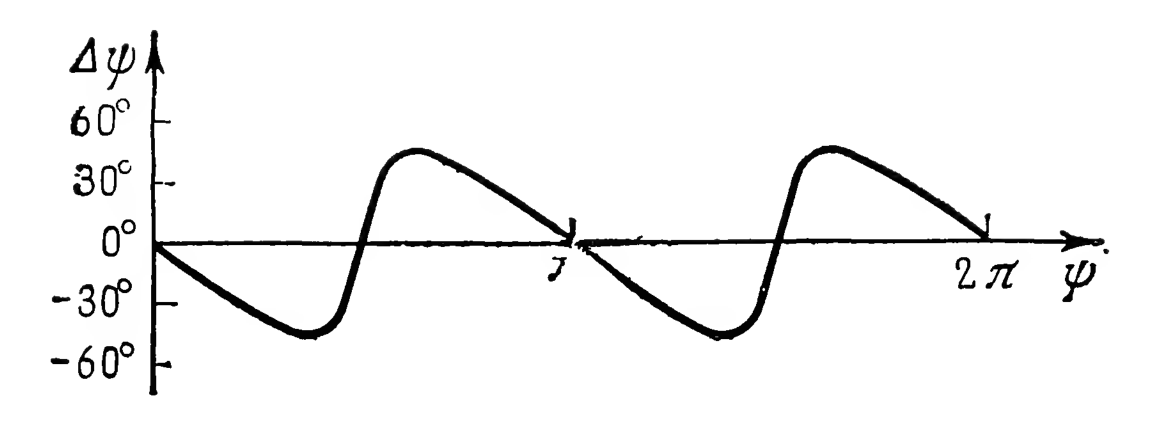


Рис. 12.5. Кинематическая погрешность в зависимости от угла ψ при $\varphi_0=80°$.

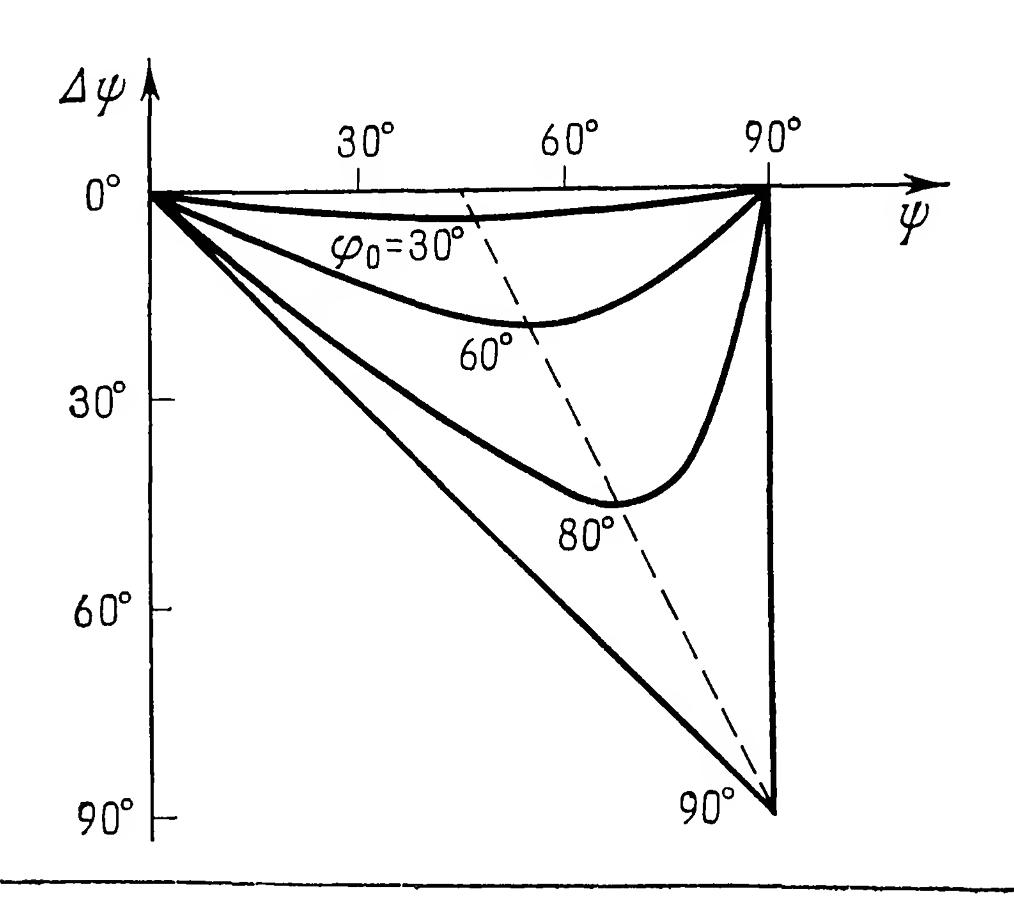


Рис. 12.6. Влияние крена φ_0 самолета на кинематическую погрешность в интервале $0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2$.

Примечательно, что конфигурация «123» позволяет измерять угол крена φ и угол тангажа ϑ без карданных ошибок при произвольном движении самолета. Это, естественно, связано с принятым определением углов ориентации самолета. При более общем характере движения самолета все другие способы расположения приводят к кинематическим погрешностям в измерении. Систематическим исследованием этих погрешностей мы обязаны Зеебаху [79]. Марре [80] указал на различные возможности такого расположения гироскопов и платформ, при котором карданные погрешности не возникают.

12.2. Курсовой гироскоп

Курсовой гироскоп — это позиционный гироскоп, который установлен на наземном движущемся объекте или на самолете так, что он позволяет измерять азимутальный угол, т. е. угол поворота объекта вокруг вертикальной оси.

12.2.1. Общие свойства, коррекция направления и межрамочная коррекция. В наземных условиях курс движущегося объекта определяет ориентацию объекта только по отношению к Земле. Как следствие этого идеально уравновешенный позиционный гироскоп, кинетическая ось которого неподвижна в инерциальном пространстве, способен правильно указывать курс не всегда, а только при определенных условиях. Искажения в указании курса, т. е. *уходы*, могут быть вызваны следующими причинами:

1) вращением Земли,
2) собственным движением объекта и
3) остаточными вредными моментами.

Вектор ω_i^E угловой скорости Земли совпадает с осью Земли и направлен с юга на север. В пункте наблюдения с географической широтой φ его можно разложить на вертикальную ($\omega^E \sin\varphi$)

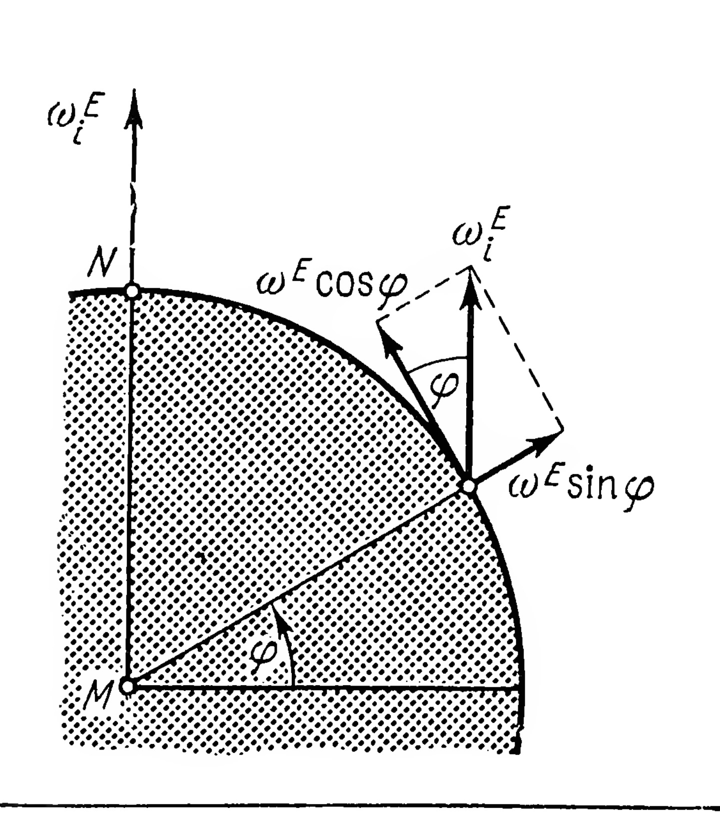


Рис. 12.7. Горизонтальная и вертикальная составляющие угловой скорости Земли.

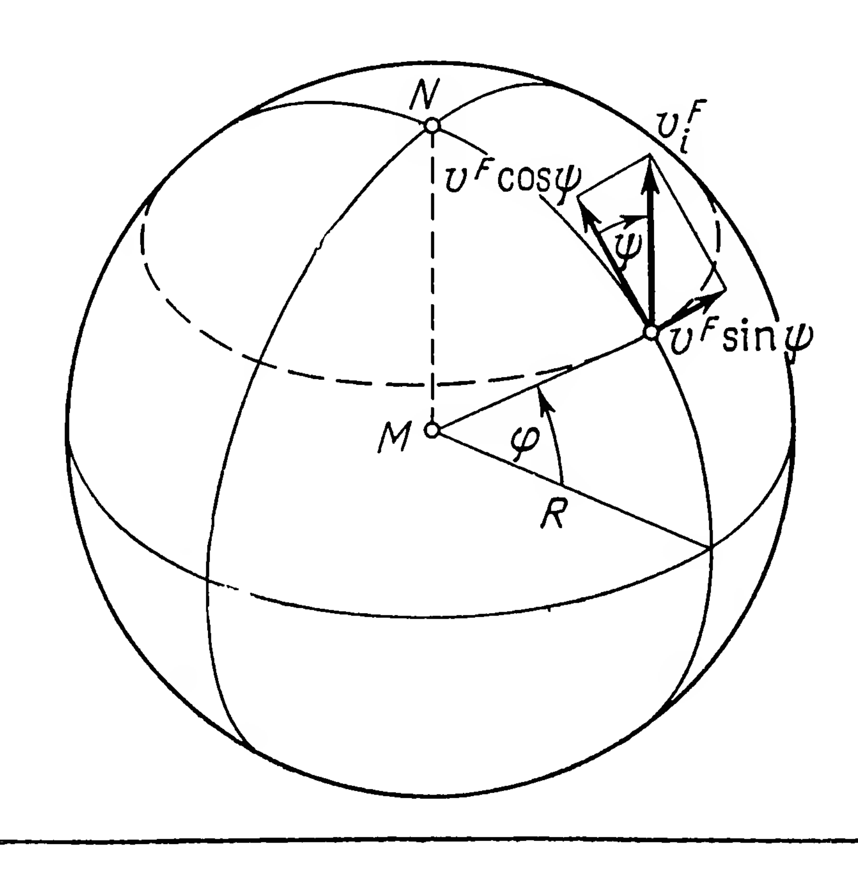


Рис. 12.8. Разложение скорости v_i^F объекта на восточную и северную составляющие.

и горизонтальную ($\omega^E \cos\varphi$) составляющие, последняя из которых лежит в плоскости местного горизонта и направлена на север (рис. 12.7). Обе составляющие оказывают влияние на курсовой гироскоп: вертикальная составляющая измеряется непосредственно как поворот внешней рамки (*курсового кольца*) относительно корпуса и соответственно входит в показания курса как изменение последнего; горизонтальная составляющая, хотя и не оказывает непосредственного влияния на показания, но, вызывая поворот внутренней рамки относительно внешней, может, например, по причине карданных погрешностей оказать на них побочное влияние.

Если объект движется относительно Земли, то ввиду особенностей определения направления на Земле показания курса приходится корректировать, во всяком случае при движении в высоких широтах (Шмид [81]). В простейших случаях погрешность можно компенсировать автоматически путем формирования соответствующих моментов. Если v_i^F — вектор скорости объекта относительно Земли, а ψ — курс (относительно направления на север), то v_i^F можно разложить на

северную составляющую: $v^N = v^F \cos\psi$ и

восточную составляющую: $v^O = v^F \sin\psi$

(рис. 12.8). На показания курса оказывает влияние только восточная составляющая. Вызванное ею искажение курса можно себе представить как результат влияния некоторого дополнительного вращения Земли вокруг своей оси с угловой скоростью ω^F, которое приводит к точно такому же изменению положения движущегося объекта в пространстве, как и при его действительном движении относительно Земли. Таким образом,

$$v^O = v^F \sin\psi = \omega^F R \cos\varphi,$$

или

$$\omega^F = \frac{v^F \sin\psi}{R\cos\varphi}. \tag{12.21}$$

Вертикальная составляющая этого вращения, как и вертикальная составляющая собственно вращения Земли, входит в показания курсового гироскопа, так что возникает уход внешней рамки относительно корпуса с угловой скоростью

$$\dot{\alpha}^R = -\omega^E \sin\varphi - \frac{v^F}{R}\sin\psi \operatorname{tg}\varphi. \tag{12.22}$$

Первое слагаемое правой части носит название *девиация от вращения Земли*, а второе — *скоростная девиация* (или *скоростная погрешность*). Обе эти девиации в принципе могут быть скомпенсированы, потому что они известным образом зависят от курса, скорости и географической широты. Для такой компенсации требуется приложить момент относительно оси внутренней рамки

$$M_2 = -H\dot{\alpha} = -H\left(\omega^E \sin\varphi + \frac{v^F}{R}\sin\psi \operatorname{tg}\varphi\right).$$

Момент этот имеет как раз такую величину, при которой вызываемая им вынужденная прецессия $\dot{\alpha}$ компенсирует уход $\dot{\alpha}^R$ вследствие вращения Земли и скорости объекта.

Погрешности в показаниях курсового гироскопа, вызванные нерегулярными вредными моментами относительно оси внутренней рамки, не поддаются компенсации. Тем не менее благодаря искусной конструкции такого рода возмущения удается свести к столь малой величине, что обусловленный ими уход оси гироскопа не

превышает 0,1° за час. Такие приборы в течение короткого времени вполне могут быть использованы как свободные гироскопы.

У курсовых гироскопов, применяемых, как правило, в условиях длительной эксплуатации, прибегают к коррекции двоякого рода. Во-первых, путем сравнения показаний гироскопа с показаниями индикатора направления (магнитный компас, радиокомпас) измеряется рассогласование — отклонение от заданного направления. При наличии последнего на гироскоп накладывается момент [1])

$$M_2^F = M_2^F(\psi - \psi_{soll}), \tag{12.23}$$

который заставляет его прецессировать до тех пор, пока рассогласование не будет сведено к минимуму. Этот процесс называют *коррекцией*, а соответствующий момент M_2^F — *моментом коррекции*. На практике приходится подбирать некоторые оптимальные значения скоростей коррекции $\dot{\alpha}^F$ и $\dot{\psi}^F$ (или моментов коррекции), так как при слишком малой их величине текущие погрешности будут исключаться слишком медленно, а при слишком большой $\dot{\alpha}^F$ гироскоп будет воспринимать погрешности индикатора направления, обычно весьма подверженного воздействию всякого рода возмущений. У реальных приборов скорость коррекции составляет от 0,1 до 4° в минуту. Во-вторых, корректируется также поворот внутренней рамки, чтобы она вследствие своего неправильного положения по возможности не влияла на показания прибора из-за наличия кинематических погрешностей (§ 12.1) и вообще не дошла до ограничителя. Возмущения курсового гироскопа будут наименьшими, если внутренняя рамка в среднем перпендикулярна к внешней ($\beta = 0$). Этого можно достичь с помощью *межрамочной коррекции*, при которой *момент межрамочной коррекции*

$$M_1^S = M_1^S(\beta) \quad \left(M_1^S(0) = 0\right) \tag{12.24}$$

заставляет гироскоп вместе с внутренней рамкой прецессировать к среднему положению. В отличие от коррекции вокруг измерительной оси межрамочная коррекция курсового гироскопа непосредственно не влияет на процесс измерения. Ввиду того что в большинстве случаев плоскость внутренней рамки курсового гироскопа должна оставаться горизонтальной, межрамочную коррекцию можно осуществлять также с помощью маятника как индикатора направления. Но так как теперь при ускоренном движении внутренняя рамка устанавливается перпендикулярно кажущейся вертикали, в данном случае говорят о *коррекции по кажущейся вертикали.*

Скорость коррекции курсового гироскопа и в этом случае должна быть тщательно подобрана. Слишком слабая коррекция может оказаться практически неэффективной, а слишком сильная,

[1]) В формуле (12.23) ψ_{soll} — курс, выдаваемый гирокомпасом; soll — сокращение от Sollwert (задаваемое значение). — *Прим. ред.*

наоборот, может создать новые источники погрешностей. В качестве примера изучим одну из них — погрешность конического движения, в частности виражную погрешность.

12.2.2. Виражная погрешность курсового гироскопа с коррекцией. Предположим, что самолет совершает горизонтальный вираж ($\vartheta = 0$) с постоянной угловой скоростью ($\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$) и с постоянным креном ($\varphi = \varphi_0$) (рис. 12.9). Курсовой гироскоп самолета

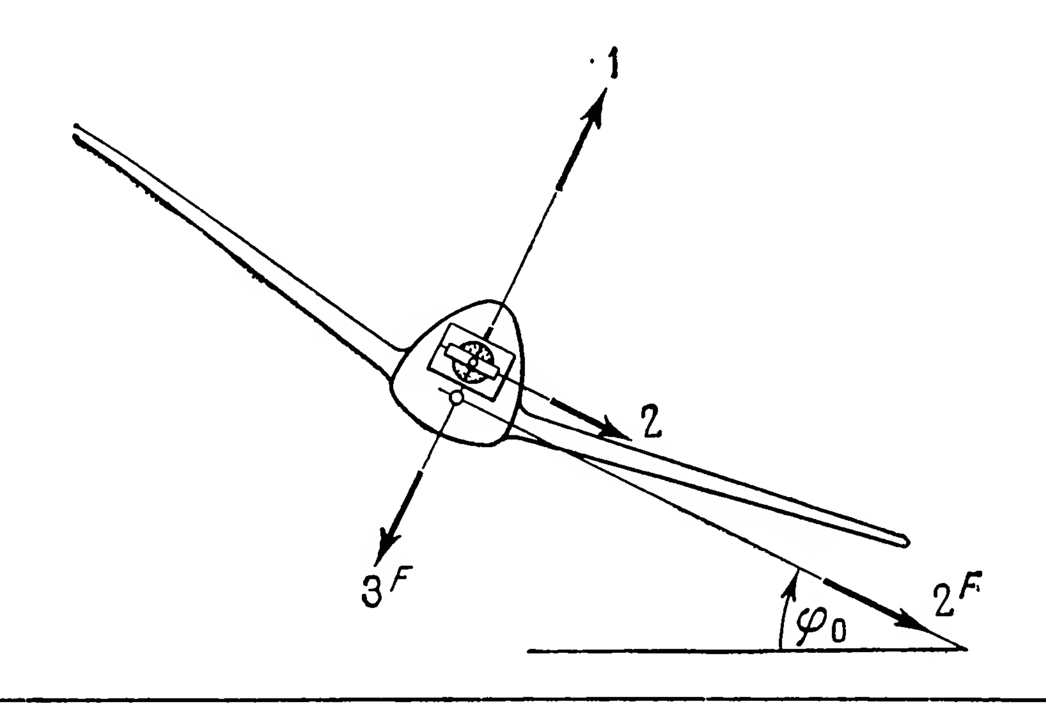


Рис. 12.9. Самолет и курсовой гироскоп в начале виража (правый вираж, глядя в направлении полета).

установлен так, что его измерительная ось (ось 1) совпадает с нормальной осью самолета 3^F. Пусть в момент времени $t = 0$ ось ротора горизонтальна и ориентирована в направлении полета.

Показания курсового гироскопа во время виража будут искажаться как кинематическими погрешностями, подробно разобранными выше, так и, кроме того, *виражной погрешностью*. Рассмотрим здесь только вторую из них. Виражная погрешность возникает у курсовых гироскопов с коррекцией вследствие того, что момент коррекции, возникающий при наклонной оси внешней рамки, имеет горизонтальную составляющую, которая может привести к уходу кинетической оси в азимуте.

Предположим теперь, что как угол крена φ_0, так и угол отклонения β внутренней рамки настолько малы, что мы вправе произвести линеаризацию, полагая $\varphi_0 \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Более подробно с теорией погрешности конического движения можно познакомиться по работе Прайса [82], однако все существенные особенности этой погрешности выявляются и при приближенном исследовании, которым мы займемся ниже. При этих расчетах мы расчленим угол β на две части: чисто кинематическую β^K и обусловленную прецессионным движением вследствие коррекции β^P. Угол β^K воспроизводит поворот внутренней рамки относительно внешней

при неподвижной оси ротора. Построив сферический треугольник ABC на единичной сфере (рис. 12.10) с центром в точке подвеса

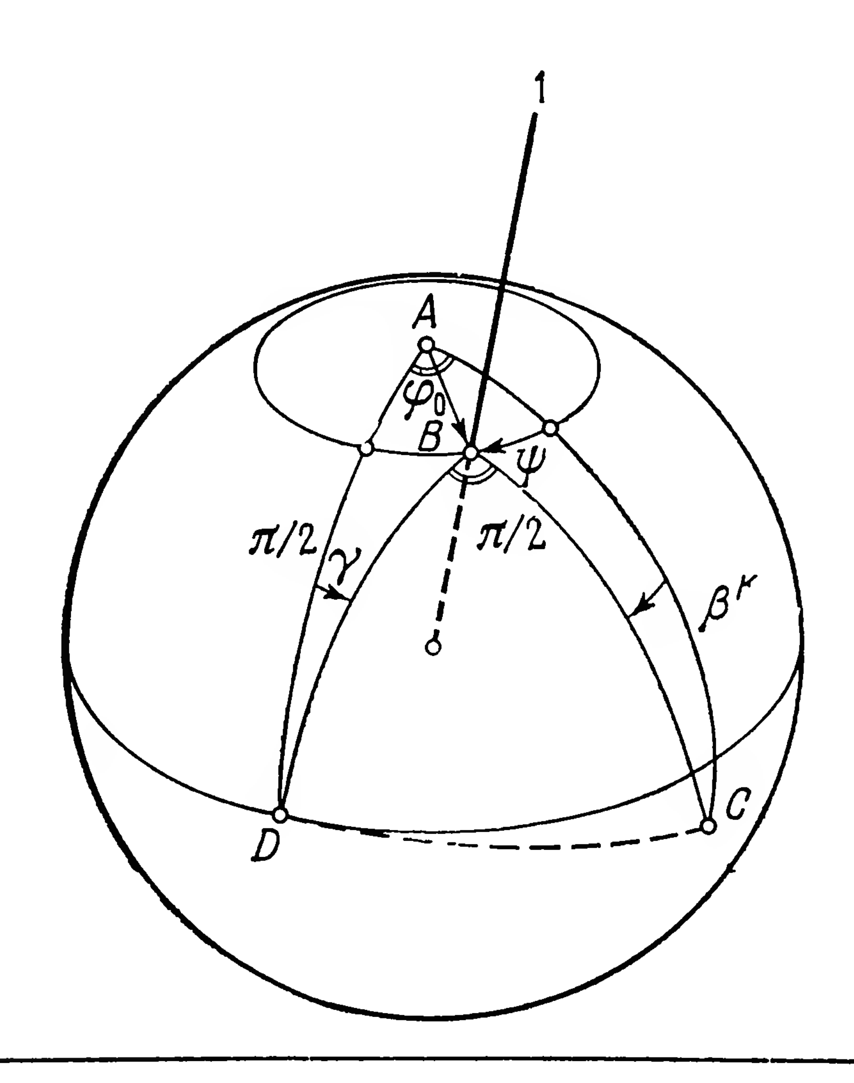


Рис. 12.10. К расчету погрешности конического движения.

гироскопа, находим, согласно теореме синусов,

$$\sin(-\beta^K) : \sin\varphi_0 = \sin\psi : \sin(\pi/2),$$

откуда в силу малости углов φ_0 и β^K следует

$$\beta^K \approx -\varphi_0 \sin\psi. \tag{12.25}$$

Если момент межрамочной коррекции пропорционален $\beta = \beta^K + \beta^P$, то из приближенного уравнения быстровращающегося гироскопа

$$H\dot{\beta}^P = M_1 = -k(\beta^K + \beta^P) \tag{12.26}$$

мы можем определить β^P. Введем новую постоянную

$$c = \frac{k}{H\dot{\psi}_0}. \tag{12.27}$$

Подставив (12.25) в (12.26), учитывая (12.27) и имея в виду, что $d\psi = \dot{\psi}_0 dt$, получим

$$\frac{d\beta^P}{d\psi} + c\beta^P = c\varphi_0 \sin\psi. \tag{12.28}$$

Решение этого дифференциального уравнения для $\beta^P(0) = 0$ имеет вид

$$\beta^P = \frac{c\varphi_0}{c^2 + 1}\left[e^{-c\psi} + c\sin\psi - \cos\psi\right]. \tag{12.29}$$

Под влиянием коррекции прецессионное движение протекает так, что точка пересечения D оси ротора с единичной сферой (рис. 12.10) перемещается в направлении BD (на рисунке — вниз за точку D). При этом скорости прецессии $\dot{\beta}^P$ соответствует скорость ухода оси ротора в азимуте

$$\dot{\delta} \approx \dot{\beta}^P \gamma \approx \dot{\beta}^P \varphi_0 \cos\psi. \tag{12.30}$$

Подставив сюда (12.29), после некоторых преобразований получим

$$\frac{d\delta}{d\psi} = \frac{d\beta^P}{d\psi}\varphi_0 \cos\psi = \frac{c\varphi_0^2}{c^2+1}[c\cos^2\psi + \sin\psi\cos\psi - ce^{-c\psi}\cos\psi], \tag{12.31}$$

откуда после интегрирования находится *виражная погрешность*

$$\delta = \frac{c\varphi_0^2}{2(c^2+1)}\left[c\psi + c\sin\psi\cos\psi + \sin^2\psi - \frac{2ce^{-c\psi}}{c^2+1}\{\sin\psi + c(1-\cos\psi)\}\right]. \tag{12.32}$$

Это выражение содержит член, возрастающий по линейному закону, а также периодические, постоянные и затухающие члены. Первое слагаемое в квадратных скобках свидетельствует об эффекте «захвата»: посредством механизма коррекции ось ротора неизменно увлекается в направлении вращения на вираже. Если эту довольно опасную при длительном вираже составляющую требуется ограничить малой величиной, то путь к этому только один — возможно более слабая коррекция, т. е. малое c. В предельном случае, когда $c \to 0$, поскольку членом $c\psi$ можно пренебречь, получаем приближенное выражение

$$c \to 0: \ \delta \approx c\,{}^1\!/_4\,\varphi_0^2(1 - \cos 2\psi). \tag{12.33}$$

В другом предельном случае очень сильной коррекции имеем

$$c \to \infty: \ \delta \approx {}^1\!/_2\,\varphi_0^2(\psi + \sin\psi\cos\psi). \tag{12.34}$$

В обоих случаях погрешность пропорциональна квадрату угла крена φ_0. При отсутствии коррекции ($c = 0$) виражная погрешность исчезает ($\delta = 0$). Поэтому у некоторых курсовых гироскопов отключают коррекцию на время виража, чтобы по возможности устранить возмущения.

12.3. Гироскопическая вертикаль

Гироскопическая вертикаль — иначе называемая *гироскопическим горизонтом* или *вертикантом* — монтируется на объекте, например в самолете, таким образом, чтобы в основном положении ось ротора была вертикальна. В таком случае при поворотах самолета относительно оси ротора могут быть определены его крен и тангаж. При конфигурации «123» (рис. 12 2) карданов угол α воспроизводит угол крена φ, а угол β — угол тангажа ϑ.

Ось ротора гироскопической вертикали — так же, как и курсового гироскопа, — не может длительно сохранять заданное положение. Уход из него возникает не только вследствие неизбежных вредных моментов, но и вследствие изменения положения вертикали места в инерциальном пространстве (за счет вращения Земли и движения объекта относительно нее). Кроме *девиации от вращения Земли* и *скоростной девиации* (как у курсового гироскопа) здесь появляются *погрешности, обусловленные ускорением объекта* (*баллистические девиации*). Для того чтобы обеспечить малость этих отклонений, идут двумя путями: во-первых, гироскоп — хранитель направления связывают с индикатором направления, от которого он корректируется; во-вторых, путем специальной настройки параметров прибора стараются свести к минимуму влияние собственного движения объекта.

12.3.1. Режим установления корректируемой гироскопической вертикали. В качестве индикатора направления гироскопической вертикали могут применяться указатели вертикали, т. е. маятники любой конструкции. Путем смещения центра тяжести самого гироскопа последний можно превратить в гироскопический маятник. Различные конструкции подобного рода описаны, например, Фишелем [83]. Благодаря связи индикатора направления с хранителем направления получается прибор, значительно менее подверженный влиянию возмущений, чем каждая из его составных частей в отдельности. Колебания маятника практически не передаются обладающему большой инерционностью гироскопу; с другой стороны, маятник корректирует неизбежный при его отсутствии уход оси ротора от заданного направления.

Отличительной чертой гироскопической вертикали является ее свойство самостоятельно приходить в положение равновесия. Это нетрудно установить по приближенным уравнениям прецессионной теории, верным для большого значения кинетического момента:

$$H\dot{\beta} = M_1, \quad -H\dot{\alpha} = M_2. \tag{12.35}$$

В уравнения надо подставить возмущающий момент и момент коррекции, которые в зависимости от конструкции гировертикали могут иметь различные характеристики. Чаще всего встречаются характеристики, приведенные в следующей таблице:

	M_1	M_2
1. Момент силы тяжести	$-c_1\alpha$	$-c_2\beta$
2. Момент сопротивления вязкого трения	$-d_1\dot{\alpha}$	$-d_2\dot{\beta}$
3. Момент сопротивления кулонова трения	$-r_1\operatorname{sgn}\dot{\alpha}$	$-r_2\operatorname{sgn}\dot{\beta}$
4. Линейный момент коррекции	$-f_1\beta$	$f_2\alpha$
5. Момент коррекции релейного типа (двухпозиционный или типа Bang-Bang)	$-g_1\operatorname{sgn}\beta$	$g_2\operatorname{sgn}\alpha$

Существует множество видов траекторий установления, определяемых теми или иными комбинациями названных моментов. Влияние моментов, указанных в первых трех строках таблицы, уже было нами исследовано в § 11.2. Новыми по отношению к ним являются прежде всего моменты, фигурирующие в четвертой и пятой строках. Их знаки выбраны так, чтобы ось ротора, будучи выведена из заданного положения, вновь возвращалась к нему. Согласно терминологии гл. 5, здесь речь идет о неконсервативных позиционных силах, что можно видеть по структуре входящих в уравнения матриц позиционных сил. Например, в случае линейных моментов коррекции согласно четвертой строке мы получаем уравнения движения

$$H\dot{\beta} + f_1\beta = 0, \qquad -H\dot{\alpha} - f_2\alpha = 0$$

с решениями

$$\alpha = \alpha_0 e^{-(f_1/H)\,t}, \qquad \beta = \beta_0 e^{-(f_2/H)\,t}.$$

Они описывают в плоскости α-β (рис. 12.11) траектории установления, которые, начинаясь в некоторой начальной точке (α_0, β_0),

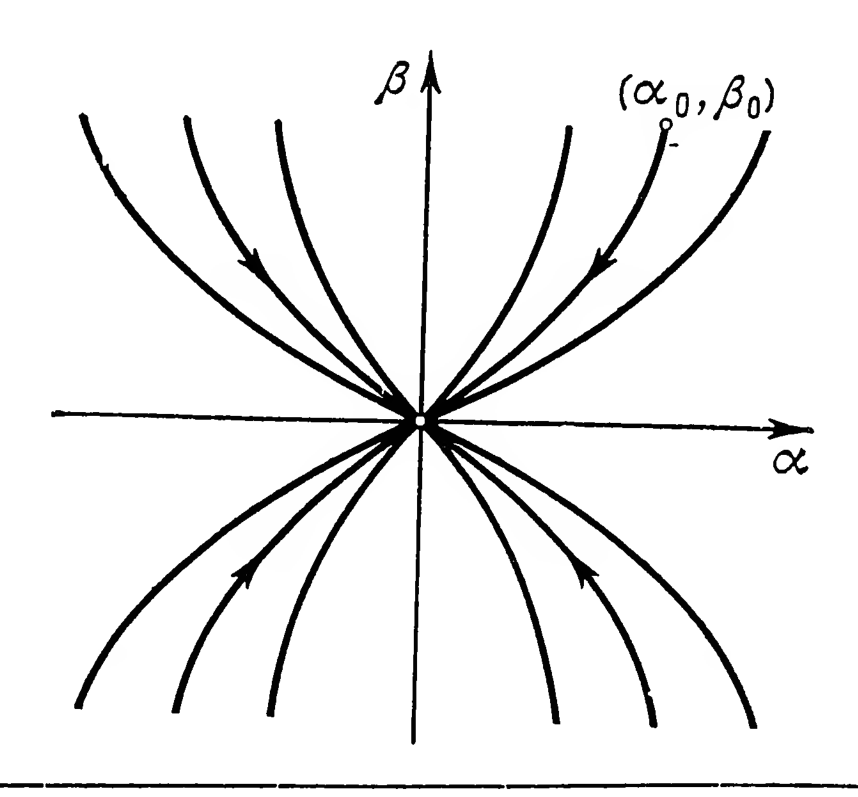


Рис. 12.11. Траектории установления гировертикали с линейными моментами коррекции.

асимптотически сходятся к началу координат. При $f_1 = f_2$ эти траектории превращаются в прямые, проходящие через начало координат.

Если к моментам коррекции согласно четвертой строке добавляются еще моменты кулонова трения (третья строка), то траектории сходятся не к началу координат плоскости α-β, а к предельным точкам *1*—*4* (рис. 12.12), образующим вершины зоны нечувствительности. Траектории на рисунке соответствуют $f_1 = f_2$.

При наличии моментов коррекции, приведенных в пятой строке, получаются траектории установления типа показанных на

рис. 12.13. Изображающая точка движется здесь вдоль наклонной прямой до одной из осей координат и затем, совершая вибрационное скольжение (см. п. 11.2.2), устремляется к началу координат.

Траектории установления, о которых говорилось выше, это кривые в инерциальной системе координат. При учете вращения Земли и собственной скорости объекта получаются модификации

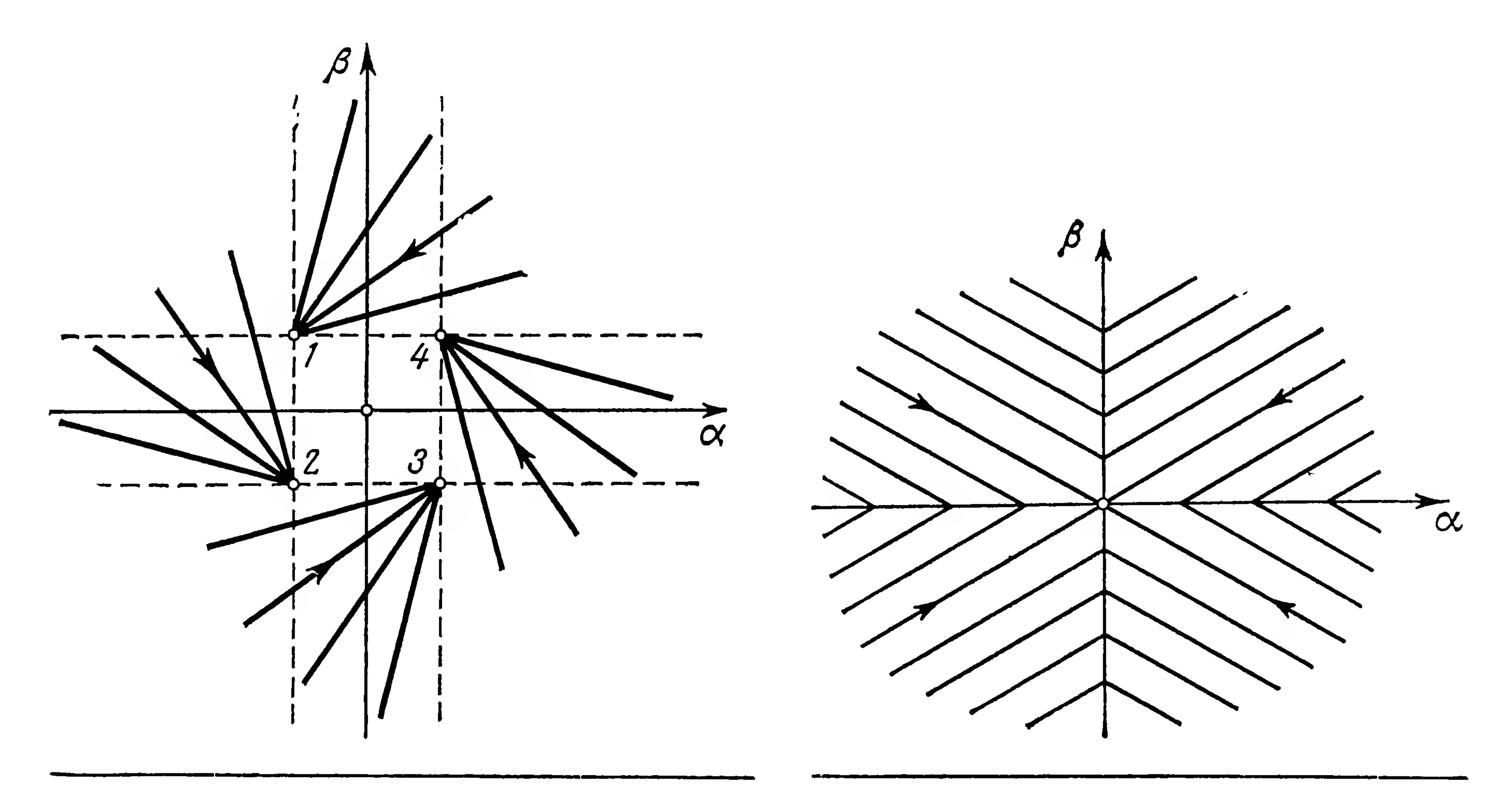


Рис. 12.12. Траектории установления гировертикали при наличии кулонова трения.

Рис. 12.13. Траектории установления гировертикали с коррекцией релейного типа.

этих траекторий, которые зачастую позволяют сделать непосредственное заключение о свойствах гироскопической вертикали в данных условиях (см., например, [84]). Ниже мы рассмотрим два примера таких кривых.

12.3.2. Элементарная теория гироскопической вертикали на подвижном основании. Пусть мы имеем гироскопическую вертикаль конфигурации «123», у которой 1, 2, 3 ⇅ 1^F, 2^F, 3^F, центр тяжести расположен ниже точки подвеса, а моменты коррекции линейны. Пусть прибор устроен так, что $c_1 = c_2 = c = mgs$ и $f_1 = f_2 = f$. Рассмотрим два режима полета: прямолинейный полет с ускорением (или замедлением) и вираж.

При *ускоренном прямолинейном полете* с ускорением b индикаторы направления всегда устанавливаются по кажущейся вертикали, и мы имеем

$$\alpha_L = 0, \quad \operatorname{tg} \beta_L = -b/g. \tag{12.36}$$

Предположим, что отклонение кажущейся вертикали от истинной достаточно мало, так что можно положить $\operatorname{tg} \beta_L \approx \beta_L$. При наличии моментов, формируемых согласно первой и четвертой стро-

кам предыдущей таблицы, уравнения движения (12.35) принимают вид

$$H\dot{\beta} + c\alpha + f(\beta - \beta_L) = 0,$$
$$-H\dot{\alpha} + c(\beta - \beta_L) - f\alpha = 0. \tag{12.37}$$

Вводя обозначения

$$\frac{f}{H} = \delta, \quad \frac{c}{H} = \omega^P \tag{12.38}$$

и полагая $z = \alpha + i\beta$, мы можем представить систему уравнений (12.37) в виде одного уравнения в комплексной форме

$$\dot{z} + (\delta + i\omega^P) z = i(\delta + i\omega^P)\beta_L. \tag{12.39}$$

Общее решение этого уравнения при произвольной функции ускорения $\beta_L(t) \approx -b(t)/g$ имеет вид

$$z = e^{-(\delta + i\omega^P)t}\left[Z_0 + i(\delta + i\omega^P)\int\limits_0^t \beta_L(t)\, e^{(\delta + i\omega^P)t}\, dt\right]. \tag{12.40}$$

Первый член в этом выражении отражает приход к положению равновесия из некоторого начального положения $z(0) = Z_0$; второй соответствует уходу оси гироскопа, вызванному колебаниями кажущейся вертикали. Если, например, принять $Z_0 = 0$ и считать, что движение происходит с постоянным замедлением $-b_0 = g\beta_{L0}$,

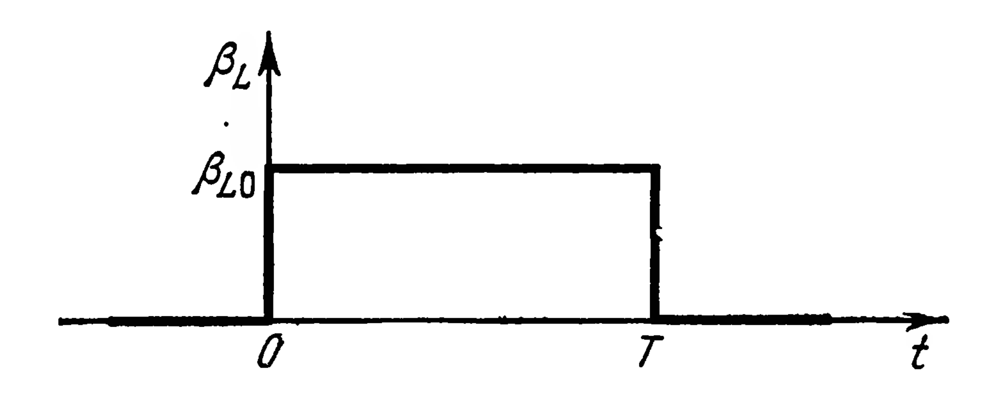


Рис. 12.14. Предполагаемое отклонение кажущейся вертикали при временном замедлении в направлении полета.

длящимся T секунд $(0 < t < T)$ (рис. 12.14), то для $\beta_L(t)$ можно написать

$$\beta_L = \beta_{L0}[1(t) - 1(t - T)], \tag{12.41}$$

где $1(t)$ — единичная ступенчатая функция. Решение (12.40) для $0 < t < T$ имеет вид

$$z = i\beta_{L0}\left[1 - e^{-(\delta + i\omega^P)t}\right]. \tag{12.42}$$

Некоторые интегральные кривые, построенные по этой формуле, представлены на рис. 12.15. При $\delta = 0$ гировертикаль описывает прецессионную дугу вокруг $\beta = \beta_L$; в другом предельном случае ($\omega^P = 0$) изображающая точка, начиная от начала координат плоскости α-β, движется прямолинейно, асимптотически приближаясь

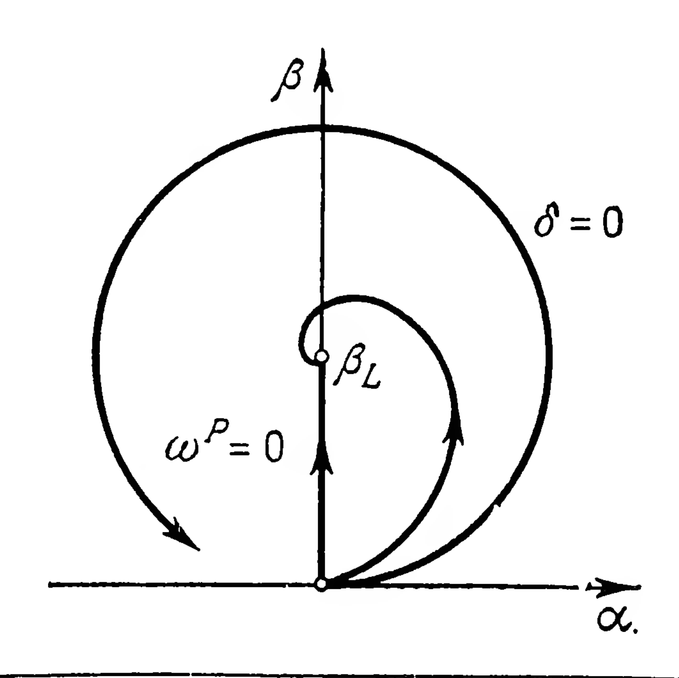


Рис. 12.15. Кривые отклонения гировертикали при равнозамедленном движении объекта.

к $\beta = \beta_L$. Для всех промежуточных случаев получаются спиралевидные траектории. По окончании замедления (с момента $t = T$) гировертикаль начинает приходить к основному положению при новом начальном условии $Z_0 = z(T)$ и $\beta_L(t) = 0$.

В качестве второго примера полета с ускорением рассмотрим *горизонтальный вираж*. Теперь кажущаяся вертикаль определяется соотношением

$$\alpha_L \approx \operatorname{tg} \alpha_L = \frac{v\omega}{g}, \quad \beta_L = 0, \tag{12.43}$$

где v — скорость полета и ω — угловая скорость самолета на вираже. При правом вираже $\omega > 0$, при левом $\omega < 0$. То же относится и к углу кажущейся вертикали α_L. Обращаясь к приближенным уравнениям (10.22), справедливым в системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω, и отбрасывая в них инерционные члены, получаем для нашего случая следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + H\omega\alpha + c(\alpha - \alpha_L) + f\beta &= 0, \\ -H\dot{\alpha} + H\omega\beta + c\beta - f(\alpha - \alpha_L) &= 0. \end{aligned} \tag{12.44}$$

Полагая $z = \alpha + i\beta$ и используя обозначения (12.38), приходим к уравнению в комплексной форме

$$\dot{z} + [\delta + i(\omega + \omega^P)]\, z = (\delta + i\omega^P)\,\alpha_L. \tag{12.45}$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$z = \exp[-\delta t - i(\omega^P t + \psi)] \times$$
$$\times \left\{ Z_0 + (\delta + i\omega^P) \int_0^t \alpha_L(t) \exp[\delta t + i(\omega^P t + \psi)]\, dt \right\}, \qquad (12.46)$$

где $\psi = \int \omega dt$ — угол курса, накопленный с момента начала виража. В случае *установившегося виража* с постоянными значениями ω и α_L равенство (12.46) принимает вид

$$z = z_G \{1 - \exp[-\delta t - i(\omega + \omega^P) t]\},$$

причем положение равновесия таково:

$$z_G = \frac{\delta^2 + \omega^P(\omega + \omega^P) - i\,\delta\omega}{\delta^2 + (\omega + \omega^P)^2}\, \alpha_L. \qquad (12.47)$$

Отсюда могут быть определены траектории установления и положение равновесия для случаев, которые могут представить интерес. Примечателен тот факт, что смещение положения равновесия происходит и в направлении β, хотя $\beta_L = 0$. Знаменатель выражения (12.47) показывает, что при $\omega = -\omega^P$ наступает резонанс. Он проявляется тем сильнее, чем меньше δ, т. е. чем слабее моменты коррекции. Таким образом, наибольших погрешностей на вираже у гировертикали по типу гироскопического маятника можно ожидать в том случае, когда вираж происходит против направления вращения ротора с угловой скоростью, близкой к угловой скорости прецессии ω^P.

В предельном случае, когда моменты коррекции отсутствуют ($\delta = 0$), (12.47) переходит в

$$z = \frac{\omega^P \alpha_L}{\omega + \omega^P} \{1 - \exp[-i(\omega + \omega^P) t]\}. \qquad (12.48)$$

Это означает, что около положения равновесия $\alpha = \alpha_G$ совершается незатухающее прецессионное движение. При вираже в на правлении вращения ротора ($\omega > 0$) будет $\alpha_G < \alpha_L$, а при вираже в противоположном направлении ($\omega < 0$) будет $\alpha_G > \alpha_L$.

В предельном случае астатического гироскопа ($\omega^P = 0$) из (12.47) получаем

$$z = \frac{(\delta^2 - i\,\delta\omega)\,\alpha_L}{\delta^2 + \omega^2} \{1 - \exp[-(\delta + i\omega) t]\}. \qquad (12.49)$$

Отсюда видно, что при медленном вираже ($\omega \ll \delta$) происходит почти апериодическое установление в кажущуюся вертикаль $z_G \approx \alpha_L$, а при быстром вираже или слабой коррекции ($\delta \ll \omega$) — движение по спиралевидной траектории к положению равновесия $z_G \approx -i\delta\alpha_L/\omega = -iv\delta/g$. Для промежуточных случаев получаются траектории установления вида, показанного на рис. 12.16.

Отличное от рассмотренного выше поведение прибора на вираже наблюдается при наличии моментов коррекции, постоянных по величине и меняющих знак в зависимости от показаний индикатора направления (*коррекция релейного типа* или *типа Bang-*

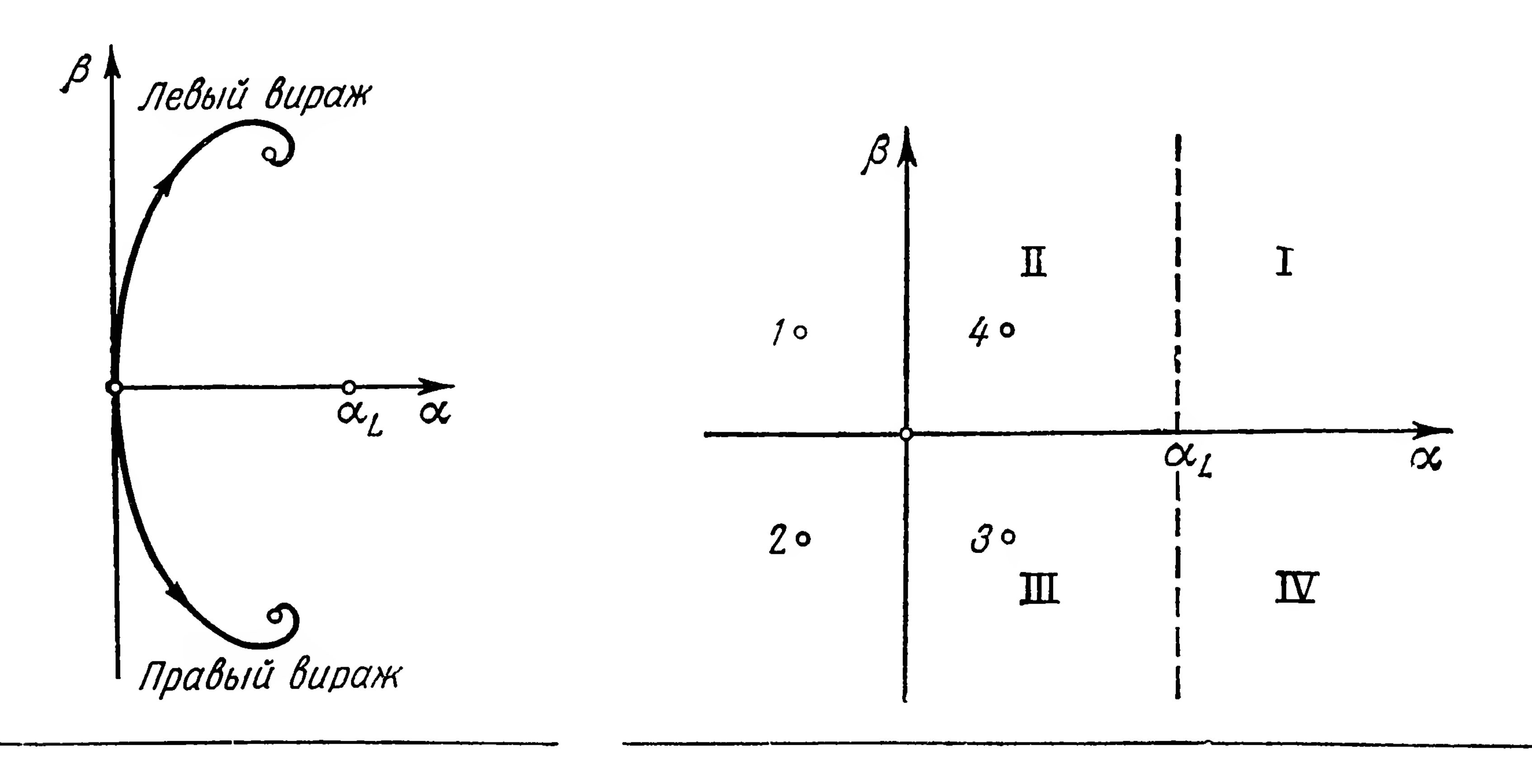


Рис. 12.16. Траектории установления гировертикали на вираже.

Рис. 12.17. Распределение квадрантов для гировертикали с коррекцией релейного типа на вираже.

Bang). При отсутствии моментов силы тяжести вместо уравнений движения (12.44) получаем следующие:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + H\omega\alpha + g\,\mathrm{sgn}\,\beta &= 0, \\ -H\dot{\alpha} + H\omega\beta - g\,\mathrm{sgn}\,(\alpha - \alpha_L) &= 0. \end{aligned} \tag{12.50}$$

Теперь плоскость α-β делится осью абсцисс ($\beta = 0$) и прямой, параллельной оси ординат ($\alpha = \alpha_L$), на четыре квадранта, которым соответствуют точки равновесия

$$\alpha_G = \pm \frac{g}{H\omega}, \quad \beta_G = \pm \frac{g}{H\omega}. \tag{12.51}$$

На рис. 12.17 изображены названные квадранты, пронумерованные римскими цифрами I — IV, и соответствующие им точки равновесия *1—4*. Интегральные кривые уравнений (12.50) даются уравнением

$$(\alpha - \alpha_G)^2 + (\beta - \beta_G)^2 = r^2$$

и являются окружностями, описанными из точек равновесия. Путем последовательного припасовывания дуг окружностей можно легко построить траектории установления. На рис. 12.18—12.20 они построены для различных значений угла α_L кажущейся вертикали в предположении, что в начале виража гировертикаль не имеет погрешностей. Тогда во всех случаях движение начинается

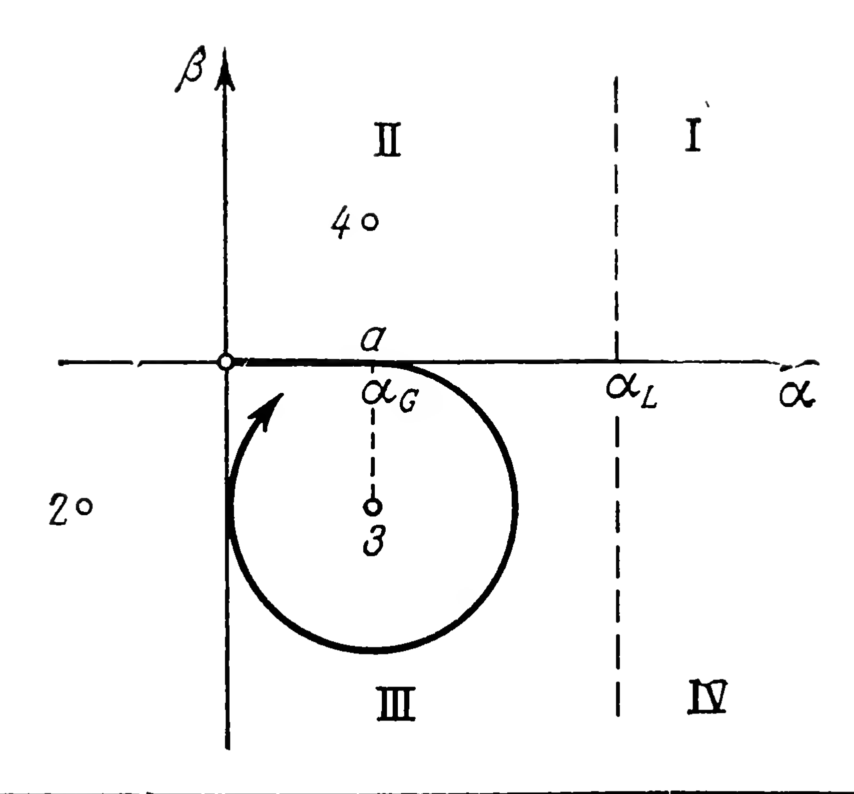


Рис. 12.18. Траектории установления гировертикали с коррекцией релейного типа при $\alpha_L > 2\alpha_G$.

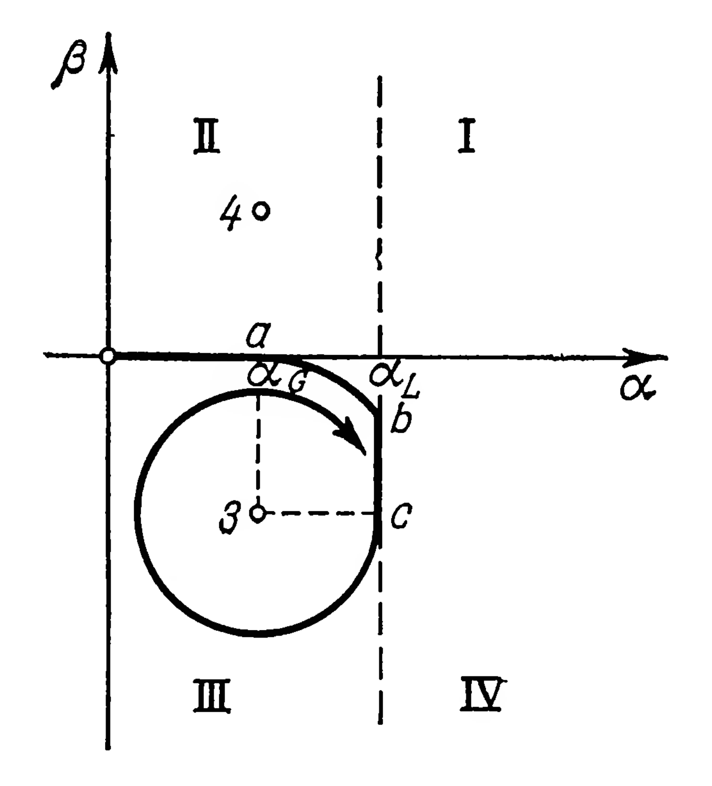


Рис. 12.19. Траектории установления гировертикали с коррекцией релейного типа при $\alpha_G < \alpha_L < 2\alpha_G$.

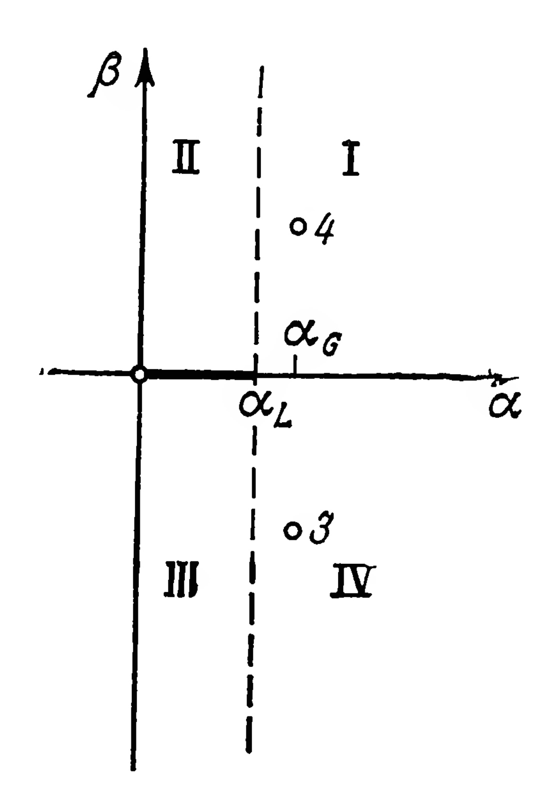


Рис. 12.20. Траектории установления гировертикали с коррекцией релейного типа при $\alpha_L < \alpha_G$.

с вибрационного скольжения вдоль оси α, служащей границей между квадрантами II и III. В квадранте III к точке a примыкает дуга, которая в случае, представленном на рис. 12.18, не прерывается. В случае, представленном на рис. 12.19, она продолжается до точки b на границе между квадрантами III и IV, после чего происходит вибрационное скольжение от точки b до точки c, а затем в квадранте III описывается дуга радиусом $\alpha_L - \alpha_G$. В случае, представленном на рис. 12.20, смещение происходит только как вибрационное скольжение к положению кажущейся вертикали $\alpha = \alpha_L$.

В качестве меры против виражных погрешностей рассмотренного нами вида может служить либо полное отключение коррекции гировертикали на время виража, либо отключение только по оси 1. Тогда гироскоп временно используется в качестве некорректируемого свободного гироскопа.

12.3.3. Теория невозмущаемости гироскопической вертикали при произвольном движении ее точки подвеса по земной поверхности. В элементарной теории гировертикали, которой мы занимались в п. 12.3.2, вращение и кривизна Земли не принимались во внимание. Оказывается, однако, что при более точных исследованиях обусловленные ими явления следует учитывать. Более того, именно

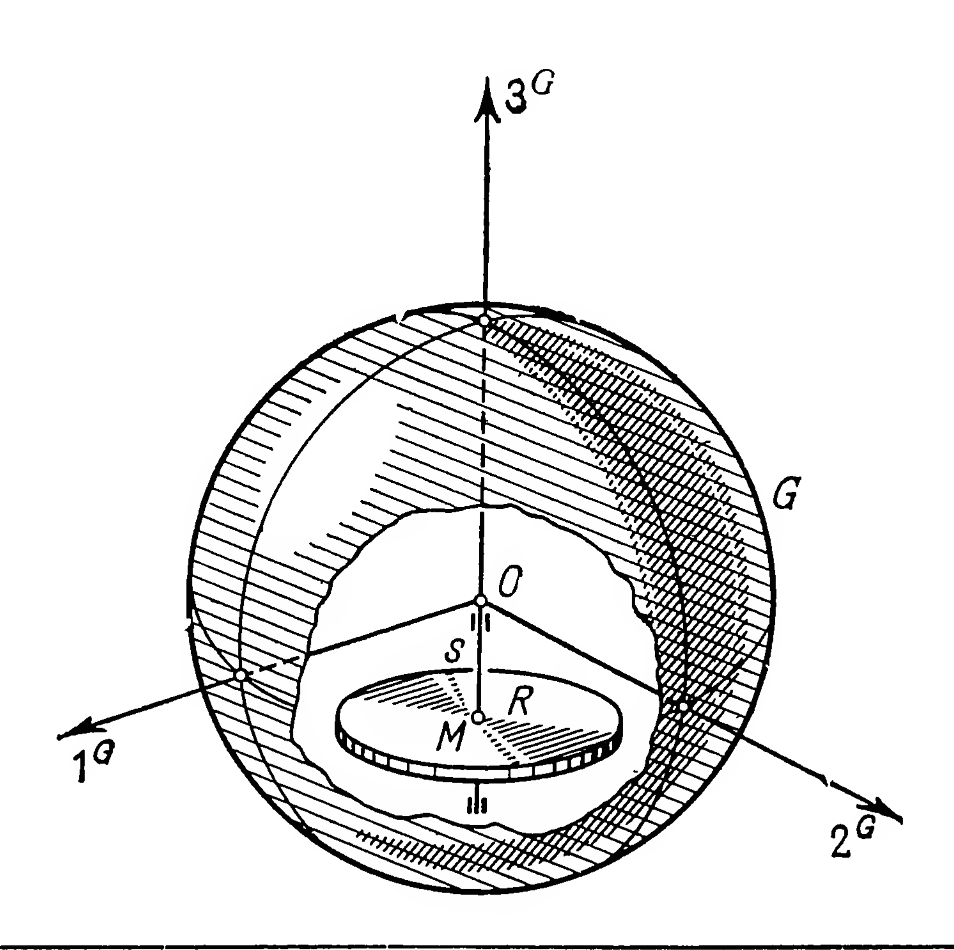


Рис. 12.21. Гировертикаль со сферическим поплавковым подвесом.

эти явления позволяют осуществить весьма полезную настройку прибора, благодаря которой возмущения определенного характера не влияют на гировертикаль.

Пусть нам дана гировертикаль, состоящая из симметричного ротора R, заключенного в симметричный же кожух G (рис. 12.21). Пусть главные моменты инерции указанных тел будут $A^R = B^R$, C^R

и $A^G = B^G$, C^G, так что $A = A^R + A^G = B^R + B^G$ и $C = C^R + C^G$. Пусть кожух, выполненный, например, в виде сферического поплавка, имеет неподвижную относительно объекта точку O (точка подвеса), и пусть общий центр масс M расположен на оси 3 на расстоянии s от точки O. Будем полагать, что момент трения и активный момент относительно оси ротора уравновешиваются, а моментом сопротивления сферического поплавка будем пренебрегать.

Предположим, что точка подвеса O гировертикали движется произвольным образом по земной поверхности, которую мы будем принимать за сферу (радиуса R). Вектором v_i мы будем обозначать результат сложения скорости этого движения с переносной скоростью, обусловленной вращением Земли. В системе координат, связанной с кожухом, оси 1^G и 2^G которой горизонтальны, а ось 3^G вертикальна, составляющие v_i будут $v_i = (v_1, v_2, 0)$. Для того чтобы ось 3^G сохраняла вертикальное направление, система координат должна вращаться с угловой скоростью [1])

$$\Omega_i = \left(-\frac{v_2}{R}, \frac{v_1}{R}, 0\right). \tag{12.52}$$

В этой системе координат теорему о кинетическом моменте можно применить в форме

$$\frac{d'H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k = M_i. \tag{12.53}$$

Для вывода приближенных уравнений (см. § 10.2) сюда надо подставить (12.52) и

$$H_i = \left[A\left(\dot\alpha - \frac{v_2}{R}\right) + H\beta,\ A\left(\dot\beta + \frac{v_1}{R}\right) - H\alpha,\ H\right]. \tag{12.54}$$

При этом предполагается, что кардановы углы α и β малы, т. е. что ось ротора 3^G незначительно отклоняется от вертикали. Величина $H = H_0$ — постоянная составляющая кинетического момента по оси ротора.

Если в качестве внешних моментов в уравнении (12.53) мы примем составляющие, возникающие из-за ускорения точки подвеса, а также суммарный момент сил тяготения (см., например, (8.25), но с другим знаком s!), то получим уравнения движения в виде

$$\begin{gathered} A\left(\ddot\alpha - \frac{\dot v_2}{R}\right) + H\dot\beta + \frac{H}{R}v_1 = M_1 = -ms\dot v_2 - \left[msg - \frac{3g}{R}(C-A)\right]\alpha, \\ A\left(\ddot\beta + \frac{\dot v_1}{R}\right) - H\dot\alpha + \frac{H}{R}v_2 = M_2 = ms\dot v_1 - \left[msg - \frac{3g}{R}(C-A)\right]\beta. \end{gathered} \tag{12.55}$$

[1]) С кинематической точки зрения не обязательно полагать в выражении (12.52) $\Omega_3 = 0$. — *Прим. ред.*

Полагая

$$z = \alpha + i\beta, \quad w = v_1 + iv_2 \tag{12.56}$$

и

$$k = mgs - \frac{3g}{R}(C - A), \tag{12.57}$$

мы можем привести (12.55) к одному уравнению

$$A\ddot{z} - iH\dot{z} + kz = i\left(ms - \frac{A}{R}\right)\dot{w} - \frac{H}{R}w = f(t). \tag{12.58}$$

Правая часть этого уравнения представляет собой определяемую скоростью w и ускорением $\dot{w}$ функцию времени, относительно которой мы в дальнейшем не будем делать никаких ограничивающих предположений. Таким образом, движение точки подвеса O по земной поверхности может быть совершенно произвольным.

Прежде чем заняться исследованием общего решения уравнения (12.58), рассмотрим одно частное решение, имеющее принципиальное значение. При жесткой связи ротора с кожухом $H = 0$. Гироскоп превращается в обыкновенный физический маятник. Если отстояние s его центра тяжести выбрать так, чтобы соблюдалось равенство

$$s = A/(mR), \tag{12.59}$$

то правая часть (12.58) обратится в нуль. Но тогда $z \equiv 0$ является частным решением. Это показывает, что независимо от характера движения точки подвеса рассматриваемого физического маятника по земной поверхности его ось 3^G постоянно сохраняет вертикальное направление, если она была вертикальна в начале движения [1]. Таким образом, перед нами идеальный индикатор вертикали, показания которого не содержат погрешностей также и на подвижном основании. На эту возможность впервые указал Шулер [60]. Однако реализация такого указателя вертикали наталкивается на невозможность практического осуществления условия настройки (12.59): для выполнения этого условия требуется, чтобы приведенная длина физического маятника была равна радиусу Земли R. Период колебаний настроенного таким образом физического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{A}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\frac{A}{4A - 3C}}. \tag{12.60}$$

Для стержнеобразного маятника ($C = 0$) он равен 42,2 мин; для маятника со сферическим эллипсоидом инерции получается *период*

[1] Для невозмущаемости физического маятника, кроме выполнения условия (12.59), необходимо еще, чтобы вертикальная составляющая угловой скорости маятника поддерживалась равной нулю (см. Ишлинский А. Ю., *Прикл матем и мех.*, 20 (1956), вып. 3, 297—308). Это второе условие не вытекает из уравнений движения (12.55) по той причине, что при их составлении с самого начала предполагалось, что $\Omega_3 = 0$ [см. (12.52)] — *Прим ред.*

Шулера $T = 84{,}4$ мин; в случае $4A = 3C$ мы имеем $T \to \infty$. У сильно сплюснутого маятника ($3C > 4A$) положение равновесия $z = 0$ становится неустойчивым. Если в (12.55) пренебречь составляющей градиента сил тяготения, то получится качественно ошибочный результат, потому что при этом период оказывается равным 84,4 мин при любой форме маятника.

Общее решение уравнения (12.58) можно построить известными методами по частным решениям однородного уравнения. Прежде всего отметим, что однородное уравнение дает обе собственные частоты

$$\left.\begin{matrix}\omega^N \\ \omega^P\end{matrix}\right\} = \frac{H}{2A}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Ak}{H^2}}\right]. \tag{12.61}$$

Соответствующие частные решения

$$z_1 = Z_1 e^{i\omega^N t} \quad \text{и} \quad z_2 = Z_2 e^{i\omega^P t} \tag{12.62}$$

образуют фундаментальную систему, из которой общее решение уравнения (12.58) для $f(t) \neq 0$ находится следующим образом:

$$z = z_1\left[1 + \int_0^t \frac{z_2 f(t)}{A(z_2\dot{z}_1 - z_1\dot{z}_2)}\,dt\right] + z_2\left[1 + \int_0^t \frac{z_1 f(t)}{A(z_1\dot{z}_2 - z_2\dot{z}_1)}\,dt\right],$$

или после подстановки (12.62)

$$z = e^{i\omega^N t}\left[Z_1 + \frac{i}{A(\omega^P - \omega^N)}\int_0^t f(t)\,e^{-i\omega^N t}\,dt\right] + e^{i\omega^P t}\left[Z_2 + \frac{i}{A(\omega^N - \omega^P)}\int_0^t f(t)\,e^{-i\omega^P t}\,dt\right]. \tag{12.63}$$

Подставив в полученные интегралы функцию $f(t)$ согласно правой части (12.58) и проинтегрировав по частям, найдем члены, зависящие от скорости w:

$$\int_0^t w e^{-i\omega t}\,dt = \frac{i}{\omega}\left[w e^{-i\omega t} - w_0\right] - \frac{i}{\omega}\int_0^t \dot{w} e^{-i\omega t}\,dt. \tag{12.64}$$

Подставив это выражение в (12.63), придем к общему решению в следующем виде:

$$z = \left[Z_1^* e^{i\omega^N t} + Z_2^* e^{i\omega^P t}\right] + \frac{Hw}{AR\omega^N\omega^P} + \frac{e^{i\omega^N t}}{A(\omega^N - \omega^P)}\left[ms - \frac{A}{R} + \frac{H}{R\omega^N}\right]\int_0^t \dot{w} e^{-i\omega^N t}\,dt + \frac{e^{i\omega^P t}}{A(\omega^P - \omega^N)}\left[ms - \frac{A}{R} + \frac{H}{R\omega^P}\right]\int_0^t \dot{w} e^{-i\omega^P t}\,dt, \tag{12.65}$$

где

$$Z_1^* = Z_1 + \frac{Hw_0}{AR\omega^N(\omega^N - \omega^P)}, \quad Z_2^* = Z_2 - \frac{Hw_0}{AR\omega^P(\omega^N - \omega^P)}.$$

Члены в первой квадратной скобке выражения (12.65) соответствуют собственным нутационным и прецессионным колебаниям; следующий член представляет зависящую от скорости w погрешность показаний гироскопической вертикали, содержащую как *девиацию от вращения Земли*, так и *скоростную девиацию*, которая является следствием собственного движения объекта. Не составляет труда вычислить каждую из этих составляющих в отдельности по известным угловой скорости Земли, географической широте, курсу и скорости объекта.

Два последних члена правой части (12.65) зависят от ускорения $\dot{w}$; они содержат множители, которые в предположении, что условие настройки (12.59) соблюдается, могут быть одновременно обращены в нуль лишь при $H = 0$. Это показывает, что настройка параметров прибора, полностью исключающая влияние ускорения объекта, существует только для рассмотренного выше частного случая физического маятника. Следовательно, такая настройка гироскопической вертикали маятникового типа, которая бы полностью исключала влияние ускорений, невозможна.

В зависимости от спектра частот ожидаемого ускорения $\dot{w}$ необходимо определить, какой из двух возмущающих членов может быть обезврежен путем соответствующей настройки параметров. Если ожидаются долговременные ускорения, например при маневрировании корабля, то безусловно

$$\int \dot{w}e^{-i\omega^P t}\,dt \gg \int \dot{w}e^{-i\omega^N t}\,dt,$$

тогда как в случае высокочастотных горизонтальных вибраций точки подвеса соотношение обеих составляющих может оказаться обратным. Следовательно, в первом случае гироскопическую вертикаль надо настраивать так, чтобы

$$ms - \frac{A}{R} + \frac{H}{R\omega^P} = 0. \tag{12.66}$$

Сюда нужно подставлять приближенное значение ω^P, пригодное при большом кинетическом моменте. Из (12.61) в данном случае получаем $\omega^P \approx -k/H$. Подставляя это значение в (12.66) и учитывая (12.57), получаем квадратное уравнение для определения s

$$s^2m^2R^2g - smRg(3C - 2A) - [H^2R - 3gA(C - A)] = 0.$$

При большом кинетическом моменте безусловно $H^2R \gg 3gA(C—A)$. Сообразуясь с этим и пренебрегая средним членом, находим приближенное решение

$$s \approx \frac{H}{m\sqrt{Rg}}. \tag{12.67}$$

При подстановке (12.67) в уравнение видим, что отброшенный член действительно оказывается малым по сравнению с H^2R. Значение s по формуле (12.67) получается больше, чем его величина (12.59), относящаяся к физическому маятнику, так как во всяком случае $H \gg A\sqrt{g/R}$. Поэтому в соответствии с (12.57) для k можно принять следующее приближенное выражение:

$$k \approx mgs \approx H\sqrt{\frac{g}{R}}\,.$$

Тогда период прецессии гироскопической вертикали, настроенной согласно условию (12.67), составит

$$T = \frac{2\pi}{|\omega^P|} \approx 2\pi\frac{H}{k} \approx 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84{,}4 \text{ мин.} \qquad (12.68)$$

Если, наоборот. желательно исключить влияние высокочастотных вибраций, то следует принять

$$ms - \frac{A}{R} + \frac{H}{R\omega^N} \approx 0.$$

При подстановке приближенного значения $\omega^N \approx H/A$ отсюда непосредственно следует $s = 0$. Вибрации и на самом деле лучше всего удается обезвредить путем астатического подвеса гироскопа,

Глава 13

Гирокомпасы

В противоположность позиционным гироскопам, лишь сохраняющим заданное им направление, гирокомпасы могут сами отыскивать нужное направление на Земле — направление на север — и устанавливаться в соответствующем положении. Эту способность различать направления гироскоп приобретает вследствие того, что принуждается определенным образом принимать участие во вращении Земли. Реагируя на это принудительное движение, он устанавливается осью ротора в плоскости меридиана места.

Коррекция гироскопа, необходимая для приведения его в плоскость меридиана, всегда обеспечивается связью между гироскопом и вертикалью или горизонтальной плоскостью. Гироскоп выполняют в виде маятника или же включают в контур, содержащий индикатор вертикали и датчик момента. Не будем вдаваться в описание многочисленных конструктивных вариантов этой связи гироскопа с вертикалью. Мы не будем также излагать весьма интересную историю развития гирокомпасов, зачастую следовавшего сложными окольными путями; это подробно сделано во многих работах (см., например, Граммель [3], Шулер [85] или Ричардсон [10]). Ограничимся лишь тем, что охарактеризуем важнейшие типы гирокомпасов и на примерах поясним общие физические свойства этих приборов.

13.1. Приборы с направляющей силой [1])

Фуко принадлежит не только идея, но и первый опыт реализации двух гироскопических приборов, способных отыскивать направление; их принято называть деклинометрическим и инклинометрическим гироскопами.

Деклинометрический гироскоп в принципе устроен так, как это изображено на рис. 13.1: ось ротора горизонтальна и помещена в раме, которая может свободно поворачиваться вокруг верти-

[1]) Автор использует здесь термин «richtungfindende Kreiselgeräte» (в дословном переводе «гироскопические приборы, отыскивающие направление»); в нашей литературе такие устройства обычно называют приборами с направляющей силой. — *Прим. ред.*

кальной оси 1. Пусть система отсчета связана с Землей и ориентирована таким образом, что ось 3 лежит в горизонтальной плоскости и направлена на север. Тогда ось 2 лежит в горизонтальной плоскости и направлена на восток. Так как система отсчета принимает участие во вращении Земли, составляющие $\omega^E \sin\varphi$ и $\omega^E \cos\varphi$ (рис. 12.8) совпадают с направлениями осей 1 и 3 соответственно.

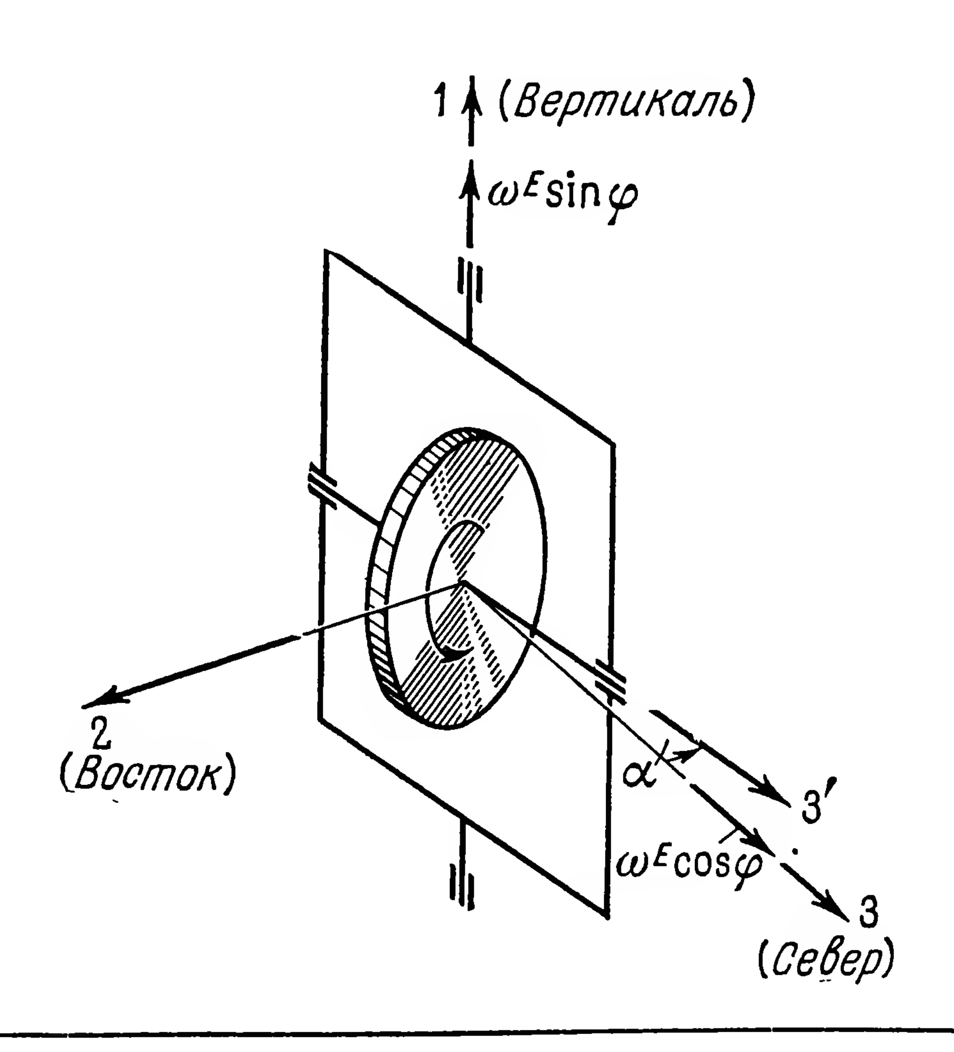


Рис. 13.1. Схема деклинометрического гироскопа.

Вследствие этого принудительного вращения гироскопа, ось которого $3'$ может быть отклонена от направления на север на угол α, возникают моменты реакции, которые при неподвижной раме ($\alpha = \text{const}$) могут быть рассчитаны следующим образом:

$$M_i^{KR} = -\varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k, \qquad (13.1)$$

где

$$\Omega_j = (\omega^E \sin\varphi,\ 0,\ \omega^E \cos\varphi),$$

$$H_k = (0,\ -H\sin\alpha,\ H\cos\alpha),$$

откуда

$$M_i^{KR} = (-H\omega^E \cos\varphi \sin\alpha,\ H\omega^E \sin\varphi \cos\alpha,\ H\omega^E \sin\varphi \sin\alpha). \qquad (13.2)$$

Составляющие M_2^{KR} и M_3^{KR} воспринимаются рамой. Составляющая M_1^{KR} стремится повернуть раму так, чтобы вектор кинетического момента указывал на север; момент M_1^{KR} пропорционален $\sin\alpha$ и создает упругую связь между кинетической осью и направлением на север, которая и может быть использована для определения этого направления.

Инклинометрический гироскоп в принципе устроен так же, но ориентируется иначе (рис. 13.2). Ось рамы установлена горизонтально в направлении восток — запад. В этом случае, учитывая, что

$$\Omega_j = (\omega^E \sin\varphi,\ 0,\ \omega^E \cos\varphi),$$
$$H_k = (H \sin\vartheta,\ 0,\ H\cos\vartheta), \tag{13.3}$$

находим, что реактивный момент, действующий на раму, равен

$$M_2^{KR} = H\omega^E \sin(\vartheta - \varphi). \tag{13.4}$$

Этот момент связывает гироскоп с направлением, которое определяется равенством $\vartheta = \varphi$. Следовательно, в положении равновесия

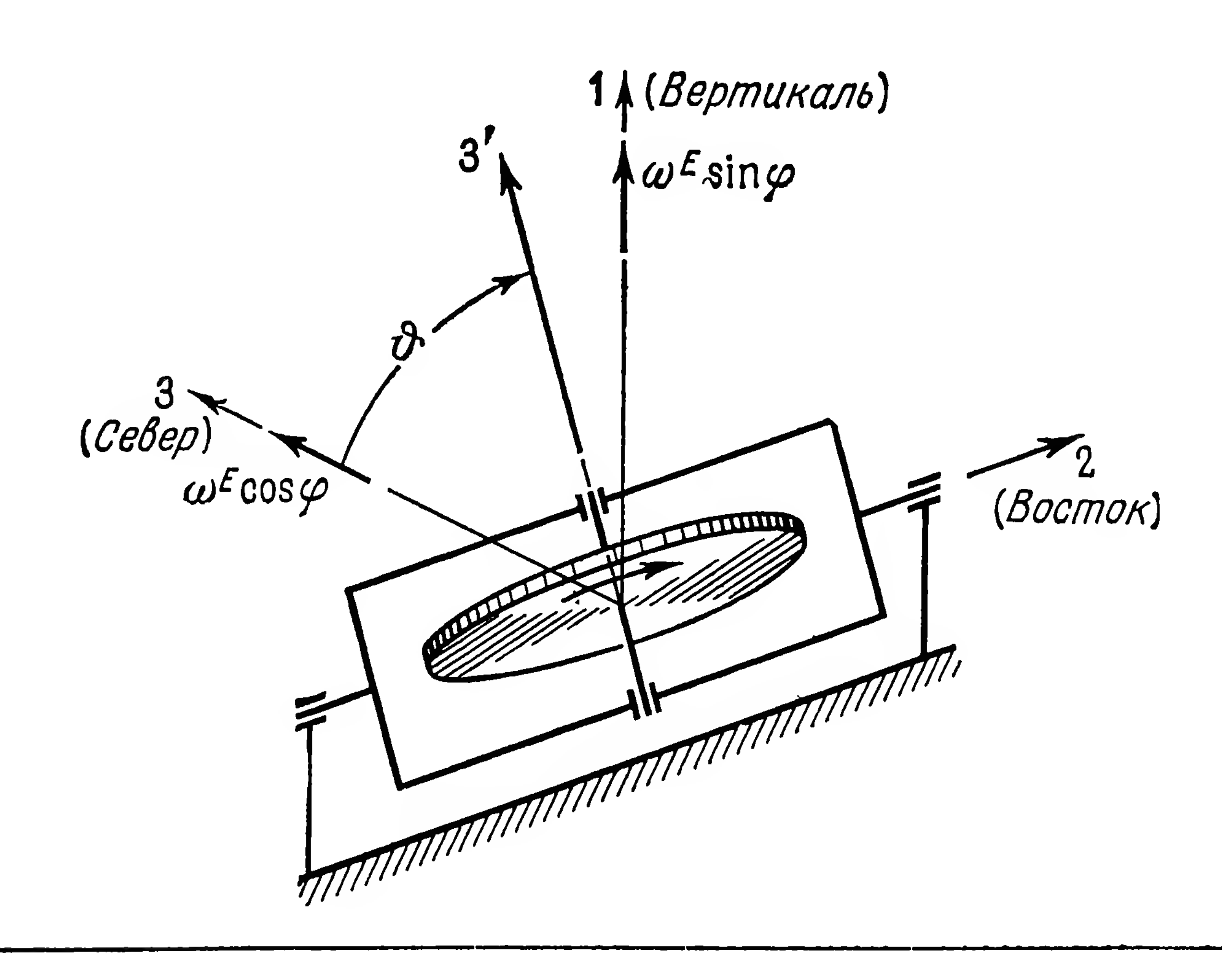


Рис. 13.2. Схема инклинометрического гироскопа.

угол ϑ равен географической широте места φ. В положении, при котором $M_2^{KR} = 0$, ось ротора параллельна оси вращения Земли (рис. 13.3).

Деклинационный гироскоп представляет собой простейший гирокомпас. Связь с вертикалью достигается здесь тем, что ось рамы закрепляется неподвижно в вертикальном положении. В других типах гирокомпасов связь с вертикалью обеспечивается тем, что гироскоп выполняют в виде маятника; для этого его центр тяжести смещают относительно оси подвеса. Пример показан на рис. 13.4, где гироскоп помещен в плавающую сферу так, что центр масс M лежит ниже центра сферы O (точка подвеса). Ось ротора расположена перпендикулярно линии OM и потому в основном движется в горизонтальной плоскости.

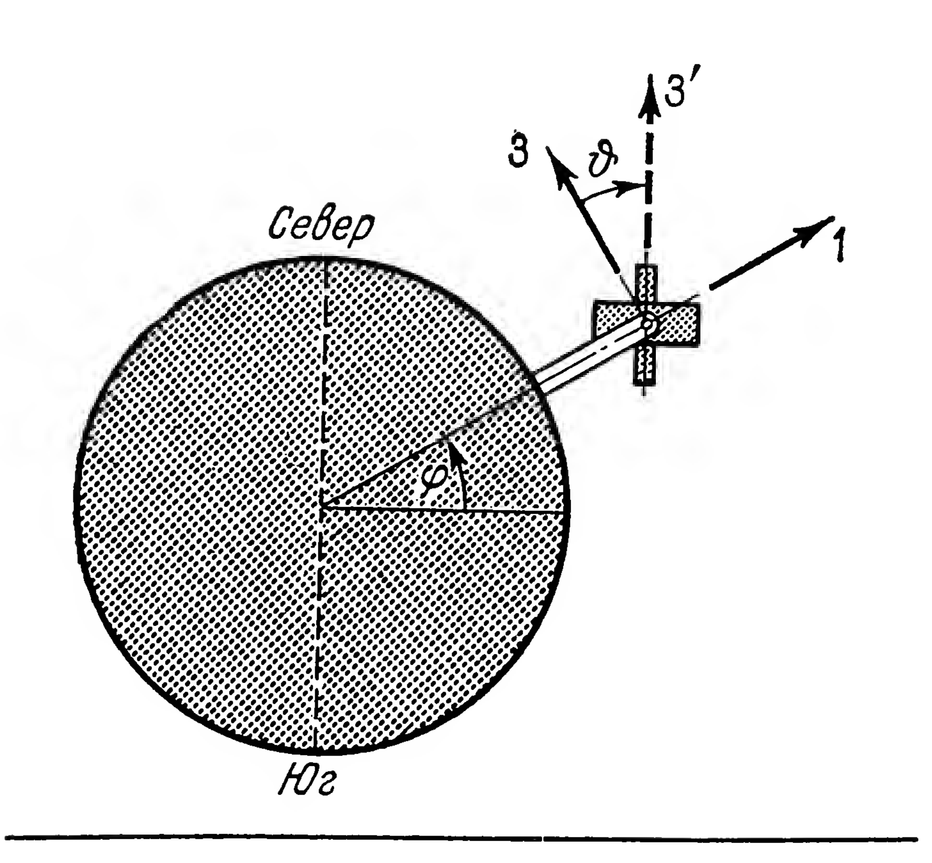


Рис. 13.3. Ориентация инклинометрического гироскопа в положении равновесия.

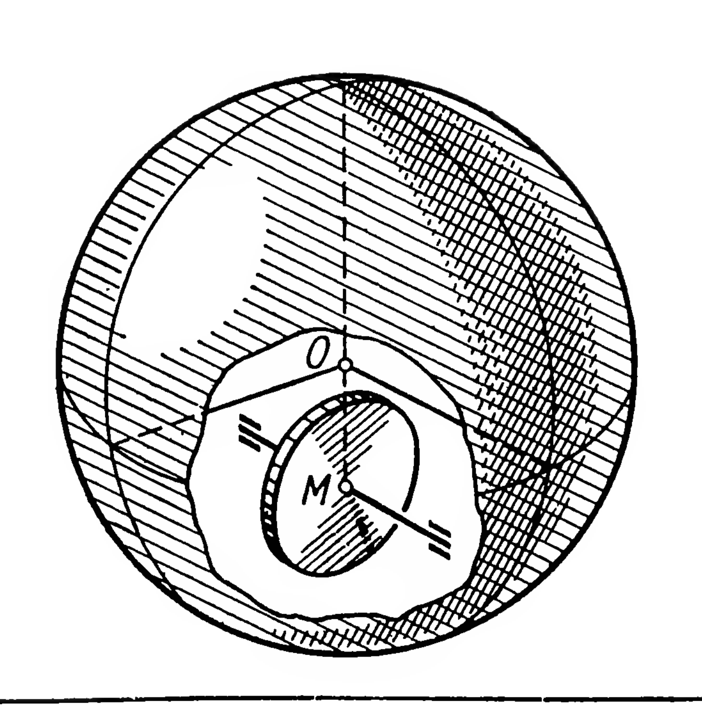


Рис. 13.4. Подвес гирокомпаса в виде плавающей сферы.

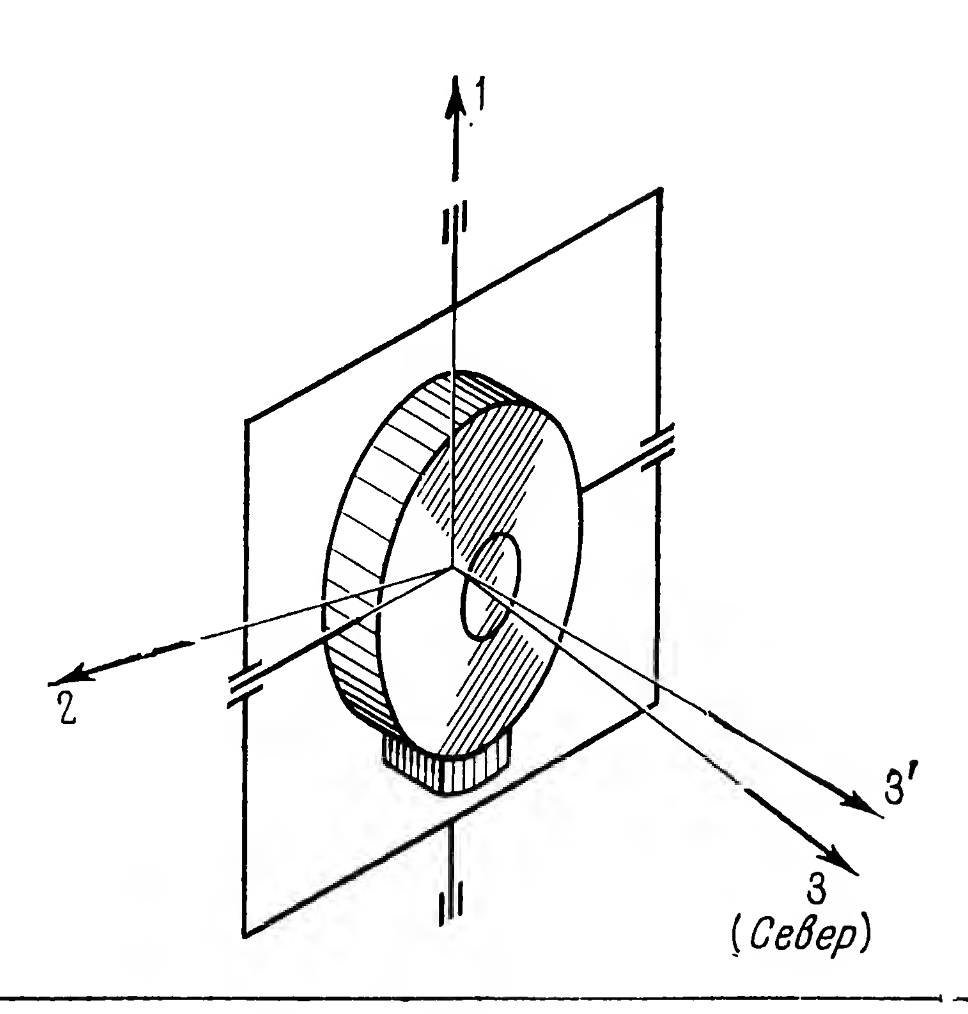


Рис. 13.5. Гирокомпас с кардановым подвесом.

Другая конструкция показана на рис. 13.5. Здесь внешняя рама вертикальна, а ось гироскопа, смонтированного в камере, может качаться вокруг оси внутренней рамы (ось камеры). Груз, прикрепленный внизу к гирокамере, превращает систему в маятник, так что ось ротора и здесь остается приблизительно горизонтальной. Гироскопические приборы, подобные изображенному на рис. 13.4, применяются, например, в качестве *корабельных гирокомпасов,* в то время как конструкцию, показанную на рис. 13.5, можно встретить в *гироуказателях* меридиана, а также в *измерительных*

компасах. Условия, в которых нормально работают морской компас и два последних прибора, настолько непохожи, что имеются существенные различия как в конструкции этих приборов, так и в их применении.

Измерительные компасы всегда применяются для работы на неподвижном относительно Земли основании. Направление отвеса можно считать при этом заранее известным. Установка может быть выполнена так, чтобы исключить вибрации и колебания основания. При таких благоприятных условиях измерений можно определить направление на север с большой точностью. С транспортабельными приборами достигнута средняя ошибка измерений около 10″ (соответственно 30^{cc})[1]. Измерительные компасы состоят из собственно гироскопа (указывающего меридиан) и оптического визирного устройства. Они известны также под названием *наземные компасы* и *гиротеодолиты.* Компасная приставка к теодолиту называется также *компасной насадкой* (или *гиронасадкой*).

Наиболее важное значение имеют *корабельные компасы*, применяемые для работы на подвижном основании. Их точность существенно ниже, чем у наземных компасов и в значительной мере зависит от характера движения корабля. В отличие от измерительного компаса, которым направление на север определяют один раз (возможно, после обработки серии измерений), от корабельного гирокомпаса требуется, чтобы он указывал курс в любой момент времени. Это требует совсем иной настройки прибора и ведет прежде всего к увеличению времени установления компаса в равновесное положение.

В то время как гирокомпасы на неподвижном основании в принципе могут быть с одним гироскопом (*однороторный компас*), в корабельном компасе применяются два, а применялись и три ротора, чтобы достигнуть большей невозмущаемости (*двух-* и *трехроторные компасы*). *Пространственным компасом* называют специальный двухроторный гирокомпас, который благодаря особой настройке параметров прибора указывает не только направление на север, но и вертикаль места вне зависимости от характера движения объекта. С помощью такого гироскопического прибора может быть создана независимая от движения объекта система отсчета, ориентированная по странам света. Пространственный компас рассматривается в § 13.4.

13.2. Поведение гироскопического компаса на неподвижном основании

Уравнение колебаний деклинометрического гироскопа, изображенного на рис. 13.1, при отсутствии внешних возмущающих или демп-

[1] 1^{cc} — метрическая (угловая) секунда. — *Прим. ред*

фирующих моментов принимает вид

$$A\ddot{\alpha} + H\omega^E \cos\varphi \sin\alpha = 0. \tag{13.5}$$

Оно соответствует уравнению колебаний маятника в вертикальной плоскости. При малых отклонениях ($\alpha \ll 1$) от положения равновесия ($\alpha = 0$) получаем для периода колебаний

$$T_{\text{декл}} = 2\pi \sqrt{\frac{A}{H\omega^E \cos\varphi}}. \tag{13.6}$$

Для данного прибора колебания совершаются тем медленней, чем больше географическая широта φ. На полюсе, где $\varphi = \pm\pi/2$, прибор теряет способность указывать направление.

Уравнения движения (13.5), так же как и определяемый ими период колебаний (13.6), получаются при допущении, что ротор, рамы и подшипники являются абсолютно жесткими. Эксперименты показывают, что измеренные периоды колебаний обычно значительно больше, чем их теоретическая величина (13.6). Это обусловлено влиянием упругой податливости элементов конструкции, которое было подробно исследовано в п. 9.2.2.

При нежесткой связи с вертикалью в поведении гирокомпаса имеются качественные отличия. Покажем это на гирокомпасе, изображенном на рис. 13.5. Ограничимся с самого начала малыми отклонениями от положения равновесия ($\alpha, \beta \ll 1$). Тогда, приняв во внимание, что

$$\Omega_j = (\omega^E \sin\varphi,\ 0,\ \omega^E \cos\varphi),$$
$$H_k = [A(\dot{\alpha} + \omega^E \sin\varphi) + H\beta,\ B\dot{\beta} - H\alpha,\ H],$$

получим из равенства

$$\dot{H}_i + \varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k = M_i$$

уравнения движения

$$\begin{aligned} &A\ddot{\alpha} + (H - B\omega^E \cos\varphi)\dot{\beta} + H\omega^E \cos\varphi\, \alpha = M_1, \\ &B\ddot{\beta} - (H - A\omega^E \cos\varphi)(\dot{\alpha} + \omega^E \sin\varphi) + H\omega^E \cos\varphi\, \beta = M_2. \end{aligned} \tag{13.7}$$

В этих уравнениях можно сначала без всякого сомнения пренебречь членами $A\omega^E \cos\varphi$ и $B\omega^E \cos\varphi$, так как они на много порядков меньше, чем H. Далее можно сделать приближения, которые допустимы при достаточно больших значениях кинетического момента и после которых нутационное и прецессионное движение могут быть рассчитаны раздельно. Для расчета интересующего нас в первую очередь прецессионного движения можно опустить инерционные члены $A\ddot{\alpha}$ и $B\ddot{\beta}$. Наконец, нужно указать значения моментов M_1 и M_2. Большей частью можно положить, что

$$M_1 = -f\beta, \quad M_2 = -c\beta. \tag{13.8}$$

Составляющая M_2 обусловлена смещением центра тяжести, а M_1 в данном виде служит демпфирующим моментом коррекции. Практически он реализуется самыми различными способами. Обозначив сокращенно

$$f/H = \delta, \quad c/H = \omega^c, \tag{13.9}$$

можно, основываясь на уравнениях (13.7), написать

$$\begin{gathered} \omega^E \cos\varphi\, \alpha + \dot{\beta} + \delta\beta = 0, \\ -\dot{\alpha} + (\omega^c + \omega^E \cos\varphi)\, \beta = \omega^E \sin\varphi. \end{gathered} \tag{13.10}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений определяет колебания около положения равновесия, в котором углы α и β имеют значения

$$\alpha_0 = -\frac{\delta \operatorname{tg}\varphi}{\omega^c + \omega^E \cos\varphi}, \quad \beta_0 = \frac{\omega^E \sin\varphi}{\omega^c + \omega^E \cos\varphi}. \tag{13.11}$$

Из (13.10) следует, что характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + \lambda\delta + \omega^E \cos\varphi\, (\omega^c + \omega^E \cos\varphi) = 0,$$

а его решение таково:

$$\lambda = -\frac{\delta}{2} \pm i\sqrt{\omega^E \cos\varphi\, (\omega^E \cos\varphi + \omega^c) - \delta^2/4} = -\frac{\delta}{2} \pm i\omega^K. \tag{13.12}$$

Для отношения в общем случае комплексных амплитуд α^A и β^A колебаний вокруг осей обеих рам получаем из (13.10/1) равенство $[\alpha^A \omega^E \cos\varphi + \beta^A(\lambda + \delta)]\, e^{\lambda t} = 0$, откуда

$$\frac{\beta^A}{\alpha^A} = -\frac{\omega^E \cos\varphi}{\delta/2 \pm i\omega^K}. \tag{13.13}$$

Для истолкования этого результата рассмотрим сначала случай, когда демпфирование отсутствует ($\delta = 0$), и примем во внимание, что у применяемых в практике приборов всегда $c/H = \omega^c \gg \omega^E$. Тогда получаем приближенно

$$\begin{gathered} \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 \approx \frac{\omega^E}{\omega^c} \sin\varphi, \\ \omega^K \approx \sqrt{\omega^c \omega^E \cos\varphi}, \quad T_K = \frac{2\pi}{\omega^K} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^c \omega^E \cos\varphi}}, \\ \frac{\beta^A}{\alpha^A} \approx i\sqrt{\frac{H\omega^E \cos\varphi}{\omega^c}}. \end{gathered} \tag{13.14}$$

Это незатухающие колебания с периодом T_K около положения равновесия, смещенного вдоль оси β. Так как отношение β^A/α^A — мнимая величина, то колебания вокруг осей рам сдвинуты по фазе

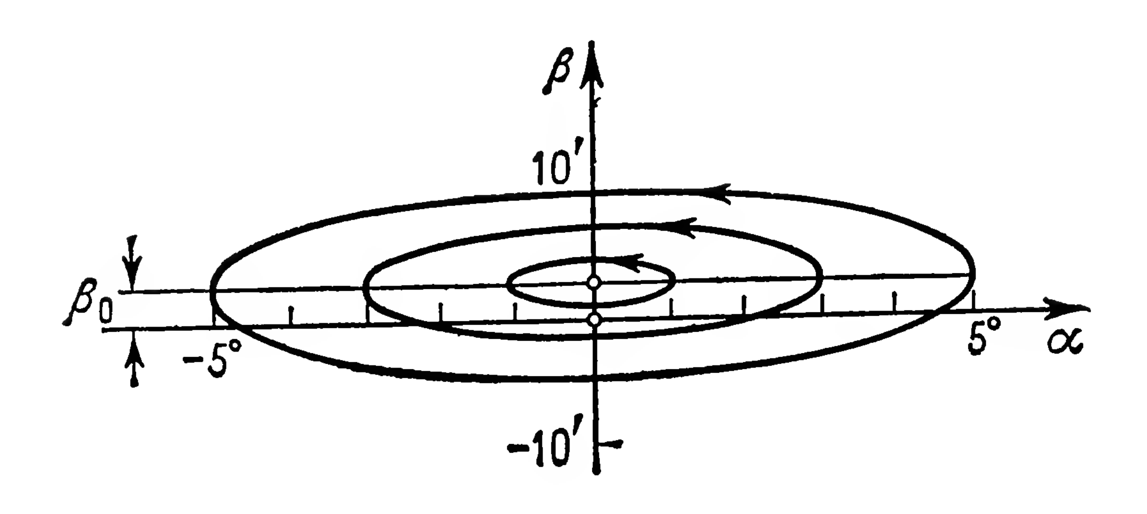


Рис. 13.6. Эллипсы, описываемые незадемпфированным гирокомпасом.

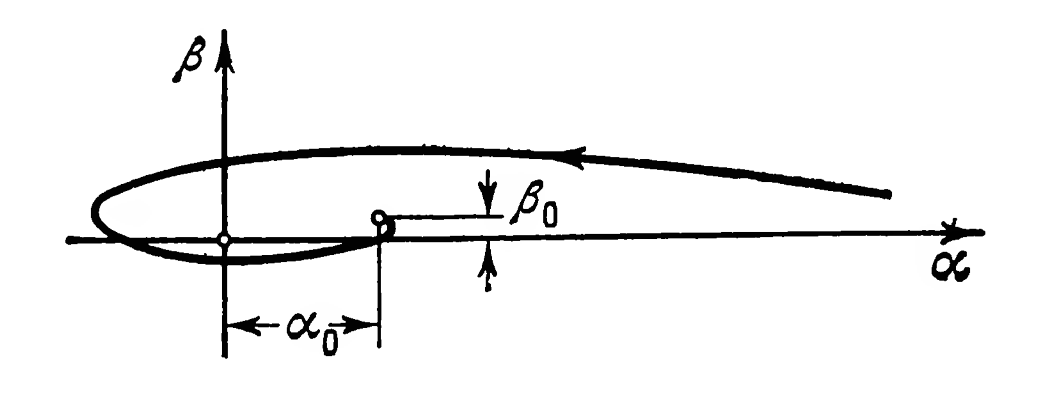


Рис. 13.7. Кривая, описываемая задемпфированным гирокомпасом.

на 90°. В плоскости α-β фазовые траектории имеют форму вытянутых эллипсов. На рис. 13.6 показаны эти эллипсы для осуществленного практически прибора, причем масштаб по β увеличен в 10 раз. Гироскоп колеблется при этом около направления на север ($\alpha = 0$), но ось ротора отклонена от плоскости горизонта на некоторый угол β_0 (*угол возвышения*). В северном полушарии ($\sin \varphi > 0$) конец оси, указывающий на север, несколько приподнят над горизонтом.

При наличии демпфирования ($\delta \neq 0$) кривые превращаются в спирали (рис. 13.7), сходящиеся к точке (α_0, β_0). Следовательно, принятый здесь способ демпфирования порождает некоторую, в общем незначительную ошибку в определении направления на север, которая может быть вычислена по формуле (13.11).

Если учесть, что $\omega^c = c/H$, то будет ясно, что период колебаний T_K отличается от значения (13.6) прежде всего различным влиянием, оказываемым на его величину кинетическим моментом H. Чтобы лучше выяснить это различие, рассмотрим вопрос в приближенной постановке, позволяющей осуществить для деклинационного гироскопа предельный переход при $c \to \infty$. Когда связь внутренней рамы с вертикалью является сильной (большое c) и одновременно кинетический момент достаточно велик, уравнение движения (13.7/2) можно, принимая во внимание (13.8), преобразовать в уравнение прецессионного движения

$$-H\dot{\alpha} \approx -c\beta.$$

Исключая с помощью этого уравнения переменную β из уравнения (13.7/1) и учитывая (13.8), получаем

$$\left(A+\frac{H^2}{c}\right)\ddot{\alpha}+\frac{fH}{c}\dot{\alpha}+H\omega^E\cos\varphi\,\alpha=0. \qquad (13.15)$$

Это дифференциальное уравнение затухающих колебаний, период которых выражается приближенной формулой

$$T\approx 2\pi\sqrt{\frac{A+H^2/c}{H\omega^E\cos\varphi}}. \qquad (13.16)$$

Отсюда при $c\to\infty$ получаем выражение (13.6). И напротив, при слабой связи внутренней рамки с внешней получаем для периода T_K ту же величину, что дает формула (13.14), так как при предполагаемом большом кинетическом моменте можно принять, что $H^2/c \gg A$.

Выражение H^2/c называют эффективным моментом инерции гироскопического компаса.

13.3. Гироскопический компас на движущемся объекте

Гирокомпас, установленный на движущемся объекте, указывает направление на север, вообще говоря, неправильно. Из погрешностей, носящих принципиальный характер, рассмотрим *скоростную погрешность* (*скоростную девиацию*), *погрешность, обусловленную ускорением объекта* (*баллистическую девиацию*), а также *погрешность на качке.* Для того чтобы выяснить здесь основные закономерности, достаточно исследовать недемпфированный компас. Подробные расчеты для различных конструкций можно найти в многочисленных публикациях, например в книгах Булгакова [2] и Мурре [86].

13.3.1. Скоростная девиация. Вследствие вращения Земли точки земной поверхности приобретают скорость, направленную на восток и равную

$$v_i^E=(0,\ \omega^E R\cos\varphi,\ 0). \qquad (13.17)$$

Сложив векторно эту скорость с собственной скоростью v_i^T объекта (корабля), получим его суммарную скорость v_i (рис. 13.8). Скорость v_i можно рассматривать как результат вращения земного шара вокруг оси, образующей угол $-\psi^F$ с осью юг — север. Так как при движении по сфере радиуса R вектор ω_i всегда образует прямой угол с v_i, угол ψ^F можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg}\psi^F=-\frac{v^N}{v^O+v^E}=-\frac{v^T\cos\psi}{v^T\sin\psi+\omega^E R\cos\varphi}, \qquad (13.18)$$

где

$$v^N = v^T \cos \psi \text{ — северная составляющая, а}$$

$$v^O = v^T \sin \psi \text{ — восточная составляющая}$$

собственной скорости объекта.

Компас не может различить, происходит ли изменение положения объекта из-за вращения Земли или из-за его собственного движения по ней, и всегда стремится установиться по направлению вектора ω_i результирующей угловой скорости. Вследствие этого показания компаса содержат погрешность ψ^F, которая определяется

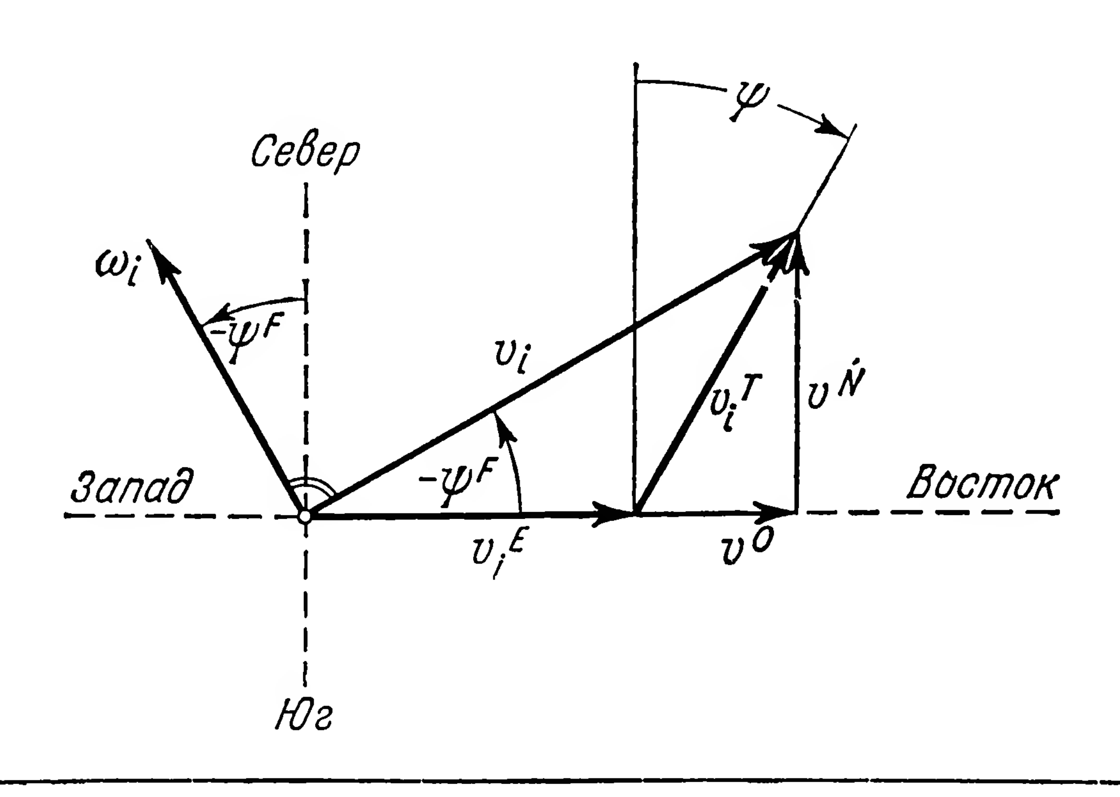


Рис. 13.8. К расчету скоростной девиации.

формулой (13.18) и называется скоростной. Эта погрешность обращается в нуль при движении в направлении восток — запад ($\psi = \pm\pi/2$). Так как она однозначно зависит от скорости v^T объекта, курса ψ и географической широты φ, ее можно вычислить и скомпенсировать. У некоторых компасов такая компенсация производится автоматически.

Ввиду того что скорость $\omega^E R = 1660$ км/ч намного больше возможной скорости v^T корабля, скоростная девиация компаса в умеренных географических широтах обычно не превышает 5°. Вблизи полюса она может значительно возрасти. На самолетах эта девиация принимает столь большие значения, что гироскопический компас не нашел здесь применения.

13.3.2. Баллистическая девиация. Для того чтобы выяснить влияние ускорения объекта, рассмотрим вопрос в приближенной постановке, основанной на упрощенных уравнениях движения, отнесенных к системе отсчета 1, 2, 3 (вертикаль, восток, север), движущейся вместе с объектом (рис. 13.9). Если компоненты скорости

v^O и v^N считать возникшими вследствие дополнительных угловых скоростей Земли

$$\begin{aligned} \omega^{EO} &= \frac{v^O}{R\cos\varphi} = \frac{v^T \sin\psi}{R\cos\varphi}, \\ \omega^{EN} &= \frac{v^N}{R} = \frac{v^T\cos\psi}{R} = \dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{13.19}$$

то система отсчета будет вращаться с угловой скоростью

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\omega^E + \omega^{EO})\sin\varphi \\ -\omega^{EN} \\ (\omega^E + \omega^{EO})\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{13.20}$$

Пренебрегая нутационными колебаниями, можно представить ки-

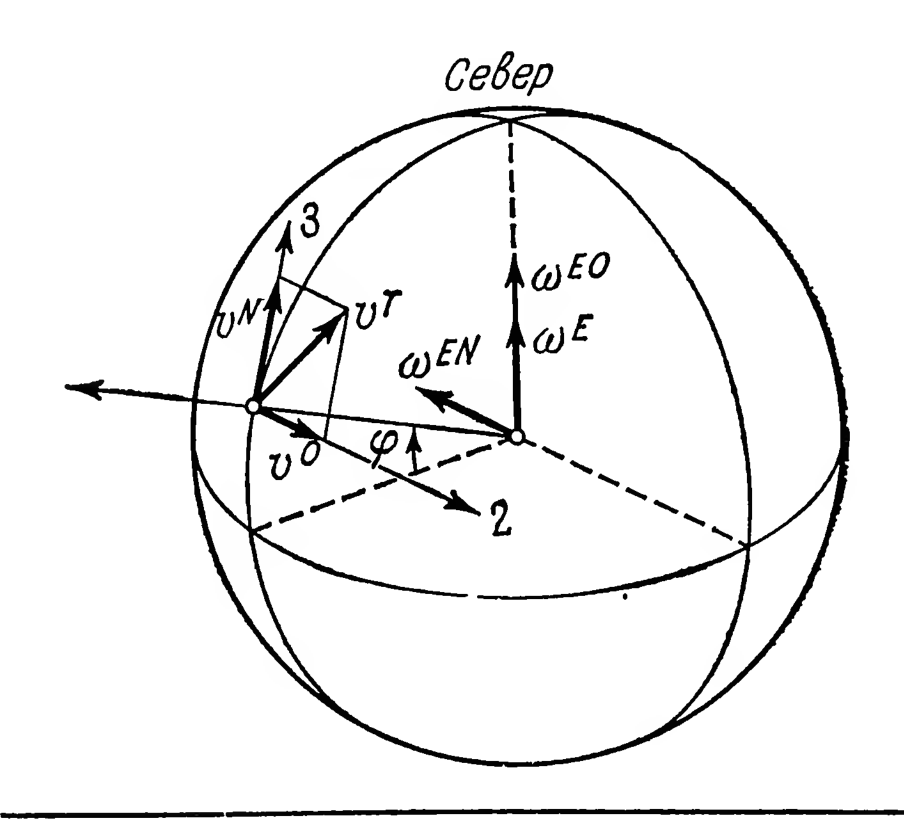


Рис. 13.9. Зависимость между составляющими скорости v^O и v^N и дополнительными угловыми скоростями ω^{EO} и ω^{EN}.

нетический момент в виде

$$H_i = (H\beta, \ -H\alpha, \ H).$$

Получаем приближенные уравнения движения

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} + H\Omega_3\alpha + H\Omega_2 &= M_1, \\ -H\dot{\alpha} + H\Omega_3\beta - H\Omega_1 &= M_2. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Вследствие того что центр тяжести смещен относительно центра подвеса вниз на величину s, имеем

$$M_2 = -Gs\beta - \frac{G}{g}sb^N = -c\left(\beta + \frac{b^N}{g}\right),$$

где $c = Gs$ — коэффициент связи[1], а b^N — северная составляющая ускорения объекта. Для недемпфированного компаса $M_1 = 0$. Теперь можно, учитывая (13.9), привести уравнения (13.21) к виду

$$\dot{\beta} + \Omega_3 \alpha = -\Omega_2,$$

$$-\dot{\alpha} + (\omega^c + \Omega_3)\beta = \Omega_1 - \frac{\omega^c b^N}{g}. \qquad (13.22)$$

Из первого уравнения (13.22), положив в нем $\dot{\beta} = 0$, еще раз получаем скоростную девиацию (13.18):

$$\alpha_0 = -\frac{\Omega_2}{\Omega_3} = \frac{v^T \cos \psi}{R\omega^E \cos \varphi + v^T \sin \psi} = -\operatorname{tg} \psi^F \approx -\psi^F,$$

которая ранее была получена из кинематических соображений. Кроме отклонения α_0, при движении без ускорения ($b^N = 0$) имеется угол возвышения

$$\beta_0 = \frac{\Omega_1}{\omega^c + \Omega_3}. \qquad (13.23)$$

Если в дальнейшем ограничиться случаем, когда движущимся объектом является корабль, то можно положить, что $v^T \ll R\omega^E$, и величина

$$\beta_0 \approx \frac{\omega^E \sin \varphi}{\omega^c + \omega^E \cos \varphi}$$

оказывается независимой ни от курса, ни от скорости объекта. Это обстоятельство позволяет найти приближенное решение уравнений движения (13.22). Система уравнений (13.22) удовлетворяется, если положить в ней $\beta = \beta_0$, $\dot{\beta} = 0$:

$$\alpha = -\frac{\Omega_2}{\Omega_3} \approx \frac{v^T \cos \psi}{R\omega^E \cos \varphi} = \frac{v^N}{R\omega^E \cos \varphi} \qquad (13.24)$$

и одновременно

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega^c b^N}{g}. \qquad (13.25)$$

Если же продифференцировать (13.24) при сделанных ранее допущениях и учесть также, что географическая широта изменяется очень медленно и может считаться постоянной, то получим

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{v}^T \cos \psi - v^T \dot{\psi} \sin \psi}{R\omega^E \cos \varphi} \approx \frac{b^N}{R\omega^E \cos \varphi}.$$

[1] В советской литературе эту величину называют маятниковым моментом. — *Прим. ред.*

Это выражение производной угла α совпадает с (13.25) и, следовательно, удовлетворяет уравнению (13.22/2), если соблюдается соотношение

$$\frac{\omega^c}{g} = \frac{1}{R\omega^E \cos\varphi}. \qquad (13.26)$$

Это достигается соответствующим выбором постоянной прибора $\omega^c = c/H = Gs/H$. Настройка прибора согласно формуле (13.26) означает, что период T_K (13.14) компаса делается равным

$$T_K = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^c\omega^E \cos\varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84{,}4 \text{ мин}. \qquad (13.27)$$

У гирокомпаса, настроенного на период 84,4 мин, ускорения объекта вызывают такое изменение показаний, что компас всегда устанавливается в направлении, отклоненном от меридиана на угол, равный мгновенному значению скоростной девиации. Этот переход к новому положению происходит без колебаний, так что ускорения объекта не порождают погрешности компаса. В этом можно убедиться и с помощью уравнений (13.22). Если продифференцировать равенство (13.22/1), по t, то в рамках принятых ранее допущений имеем

$$\ddot{\beta} + \omega^E \cos\varphi\, \dot{\alpha} = \frac{\dot{b}^N}{R}.$$

Подставив сюда значение $\dot{\alpha}$ из (13.22/2), получим

$$\ddot{\beta} + \omega^E \cos\varphi\, (\omega^c + \omega^E \cos\varphi)\, \beta =$$
$$= \dot{b}^N \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{g}\, \omega^c\omega^E \cos\varphi\right) + (\omega^E)^2 \sin\varphi \cos\varphi. \qquad (13.28)$$

При настройке согласно формуле (13.26) множитель при $\dot{b}^N$ в возмущающем члене обращается в нуль и, следовательно, ускорение объекта не оказывает влияния на движение по углу β. Так как колебания по углам α и β всегда взаимно связаны, не возникает раскачивания и по углу α. Иными словами, компас без колебаний устанавливается в новом положении равновесия.

Открытие Шулером условия настройки (13.26) или (13.27) явилось большим достижением, имевшим важное значение для практического осуществления корабельных компасов. Не следует, однако, забывать, что при выводе условия настройки были сделаны многочисленные упрощения. Вопрос рассматривался в предположении, что

углы α и β малы,
нутации отсутствуют,
кинетический момент H велик,
компас не задемпфирован,
скорость объекта не очень велика, так что $v^T \ll R\omega^E$,

Земля имеет форму шара,
связь с плоскостью горизонта достигается смещением центра тяжести гиросистемы,
градиентом сил тяготения пренебрегают,
колебаниями гирокамеры вокруг оси, параллельной оси ротора, пренебрегают.

Более точная теория исследует влияние этих ранее неучтенных факторов и таким образом устанавливает границы применимости условия Шулера (см., например, Блюмин и Чичинадзе [87]). О влиянии этих упрощений, которое оказалось весьма существенным, еще пойдет речь в дальнейшем.

13.3.3. Погрешность на качке. При опытах с гироскопическими компасами обнаружились весьма значительные погрешности, причина которых заключается в возбуждаемых качкой колебаниях гирокамеры вокруг оси ротора. Речь идет об эффекте детектирования,

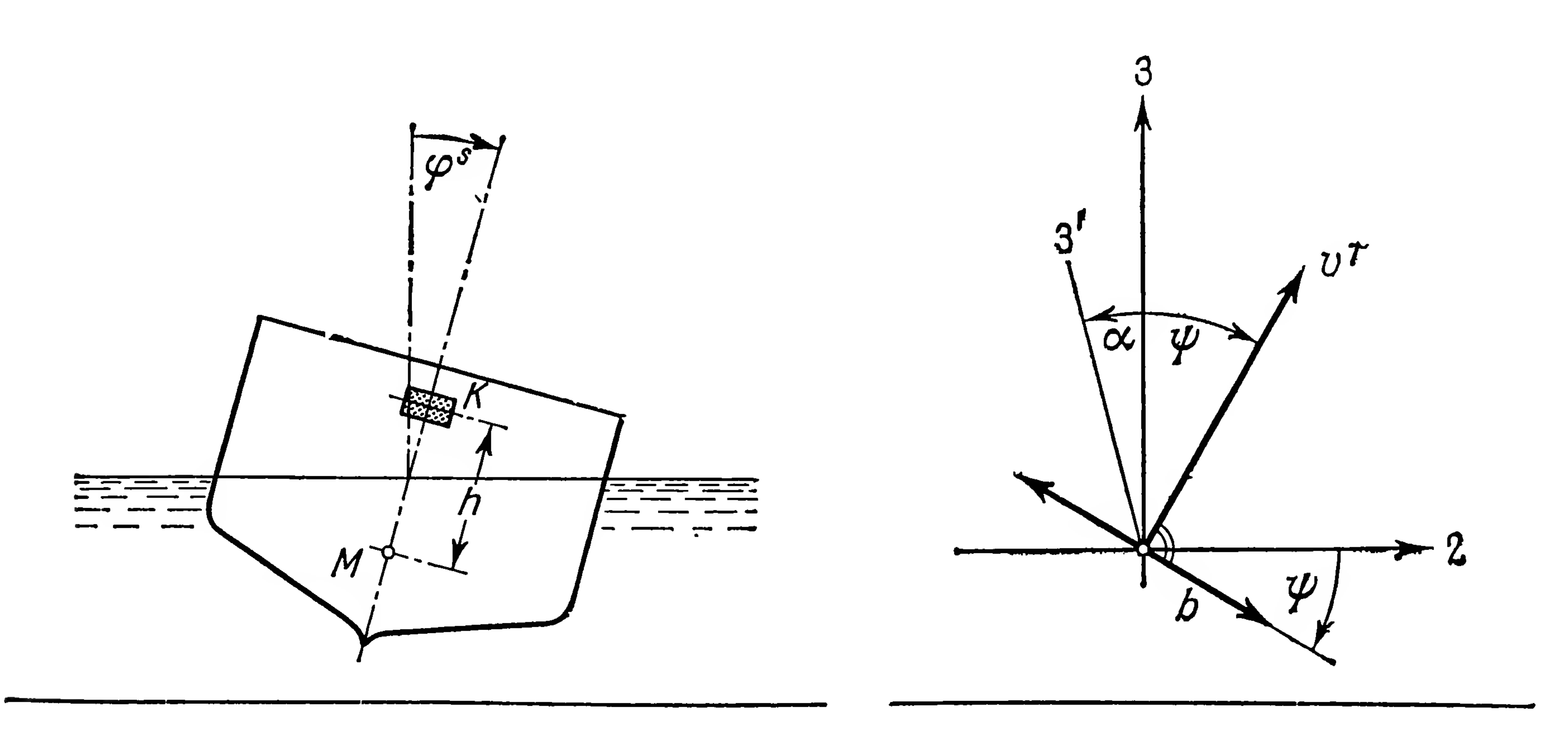


Рис. 13.10 Положение гирокомпаса K на качающемся корабле.

Рис. 13.11. Ускорение b, возникающее при качке.

подобном тому, который уже рассматривался в § 11.4 (Шулер [88]).

Положим, что корабль испытывает периодическую бортовую качку с амплитудой Φ и частотой ω_s:

$$\varphi^s = \Phi \sin \omega_s t. \tag{13.29}$$

Если компас K расположен на расстоянии h от оси качаний M (рис. 13.10), то он приобретает ускорение, направленное в основном горизонтально и равное

$$b = h\ddot{\varphi}^s = -h\Phi\omega_s^2 \sin \omega_s t = b_0 \sin \omega_s t. \tag{13.30}$$

Ускорение направлено перпендикулярно продольной оси корабля (рис. 13.11), его вертикальной составляющей b_1 можно пренебречь

по сравнению с ускорением g свободного падения. Так как гиросистема (ротор + плавающая сфера; см. рис. 13.4) в целом образует физический маятник, ускорения качки возбуждают ее вынужденные колебания. При этом сфера качается вокруг оси, проведенной через центр тяжести системы параллельно оси 3′ ротора. Если Θ_s — момент инерции относительно этой оси и если колебания сферы описывать малым углом γ, то уравнение движения будет

$$\Theta_s\ddot{\gamma} + Gs\gamma = \frac{G}{g} sb\cos(\alpha + \psi). \tag{13.31}$$

Введем собственную частоту

$$\omega_\gamma = \sqrt{Gs/\Theta_s}; \tag{13.32}$$

тогда (13.31) приведется к виду

$$\ddot{\gamma} + \omega_\gamma^2\gamma = \frac{b_0}{g}\omega_\gamma^2 \cos(\alpha + \psi)\sin\omega_s t. \tag{13.33}$$

Это уравнение имеет частное решение

$$\gamma = \frac{b_0\omega_\gamma^2 \cos(\alpha + \psi)}{g\left(\omega_\gamma^2 - \omega_s^2\right)} \sin\omega_s t, \tag{13.34}$$

которое представляет установившиеся вынужденные колебания компасной системы. При этих колебаниях центр тяжести гироско-

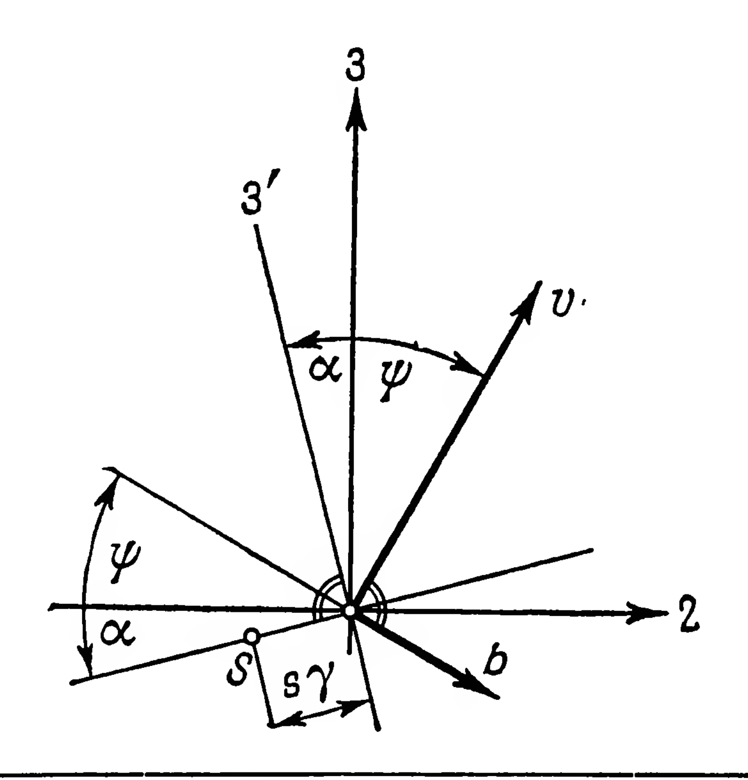


Рис. 13.12. К расчету момента, действующего на компас при качке.

пической системы отклоняется от вертикальной оси на отрезок длиной $s\gamma$ (рис. 13.12). Вследствие этого возникает момент относительно оси 1, величина которого

$$M_1 = -\frac{G}{g} bs\gamma \sin(\alpha + \psi) \tag{13.35}$$

должна учитываться в первом из уравнений компаса [например, в (13.7)]. С учетом (13.30) и (13.34) выражение (13.35) приводится к виду

$$M_1 = -\frac{Gsb_0^2\omega_\gamma^2 \sin 2(\alpha + \psi)}{2g^2\left(\omega_\gamma^2 - \omega_s^2\right)} \sin^2\omega_s t. \tag{13.36}$$

Интеграл этого момента за период качки не обращается в нуль. Среднее значение момента равно

$$\overline{M}_1 = M_{10} = -\frac{Gsb_0^2\omega_\gamma^2 \sin 2(\alpha + \psi)}{4g^2\left(\omega_\gamma^2 - \omega_s^2\right)}. \tag{13.37}$$

Чтобы получить среднюю величину отклонения компаса, нужно этот средний момент, имеющий постоянное направление, приравнять, согласно (13.7), направляющему моменту компаса $H\omega^E \cos\varphi\alpha$:

$$H\omega^E \cos\varphi\alpha = -\frac{Gsb_0^2\omega_\gamma^2}{4g^2\left(\omega_\gamma^2 - \omega_s^2\right)}(\sin 2\alpha \cos 2\psi + \cos 2\alpha \sin 2\psi).$$

Положив $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ и $\cos 2\alpha \approx 1$, получаем, что погрешность на качке равна

$$\alpha^s = -\frac{Gsb_0^2\omega_\gamma^2 \sin 2\psi}{4g^2 H\omega^E \cos\varphi\left(\omega_\gamma^2 - \omega_s^2\right) + 2Gsb_0^2\omega_\gamma^2 \cos 2\psi}. \tag{13.38}$$

В общем случае $\omega_\gamma \ll \omega_s$; кроме того, чтобы погрешность оставалась малой, направляющий момент компаса должен быть значительно больше возмущающего момента; поэтому в качестве приближенного значения можно взять

$$\alpha^s \approx \frac{Gsb_0^2 \sin 2\psi}{4g^2 H\omega^E \cos\varphi}\,\frac{\omega_\gamma^2}{\omega_s^2}. \tag{13.39}$$

Погрешность, порождаемая качкой, обращается в нуль на главных курсах (когда $\psi = \pm n\pi/2$) и принимает максимальное значение на интеркардинальных курсах, т. е. при $\psi = \pi/4, 3\pi/4, \ldots$. Погрешность растет пропорционально квадрату ускорения качки, как это вообще свойственно эффекту детектирования.

Полученный здесь результат относится к чистой бортовой качке корабля. Часто встречается коническая качка корабля (наложение бортовой и килевой качек). Можно показать (Гейнрих [89]), что такая качка вызывает погрешность, в которой имеется составляющая, не зависящая от курса ψ.

Погрешность на качке можно уменьшить и даже устранить совсем, во много раз увеличив период маятниковых колебаний гирокамеры. Таким образом будет уменьшена величина ω_γ. Практически это достигается установкой дополнительного гироскопа. Так усовершенствование компаса привело к двух- и трехроторным

компасам, показавшим очень хорошие результаты. Особым вариантом двухроторного компаса является так называемый пространственный компас, который указывает не только направление на север, но и вертикаль места.

13.4. Пространственный компас

Пусть в плавающей сфере с осями 1, 2, 3, занимающими в ней неизменное положение (рис. 13.13), установлено два ротора таким образом, что они могут не только вращаться вокруг своих осей

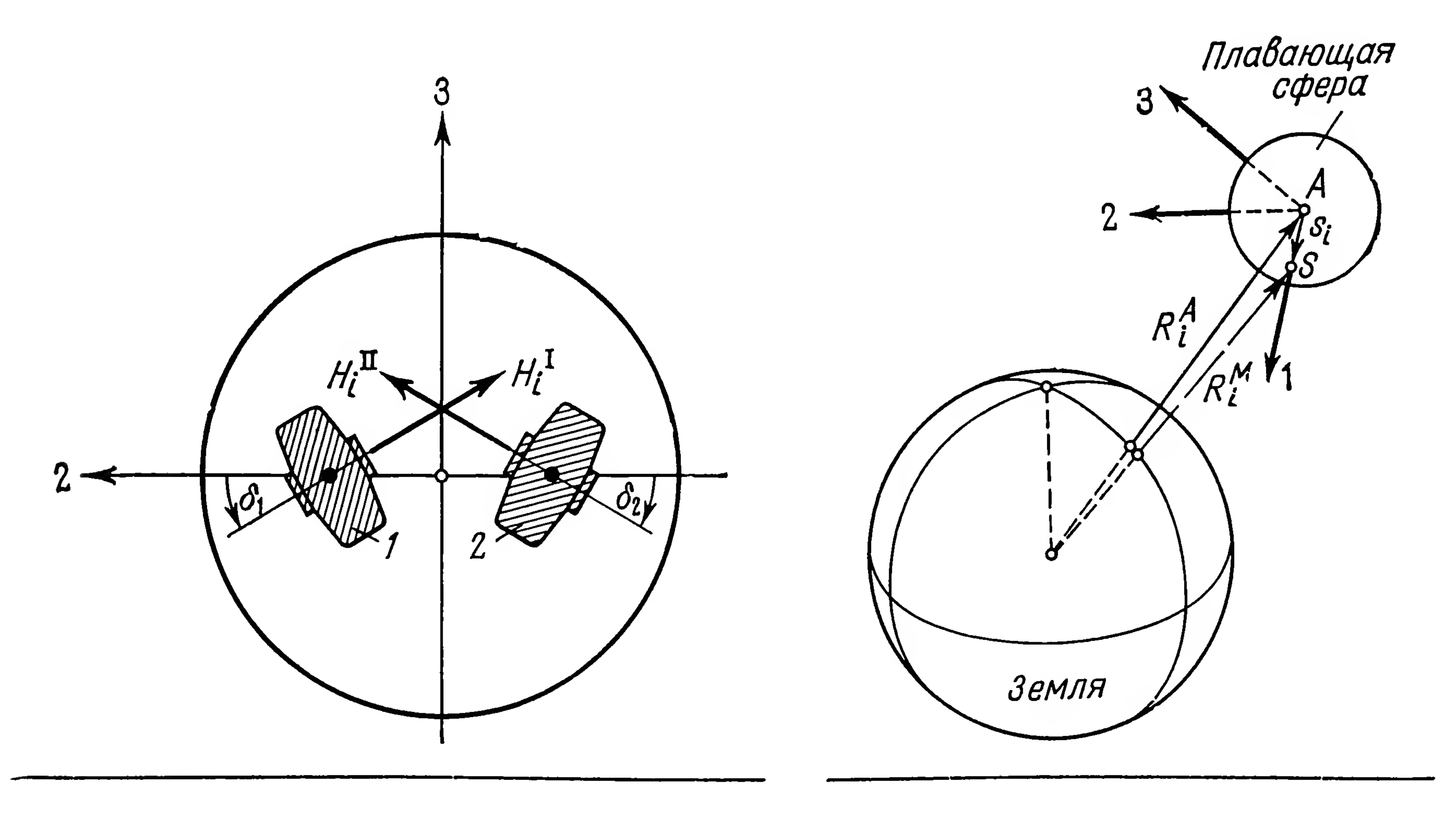


Рис. 13.13. Схема пространственного компаса.

Рис. 13.14. К исследованию пространственного компаса при движении его основания по поверхности Земли.

симметрии, но и колебаться вокруг параллельных направлению 1 осей гирокамер. С помощью рычажного механизма эти колебания связаны между собой так, что векторы кинетических моментов H_i^{I} и H_i^{II} гироскопов поворачиваются всегда на одинаковые углы $\delta_1 = \delta_2$. Кроме того, кожухи роторов удерживаются посредством пружин возле положения, соответствующего $\delta = 0$. Центр тяжести сферы смещен вдоль оси 1 на величину s, так что система, состоящая из сферы и роторов, образует физический маятник. Если орты осей 1, 2, 3 обозначить a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, то (рис. 13.14)

$$s_i = sa_{1i}. \tag{13.40}$$

Следуя Бауэрсфельду [90], мы покажем, что всю теорию пространственного компаса, включая ее конкретные результаты, можно изложить в векторной форме. Вместо принятых прежде угловых координат будем оперировать единичными векторами, направления

и изменения направлений которых рассчитываются с помощью имеющихся в нашем распоряжении динамических и кинематических уравнений.

Пусть точка A плавающей сферы, в которой приложена поддерживающая сила, может произвольным образом двигаться по Земле, принимаемой за шар. Место точки A определяется вектором R_i^A, проведенным из центра Земли. Положение центра масс M сферы зададим вектором R_i^M, который, следовательно, может быть представлен в виде

$$R_i^M = R_i^A + s a_{1i}. \tag{13.41}$$

Для составления исходных уравнений применим теперь теорему о количестве движения и трижды теорему о кинетическом моменте. Если m — общая масса гиросферы, то из теоремы о количестве движения следует

$$m\ddot{R}_i^M = F_i^A + F_i^G. \tag{13.42}$$

При этом

$$F_i^G = -mg\frac{R_i^M}{R^M} \tag{13.43}$$

является силой тяжести, а F_i^A — неизвестной поддерживающей силой. В компасе она осуществляется автоматически с помощью специального устройства (например, электромагнитного) и действует таким образом, что точка A движется заданным образом по поверхности Земли.

Для векторов H_i^{I} и H_i^{II} при постоянной величине H кинетического момента и единичных векторов e_i^{I} и e_i^{II} имеем

$$H_i^{\mathrm{I}} = He_i^{\mathrm{I}}, \quad H_i^{\mathrm{II}} = He_i^{\mathrm{II}}. \tag{13.44}$$

При большом кинетическом моменте гироскопов, который здесь следует предполагать, единичные вектора направлены вдоль осей симметрии роторов. Если пренебрегать кинетическими моментами гирокамер и, возможно, существующими демпфирующими моментами, то теорему об изменении кинетического момента всей сферы относительно ее центра масс M можно записать следующим образом:

$$H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} + \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) = M_i^M = -s\varepsilon_{ijk}a_{1j}F_k^A. \tag{13.45}$$

Далее применим теорему о кинетическом моменте для каждого из роторов, рассматривая моменты относительно центра масс ротора, лежащего на оси гирокамеры. При этом в качестве внешних моментов должны быть учтены: моменты M^K, направленные вдоль осей гирокамер, т. е. параллельные оси 1 и обеспечивающие выполнение равенства $\delta_1 = \delta_2$, моменты M^F, создаваемые пружинами и тоже параллельные оси 1, а также моменты сил, действующих

в подвесе камер, векторы которых M_i^{LI} и M_i^{LII} при отсутствии трения направлены перпендикулярно осям камер, так что

$$M_1^{LI} = M_1^{LII} = 0. \tag{13.46}$$

Таким образом, из теоремы о кинетическом моменте следует

$$\begin{aligned} H\dot{e}_i^{\mathrm{I}} &= a_{1i}\left(M^K + M^F\right) + M_i^{LI}, \\ H\dot{e}_i^{\mathrm{II}} &= a_{1i}\left(M^K - M^F\right) + M_i^{LII}. \end{aligned} \tag{13.47}$$

Цель дальнейших вычислений состоит в том, чтобы получить выражения, определяющие направления единичных векторов a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, причем на функцию $R_i^M(t)$, т. е. на закон движения компаса по поверхности Земли, мы не будем накладывать каких-либо ограничений. Вычисления могут быть проведены следующим образом.

Исключая силу F_i^A из (13.42) и (13.45) и учитывая (13.43), получаем

$$H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} + \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) = -\,ms\varepsilon_{ijk}a_{1j}\left(\ddot{R}_k^M + g\frac{R_k^M}{R^M}\right). \tag{13.48}$$

Складывая и вычитая уравнения (13.47), находим

$$\begin{aligned} H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} + \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) &= a_{1i}2M^K + M_i^{LI} + M_i^{LII}, \\ H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} - \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) &= a_{1i}2M^F + M_i^{LI} - M_i^{LII}. \end{aligned} \tag{13.49}$$

Ввиду связи, существующей между обеими гирокамерами, имеют место кинематические соотношения

$$\begin{aligned} e_i^{\mathrm{I}} + e_i^{\mathrm{II}} &= a_{3i}\,2\sin\delta, \\ e_i^{\mathrm{I}} - e_i^{\mathrm{II}} &= -\,a_{2i}\,2\cos\delta. \end{aligned} \tag{13.50}$$

Подставив эти значения векторов в (13.49), получим

$$\begin{aligned} H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} + \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) &= 2H\left(\dot{a}_{3i}\sin\delta + a_{3i}\dot{\delta}\cos\delta\right) = \\ &= a_{1i}2M^K + M_i^{LI} + M_i^{LII}, \\ H\left(\dot{e}_i^{\mathrm{I}} - \dot{e}_i^{\mathrm{II}}\right) &= 2H\left(-\,\dot{a}_{2i}\cos\delta + a_{2i}\dot{\delta}\sin\delta\right) = \\ &= a_{1i}2M^F + M_i^{LI} - M_i^{LII}. \end{aligned} \tag{13.51}$$

Из равенства (13.51/1) после умножения его скалярно на a_{1i} с учетом (13.46) следует [1])

$$0 = 2H\sin\delta\,\dot{a}_{3i}a_{1i} = 2M^K,$$

[1]) Скалярное произведение $H\left(\dot{e}^{\mathrm{I}} + \dot{e}^{\mathrm{II}}\right)\cdot a_{1i}$ обращается в нуль, так как оно равно моменту внешних по отношению к сфере сил относительно оси 1. — *Прим. ред.*

и далее, поскольку $\sin\delta \neq 0$,

$$M^K = 0 \quad \text{и} \quad \dot{a}_{3i}a_{1i} = 0. \tag{13.52}$$

В силу (13.51/2)

$$-2H\cos\delta\,\dot{a}_{2i}a_{1i} = 2M^F. \tag{13.53}$$

Из $a_{1i}\cdot a_{2i} = 0$ путем дифференцирования получаем соотношение $\dot{a}_{1i}a_{2i} + a_{1i}\dot{a}_{2i} = 0$, с помощью которого (13.53) может быть приведено к виду

$$\dot{a}_{2i}a_{1i} = -\frac{M^F}{H\cos\delta} = -\dot{a}_{1i}a_{2i}.$$

Отсюда, умножив на a_{2i}, получим

$$\dot{a}_{1i} = a_{2i}\frac{M^F}{H\cos\delta}. \tag{13.54}$$

Используем это соотношение для того, чтобы, исключив из (13.48) сумму $\dot{e}_i^{\mathrm{I}} + \dot{e}_i^{\mathrm{II}}$, прийти к уравнению относительно a_{1i}. С этой целью умножим (13.54) векторно на a_{1i}:

$$\varepsilon_{ijk}a_{1j}\dot{a}_{1k} = \varepsilon_{ijk}a_{1j}a_{2k}\frac{M^F}{H\cos\delta}.$$

Отсюда с учетом (13.50) и соотношения $\varepsilon_{ijk}a_{1j}a_{2k} = a_{3i}$ будет следовать

$$e_i^{\mathrm{I}} + e_i^{\mathrm{II}} = \frac{H\sin 2\delta}{M^F}\varepsilon_{ijk}a_{1j}\dot{a}_{1k}. \tag{13.55}$$

Потребуем теперь, чтобы в дальнейшем выполнялось равенство

$$M^F = f\sin 2\delta, \tag{13.56}$$

где f — некоторая постоянная. В пределах не слишком больших углов δ приборная реализация этого требования возможна, например, с помощью пружин, как это изображено на рис. 13.15.

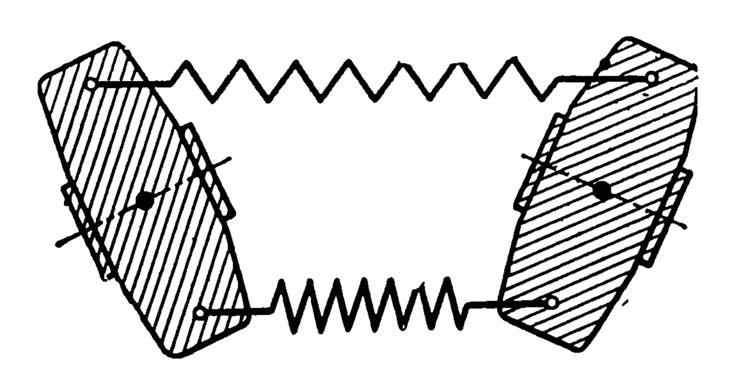


Рис. 13.15. Схема связи между гироскопами.

Искомое дифференциальное уравнение для a_{1i} получаем, подставляя (13.55) в (13.48) и учитывая (13.56):

$$\varepsilon_{ijk}a_{1j}\left[\frac{H^2}{f}\ddot{a}_{1k} + ms\left(\ddot{R}_k^M + g\frac{R_k^M}{R^M}\right)\right] = 0. \tag{13.57}$$

Покажем, что для этого уравнения может быть найдено частное решение

$$\frac{R_k^M}{R^M} = -a_{1k}, \quad R^M = \text{const}, \tag{13.58}$$

которое означает, что связанная со сферой ось 1 все время направлена по вертикали. Подстановка (13.58) в (13.57) дает

$$\varepsilon_{ijk} a_{1j} \left[\ddot{a}_{1k} \left(\frac{H^2}{f} - msR^M\right) - mgsa_{1k}\right] = 0,$$

или вследствие того, что $\varepsilon_{ijk} a_{1j} a_{1k} = 0$,

$$\varepsilon_{ijk} a_{1j} \left[\ddot{a}_{1k} \left(\frac{H^2}{f} - msR^M\right)\right] = 0. \tag{13.59}$$

Это равенство выполняется при любом ускорении $\ddot{R}_k^M = -R^M \ddot{a}_{1k}$, если величина H выбрана таким образом, что

$$H^2 = fmsR^M. \tag{13.60}$$

В силу этого при настройке системы согласно (13.60) ось 1 сферы остается вертикальной при любом законе движения объекта по поверхности Земли. Направление других осей получается из (13.54).

Если рассматривать сначала случай неподвижного относительно Земли компаса, то производная $\dot{a}_{1i}$ вертикального вектора в инерциальной системе отсчета будет всегда направлена на восток. Следовательно, в силу (13.54) вектор a_{2i} направлен на восток, вектор a_{3i} — на север. Таким оборазом, оси пространственного компаса, установленного на неподвижном основании, определенным образом ориентированы относительно Земли: они точно указывают направления к центру Земли, на восток и на север.

Когда основание прибора движется, изменяется лишь ориентация горизонтальных осей a_{2i} и a_{3i}. Они указывают направления, отклоненные на угол скоростной девиации от направлений на восток и север соответственно. Этот вывод сразу следует из (13.54), если учесть, что любое движение по земной поверхности может быть представлено как дополнительное вращение Земли. Скорость $\dot{\alpha}_{1i}$ направлена ввиду этого перпендикулярно к результирующей угловой скорости, горизонтальная проекция которой образует с меридианом угол, равный скоростной девиации. Этой ошибки, обусловленной самим принципом действия компаса, невозможно избежать и в пространственном компасе, но, конечно, она может быть вычислена и скомпенсирована.

Пространственный компас, настроенный в соответствии с соотношением (13.60), всегда устанавливается, не совершая колебаний, в положении, однозначно определяемом направлением вертикали и мгновенным значением скоростной девиации. Чтобы выяснить значение условия (13.60), рассмотрим малое возмущение d_i

по отношению к идеальному положению, соответствующему равенствам (13.58), положив

$$\frac{R_i^M}{R^M} = -a_{1i} + d_i. \tag{13.61}$$

Подставляя это выражение в (13.57) и учитывая (13.60) и соотношение $\varepsilon_{ijk}a_{1j}a_{1k} = 0$, получаем

$$\varepsilon_{ijk}a_{1j}\left[R^M\ddot{d}_k + gd_k\right] = 0. \tag{13.62}$$

Это равенство выполняется, если выражение в скобках равно нулю. Отсюда получаем векторное уравнение колебаний, период которых для каждой из компонент равен

$$T = 2\pi\sqrt{R^M/g} = 84{,}4 \text{ мин}, \tag{13.63}$$

т. е. равен периоду Шулера.

Можно аналогично тому, как это было сделано в п. 12.3.3, показать, что при быстро вращающемся гироскопе допустимо пренебречь градиентом сил тяготения. Следует, однако, зметить, что неколебательное частное решение (13.58) существует только при следующих начальных условиях:

$$R^M a_{1k}(0) = -R_k^M(0), \qquad R^M\dot{a}_{1k}(0) = -\dot{R}_k^M(0). \tag{13.64}$$

Поэтому после запуска компаса следует тщательно проследить, вполне ли затухли его собственные колебания, возбужденные разгоном роторов. Влияние возмущений на пространственный компас было исследовано многими авторами, например Бауэрсфельдом [90], Ишлинским [91], Ройтенбергом [11] и Христофом [92].

Глава 14

Стабилизирующие гироскопы. Сервогироскопы

Гироскопы могут применяться как для угловой стабилизации, так и для гашения колебаний, а также для формирования сервомоментов в позиционных системах управления В зависимости от принципа действия мы различаем гироскопические системы, осуществляющие непосредственную стабилизацию, при которой гироскопические моменты используются для прямой компенсации возмущающих моментов, и гироскопические стабилизаторы, осуществляющие ту же функцию посредством двигателей стабилизации.

Наконец, у сервогироскопа, выполненного, например, в виде гироскопа в кардановом подвесе, с одной из осей связан серводвигатель; действие его на гироскоп приводит к вращению рамки вокруг оси, перпендикулярной к упомянутой выше. Таким образом, с точки зрения теории регулирования сервогироскопы можно рассматривать как исполнительные звенья. Ниже мы займемся разбором некоторых примеров стабилизирующих гироскопов.

14.1. Непосредственные гироскопические стабилизаторы

Как на поучительный пример не оправдавшей себя конструкции стабилизирующего гироскопа сошлемся на предложенную Хоуэллом подводную торпеду. В этом устройстве в корпус торпеды вмонтирован гироскоп в виде большого маховика, ось которого совпадает с поперечной осью корпуса (рис. 14.1) и неподвижна относительно него. Таким образом. по отношению к корпусу торпеды ротор обладает одной степенью свободы. Кинетическая энергия ротора одновременно используется для поддержания движения расположенных в хвосте приводных винтов. При повороте торпеды вокруг продольной или нормальной оси (крен или рыскание) возникает весьма значительный гироскопический момент, который по замыслу должен был благоприятствовать стабилизации торпеды, а следовательно, и ее ходу. Однако, как показывает более точная теория (см. Граммель [3]), связанный с корпусом гироскоп не способен стабилизировать саму по себе неустойчивую торпеду.

Правда, если торпеда обладает собственной гидродинамической устойчивостью, то гироскоп может способствовать повышению последней. К существенному недостатку конструкции следует отнести то, что из-за гироскопических моментов возникает сильная взаимосвязь движений по рысканию и по крену, и поэтому всякое движение по крену влечет за собой отклонение по курсу.

В качестве примера удачной стабилизации с помощью гироскопов рассмотрим проверенную в различных вариантах *монорельсовую дорогу*. На рис. 14.2 схематически изображена одна из ее

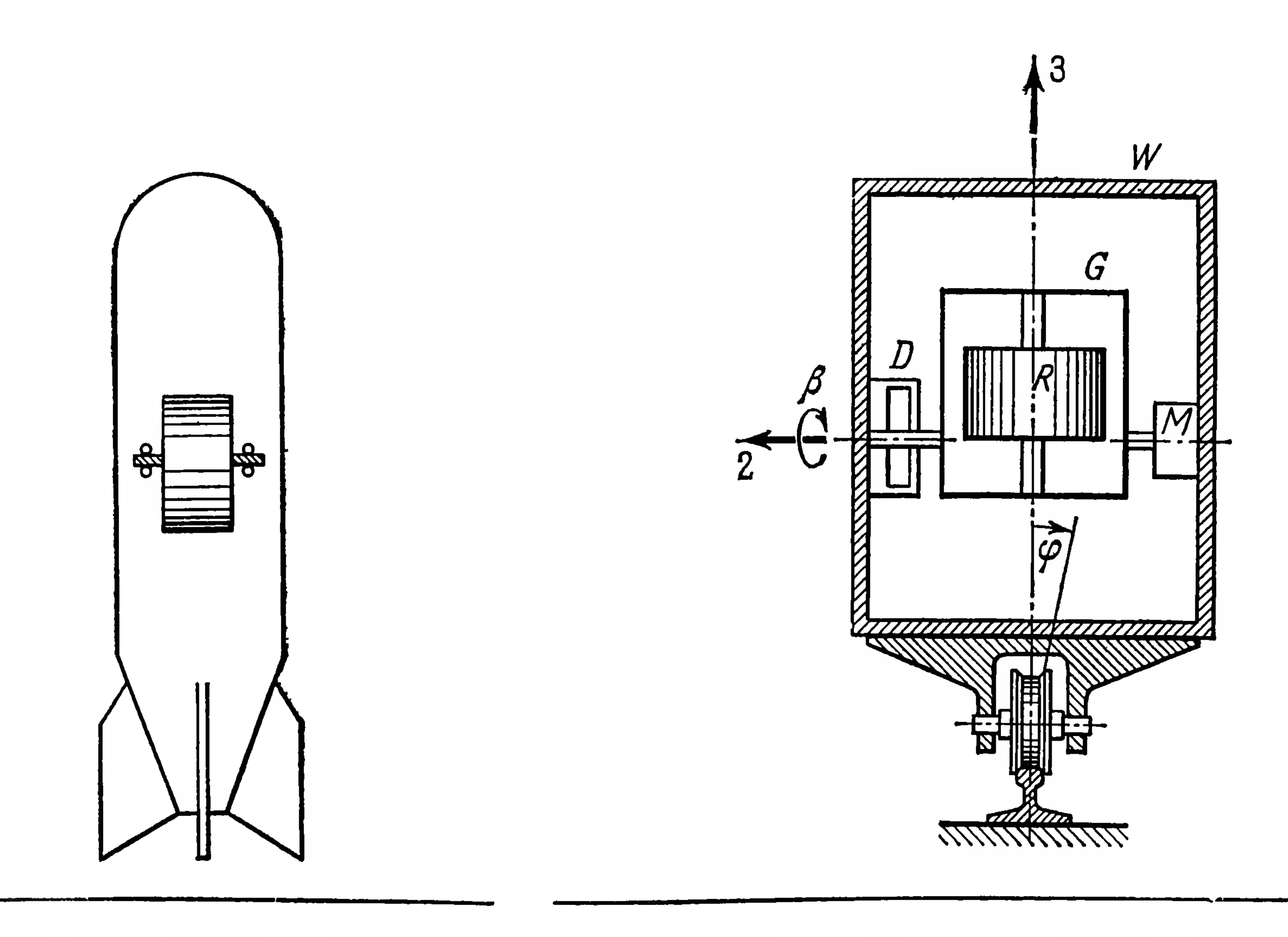


Рис. 14.1. Торпеда Хоуэлла в плане.

Рис. 14.2. Монорельсовая дорога со стабилизирующим гироскопом.

возможных конструкций. Ротор гироскопа R смонтирован в кожухе G (рама), который может качаться относительно вагона W вокруг перпендикулярной к направлению движения оси 2; в нормальном положении эта ось горизонтальна, а ось ротора вертикальна; центр тяжести ротора вместе с кожухом расположен выше оси 2. На упомянутые качания могут воздействовать демпфер D и двигатель M.

Обозначая наклон вагона, т. е. отклонение его нормальной оси от вертикали, через φ, а угол поворота кожуха гироскопа через β и считая эти углы малыми, мы можем записать линеаризованные уравнения движения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\ddot{\varphi} + H\dot{\beta} &= M_1, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\varphi} &= M_2, \end{aligned} \qquad (14.1)$$

где A — момент инерции вагона относительно оси, лежащей на поверхности рельса и параллельной поперечной оси вагона, а B — момент инерции кожуха вместе с ротором относительно оси 2.

Здесь нужно учесть следующие моменты внешних сил, объединенные обозначениями M_1 и M_2: относительно оси 1 — момент силы тяжести $M_1^S = c\varphi$ статически неустойчивого вагона, относительно оси качания гироскопа (ось 2) — момент силы тяжести $M_2^S = q\beta$ также статически неустойчивого кожуха (вместе с ротором), демпфирующий момент $M_2^D = -d\dot{\beta}$ и момент двигателя, который, как правило, управляется по углу φ. Мы будем считать этот момент линейным $M^M = k\varphi$. Подставив перечисленные выше моменты в (14.1), получим

$$\begin{aligned} &A\ddot{\varphi} - c\varphi + H\dot{\beta} = 0, \\ &B\ddot{\beta} + d\dot{\beta} - q\beta - H\dot{\varphi} - k\varphi = 0. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть найдено известными методами, нас же прежде всего интересует, при каких условиях движение системы будет устойчивым. Это можно определить по знакам коэффициентов и определителей Гурвица характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 - c & H\lambda \\ -H\lambda - k & B\lambda^2 + d\lambda - q \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^4 AB + \lambda^3 Ad + \lambda^2 (H^2 - qA - cB) + \lambda (kH - cd) + cq = 0. \tag{14.3}$$

Рассмотрим сначала частный случай $d = 0$ и $k = 0$ (демпфер и двигатель отключены). При этом (14.3) переходит в квадратное уравнение относительно λ^2, которое имеет чисто мнимые корни только в случае, когда

$$\begin{aligned} &1)\ H^2 - qA - cB > 0, \\ &2)\ cq > 0, \\ &3)\ (H^2 - qA - cB)^2 - 4ABcq > 0. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Неравенство (14.4/3) при соблюдении (14.4/2) сильнее неравенства (14.4/1) и при достаточно большом кинетическом моменте всегда удовлетворяется. Из (14.4/2) видно, что независимо от величины кинетического момента устойчивое движение возможно только при статически неустойчивом гироскопе ($q > 0$). Система в этом случае соответствует гироскопу Лагранжа с верхним расположением центра тяжести (п. 3.3.2).

Полученный результат согласуется с теоремой 8 п. 5.2.2, согласно которой устойчивое движение может быть обеспечено лишь при четном числе неустойчивых степеней свободы. Правда, как следует из теоремы 11 п. 5.2.2, при наличии затухания устойчи-

вость нарушается. Это видно непосредственно из (14.3): при $d > 0$ и $k = 0$ коэффициент при λ оказывается отрицательным. Поэтому для устойчивости монорельсовой дороги должно быть $k > 0$.

В общем случае (т. е. при d и k, отличных от нуля) к условиям (14.4/1) и (14.4/2) добавляются еще следующие:

$$
\begin{aligned}
&4)\ kH - cd > 0,\\
&5)\ D^{II} = Ad(H^2 - qA - cB) - AB(kH - cd) > 0,\\
&6)\ D^{III} = (kH - cd)D^{II} - A^2d^2cq > 0.
\end{aligned}
\tag{14.5}
$$

Так как при $cq > 0$ и $D^{III} > 0$ всегда имеет место $D^{II} > 0$, в дальнейшем условие 5 можно опустить. Если требуется, чтобы определитель Гурвица D^{III} оставался положительным, то, как показывают условия (14.5), произведение kH должно превышать определенное минимальное значение, которое, однако, само по себе не должно быть чрезмерно большим. Слишком сильное демпфирование также может оказать вредное влияние; с другой стороны, $d = 0$ неизбежно ведет к неустойчивости, так как при этом коэффициент при λ^3 в (14.3) обращается в нуль. Допустимые значения параметров конкретной системы следует определять на основе анализа всей совокупности условий устойчивости.

Нашли себе применение также и отличные от линейной функции управления двигателем (Граммель [3]). Влияние нелинейности характеристики двигателя, с которой нередко приходится встречаться, исследовано в [93].

Известные трудности могут возникнуть при движении вагона монорельсовой дороги по кривой. Это можно установить при помощи дифференциальных уравнений в системе координат, связанной с траекторией движения. Если $\Omega_i = (0, 0, \Omega_3)$ — вектор угловой скорости вращения этой системы координат, то вместо (14.2) [см. вывод системы уравнений (10.2)] мы получим следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&A\ddot{\varphi} + H\dot{\beta} + (H\Omega_3 - c)\varphi = 0,\\
&B\ddot{\beta} + d\dot{\beta} + (H\Omega_3 - q)\beta - H\dot{\varphi} - k\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{14.6}
$$

Они отличаются от уравнений (14.2) только наличием $c - H\Omega_3$ вместо c и $q - H\Omega_3$ вместо q. Разумеется, условия устойчивости распространяются лишь на случай постоянного значения Ω_3. Тем не менее видно, что даже в этом случае движение по кривой отрицательно сказывается на устойчивости монорельсовой дороги. Действительно, здесь вместо (14.4/2) появляется необходимое условие устойчивости в виде

$$(c - H\Omega_3)(q - H\Omega_3) > 0.$$

Оно безусловно *не* удовлетворяется, если

$$c > H\Omega_3 > q. \tag{14.7}$$

Этот результат нетрудно объяснить физически. Если вагон поворачивается при движении по кривой в направлении вращения ротора ($\Omega_3 > 0$), то гироскопический момент, возникающий при переносном движении, стремится совместить ось ротора с вертикалью. Этот момент ослабляет действие моментов, обусловливающих статическую неустойчивость вагона и кожуха гироскопа. При соблюдении условия (14.7) момент $(H\Omega_3 - c)\varphi$ вагона останется опрокидывающим, тогда как соответствующий момент кожуха с ротором станет восстанавливающим.

Упомянутые вредные явления при движении по кривой могут быть устранены путем применения вместо одного двух соответствующим образом связанных друг с другом гироскопов, вращающихся в противоположных направлениях (Граммель [3]).

14.2. Гироскопический успокоитель

Если гироскоп монорельсовой дороги стабилизирует статически неустойчивую систему, то назначение совершенно аналогично устроенного *корабельного гироскопа* заключается в успокоении бортовой качки корабля, вызванной волнением моря. Принцип устройства корабельного гироскопа показан на рис. 14.3. Существенное

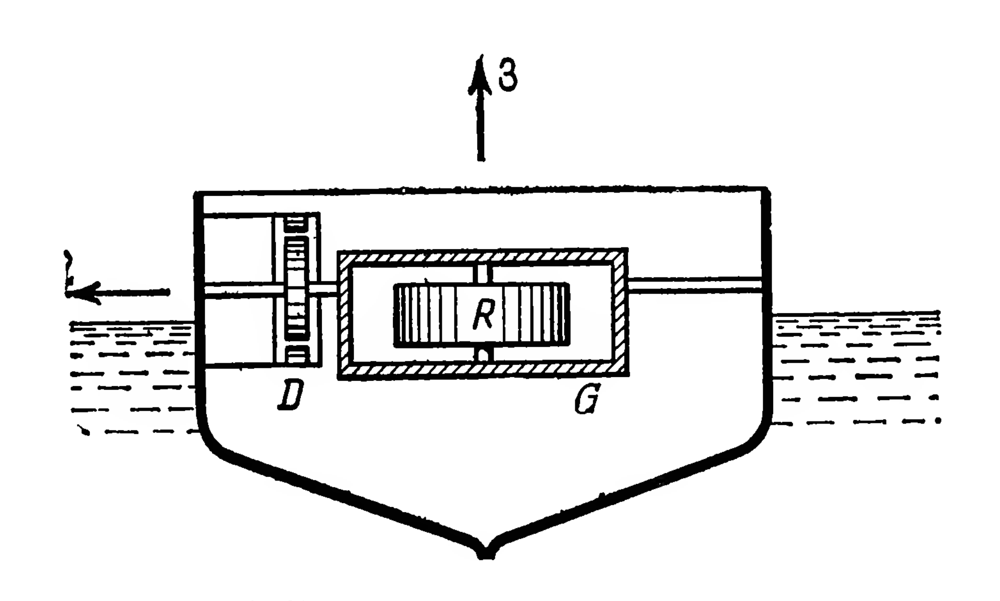


Рис. 14.3. Корабельный гироскоп для гашения бортовой качки.

отличие его от схемы монорельсовой дороги (рис. 14.2) заключается в том, что кожух гироскопа G с ротором R статически устойчив, т. е. подвешен так, что центр тяжести этой системы расположен ниже оси кожуха 2, параллельной поперечной оси корабля. Это необходимо для динамической устойчивости системы, так как в противном случае вследствие положительной метацентрической высоты корабля момент силы тяжести корабля оказался бы восстанавливающим, а момент силы тяжести кожуха — опрокидывающим.

Упрощенные уравнения движения корабля с гироскопом при малых углах бортовой качки φ и углах поворота кожуха β могут

быть написаны аналогично (14.2) в форме

$$\begin{aligned} &A\ddot{\varphi}+d_1\dot{\varphi}+c\varphi+H\dot{\beta}=E(t),\\ &B\ddot{\beta}+d_2\dot{\beta}+q\beta-H\dot{\varphi}=0. \end{aligned} \tag{14.8}$$

В них вследствие статической устойчивости системы знаки c и q изменены в сравнении с (14.2); кроме того, учтены демпфирование по крену (d_1) и возмущающий момент ($E(t)$), порожденный волнением моря. Датчик момента по оси кожуха здесь отсутствует ($k=0$), хотя в практически осуществленных устройствах он обычно имеется (его можно использовать для активного воздействия на корабль при бортовой качке, а также на циркуляции).

Задачей конструктора является выбрать параметры прибора — q (удельный момент относительно оси кожуха) и d_2 (демпфирование относительно оси кожуха) — так, чтобы достичь оптимального эффекта успокоения качки. Момент инерции B кожуха вместе с ротором, а также величина H кинетического момента зачастую обусловлены требованием возможно лучшего функционирования устройства при минимальном его весе. Основные принципы настройки мы изложим, следуя Ганкамму [94]. При этом будем исходить из уравнений движения (14.8) с гармонической возмущающей функцией

$$E(t)=E_0\cos\omega t. \tag{14.9}$$

Отыскивая решения уравнений также в виде гармонических функций

$$\varphi=\varphi_A\cos(\omega t-\psi), \qquad \beta=\beta_A\cos(\omega t-\chi), \tag{14.10}$$

находим известными методами амплитуды вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} &\varphi_A^2=\frac{1}{N}E_0^2\left[(q-B\omega^2)^2+d_2^2\omega^2\right],\\ &\beta_A^2=\frac{1}{N}E_0^2H^2\omega^2, \end{aligned} \tag{14.11}$$

где

$$N=[(c-A\omega^2)(q-B\omega^2)-\omega^2(H^2+d_1d_2)]^2+\\ +\omega^2[d_1(q-B\omega^2)+d_2(c-A\omega^2)]^2.$$

О демпфирующем эффекте гироскопа можно судить по амплитудной характеристике $\varphi_A(\omega)$. Основные свойства последней лучше всего выявляются, если пренебречь сопротивлением корабля по крену ($d_1=0$) и варьировать удельный момент вязкого трения d_2 относительно оси кожуха. В предельном случае недемпфированного кожуха получаем

$$d_2=0:\ \varphi_A^2=\frac{E_0^2(q-B\omega^2)^2}{[(c-A\omega^2)(q-B\omega^2)-H^2\omega^2]^2}. \tag{14.12}$$

График функции $\varphi_A(\omega)$ представлен на рис. 14.4. Он имеет разрывы при частотах

$$\left.\begin{matrix}\omega^N\\ \omega^P\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{H^2 + cB + qA}{2AB}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4cqAB}{(H^2 + cB + qA)^2}}\right]}, \qquad (14.13)$$

которые можно назвать частотами нутации и прецессии соответственно. Поскольку $(cB + qA)^2 > 4cqAB$, эти частоты всегда выражаются действительными числами. Следует отметить нуль функции $\varphi_A(\omega)$ при частоте

$$\omega^K = \sqrt{q/B}, \qquad (14.14)$$

соответствующей частоте собственных маятниковых колебаний невращающегося гироскопа. Используя это обстоятельство, можно было бы при приблизительно постоянной частоте возмущения ω достичь эффективного гашения колебаний. В случае волнения моря не приходится ожидать постоянной ω, но специальная настройка согласно (14.14) все же имеет практическое значение для аналогично действующих гироскопических успокоителей крутильных колебаний. Ниже мы еще коснемся этого вопроса.

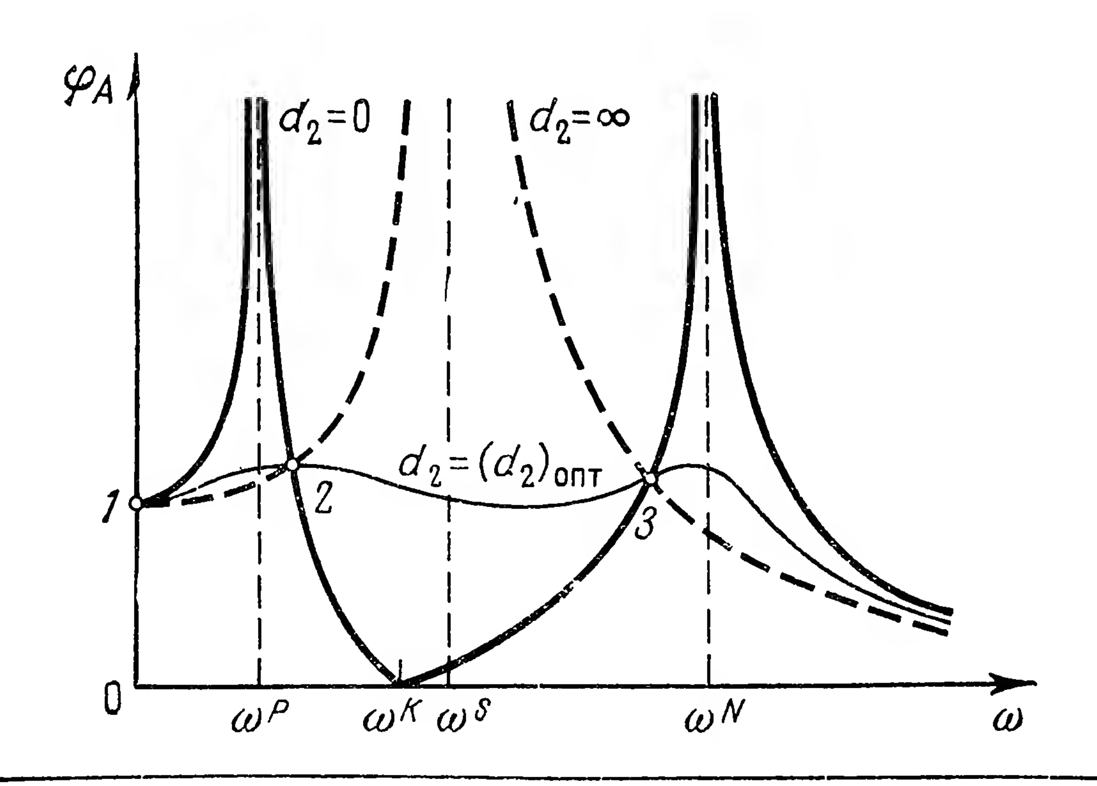


Рис. 14.4. Амплитудные характеристики бортовой качки корабля при различном демпфировании.

В другом предельном случае заторможенного кожуха мы получаем просто амплитудную характеристику качки корабля. Полагая $d_2 \to \infty$, имеем

$$d_2 \to \infty\colon\ \varphi_A^2 = \left(\frac{E_0}{c - A\omega^2}\right)^2. \qquad (14.15)$$

Соответствующая этому случаю амплитудная характеристика проведена на рис. 14.4 штриховой линией. Ее разрыв соответствует частоте собственных колебаний корабля по крену

$$\omega^s = \sqrt{c/A}. \qquad (14.16)$$

Оба предельных случая — отсутствие демпфирования и бесконечно большое демпфирование d_2 по оси кожуха — не представляют практического интереса, однако даже соответствующие амплитудные характеристики могут оказаться источником важных сведений. Именно, точки пересечения *1*, *2*, *3* этих кривых не зависят от d_2, и поэтому все амплитудные характеристики для других значений d_2 также проходят через эти точки. Действительно, если мы потребуем, чтобы

$$\frac{d\left(\varphi_A^2\right)}{d\left(d_2^2\right)} = 0, \tag{14.17}$$

то из (14.11), полагая $d_1 = 0$, придем к условию

$$H^2\omega^4\left[H^2\omega^2 - 2(c - A\omega^2)(q - B\omega^2)\right] = 0,$$

которое дает три значения для абсцисс упомянутых *неизменных точек*:

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 = 0,$$

$$\left.\begin{matrix}\omega_{\mathrm{II}}^2\\ \omega_{\mathrm{III}}^2\end{matrix}\right\} = \frac{H^2 + 2cB + 2qA}{4AB}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16cqAB}{(H^2 + 2cB + 2qA)^2}}\right]. \tag{14.18}$$

Следовательно, амплитудные характеристики $\varphi_A(\omega)$ корабля не могут пройти ниже отмеченных на рис. 14.4 неизменных точек *1*, *2*, *3*. Оптимум достигается в том случае, когда один из максимумов $\varphi_A(\omega)$ совпадает с наивысшей неизменной точкой. Такого рода кривая проведена на рис. 14.4 тонкой линией. Соответствующее ей значение d_2 мы найдем, подставляя ω_{II} (или ω_{III}) в условие для экстремума, вытекающее из равенства

$$\frac{d\left(\varphi_A^2\right)}{d\omega^2} = 0.$$

При этом получится квадратное уравнение относительно d_2^2, решение которого определяет $(d_2)_{\text{опт}}$. Само собой разумеется, надо еще убедиться в том, что второй максимум кривой φ_A не расположен выше первого.

По виду кривых, представленных на рис. 14.4, можно заключить, что ордината неизменной точки *2* тем меньше, чем меньше значения ω^P и ω^K. Путем применения астатического подвеса кожуха ($q = 0$) обе эти частоты можно было бы даже обратить в нуль. В этом случае неизменные точки *1* и *2* совпали бы и оставалось бы только принять во внимание неизменную точку *3*. Ее ордината тем меньше, чем больше ω^N, т. е. чем больше кинетический момент H. Расчеты, произведенные для конкретных проектов, показывают, что амплитуду бортовой качки корабля можно снизить до 1/30 амплитуды качки корабля, не оборудованного гироскопом; при этом вес всей гироскопической установки, включая агрегат

питания, составляет приблизительно 1% веса корабля. Некоторые конструктивные подробности осуществленных установок описаны Ричардсоном [10].

Причину того, что установки с корабельным гироскопом не привились на кораблях, следует искать прежде всего в конструктивных трудностях, связанных с обменом энергией между гироскопом и кораблем, а также в поведении гироскопа на циркуляции. При циркуляции против направления вращения ротора возникающий гироскопический момент может свести на нет статическую устойчивость

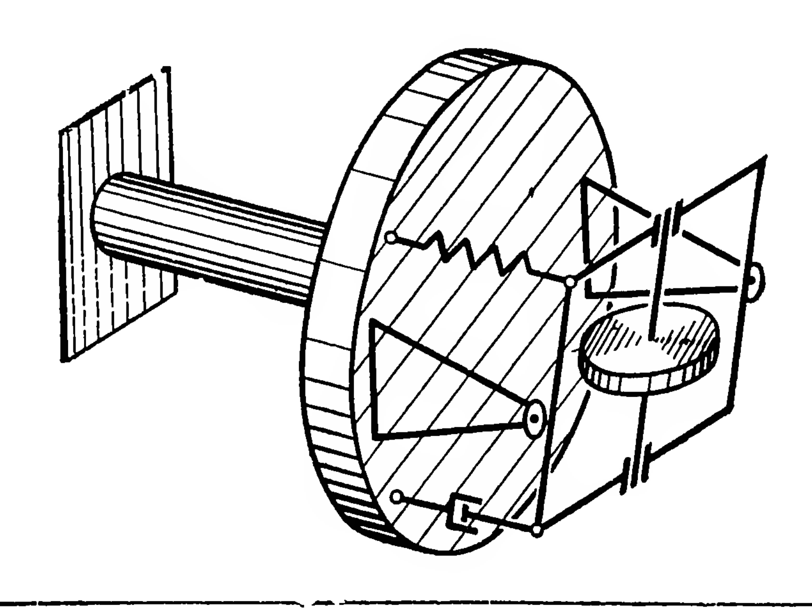


Рис. 14.5. Гироскопический успокоитель по Арнольду—Маундеру.

кожуха и дестабилизировать систему в целом (аналогичное явление было обнаружено при исследовании монорельсовой дороги). Эти трудности можно было бы обойти, связав с кожухом поворотный двигатель и обеспечив надлежащее управление развиваемым им моментом. Поворотный двигатель может быть использован также для того, чтобы активизируя установку с корабельным гироскопом, накладывать на корабль желаемые моменты. Таким способом удавалось, например, освобождать вмерзшие в лед корабли или воздействовать на крен. Но при этом гироскоп по существу выполняет функции сервогироскопа (§ 14.4) и уже не может быть причислен к гироскопическим успокоителям.

Следует еще упомянуть, что гироскопы нашли себе применение и в установках более позднего времени, предназначенных для успокоения бортовой качки. Однако в этом случае они служат лишь приборами для измерения угловой скорости или углового ускорения крена (см. гл. 15). Управляющий сигнал, сформированный на основе этих измерений, передается дальше на соответствующие исполнительные элементы. В качестве последних большей частью применяются регулируемые стабилизаторы (перья), которые при определенной их ориентации в потоке создают гидродинамические моменты относительно продольной оси.

Гироскопический успокоитель для гашения крутильных колебаний, принципиально идентичный корабельному гироскопу, описан

Арнольдом и Маундером [1]; см. рис. 14.5. Прибор был успешно применен для гашения самовозбуждающихся колебаний ползуна строгального станка. Это позволило в значительной мере избежать образования шероховатости на обрабатываемом изделии. В отличие от корабельного гироскопа у этого успокоителя восстанавливающий момент кожуха гироскопа создается с помощью пружин. Это позволило расширить область применения прибора и облегчить его настройку.

14.3. Силовые гироскопические стабилизаторы

Если возмущающий момент, действующий на стабилизированную или демпфированную с помощью гироскопов систему, компенсируется гироскопическим моментом, то гироскоп должен прецессировать с определенной угловой скоростью вокруг оси, перпендикулярной к вектору возмущающего момента и к оси ротора. При возмущающем моменте постоянного направления это приводит к отклонению гироскопа, выходящему за пределы нормальной рабочей зоны. Во избежание этого прибегают к помощи двигателей стабилизации, позволяющих удерживать гироскоп в нормальном среднем рабочем положении. Таким образом, в конечном счете возмущающий момент воспринимается двигателем стабилизации. Ниже мы рассмотрим некоторые типы силовых гироскопических стабилизаторов и исследуем их свойства.

14.3.1. Однороторный двухосный стабилизатор. На рис. 14.6 изображен гироскоп в кардановом подвесе, кожух которого может поворачиваться вокруг осей обеих рам. Сигналы, соответствующие названным поворотам, передаются через усилители на двигатели стабилизации, которые ликвидируют возникшее отклонение, заставляя гироскоп поворачиваться в противоположном направлении. Если, например, относительно оси 1 действует возмущающий момент M_1^S, то возникает прецессия вокруг оси 2; в результате образуется момент коррекции M_1^K, который определяется углом β и компенсирует возмущающий момент, препятствуя тем самым дальнейшему отклонению гироскопа.

Если моменты коррекции (стабилизации) пропорциональны углам поворота, то в предположении идеально функционирующих цепей стабилизации можно принять

$$M_1^K = -k_1\beta, \qquad M_2^K = k_2\alpha. \tag{14.19}$$

При учете пропорциональных скорости демпфирующих моментов относительно обеих осей уравнения движения стабилизатора для малых углов отклонения можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1^S - d_1\dot{\alpha} - k_1\beta, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= M_2^S - d_2\dot{\beta} + k_2\alpha. \end{aligned} \tag{14.20}$$

В зависимости от характера возмущающих функций $M_1^S(t)$ и $M_2^S(t)$ получаются различные решения уравнений движения, которые могут быть найдены с помощью вычислительных машин. Однако можно получить некоторое представление о действии стабилизатора, рассматривая его поведение при постоянных возмущающих моментах, а также исследуя его устойчивость. К этому мы и обратимся.

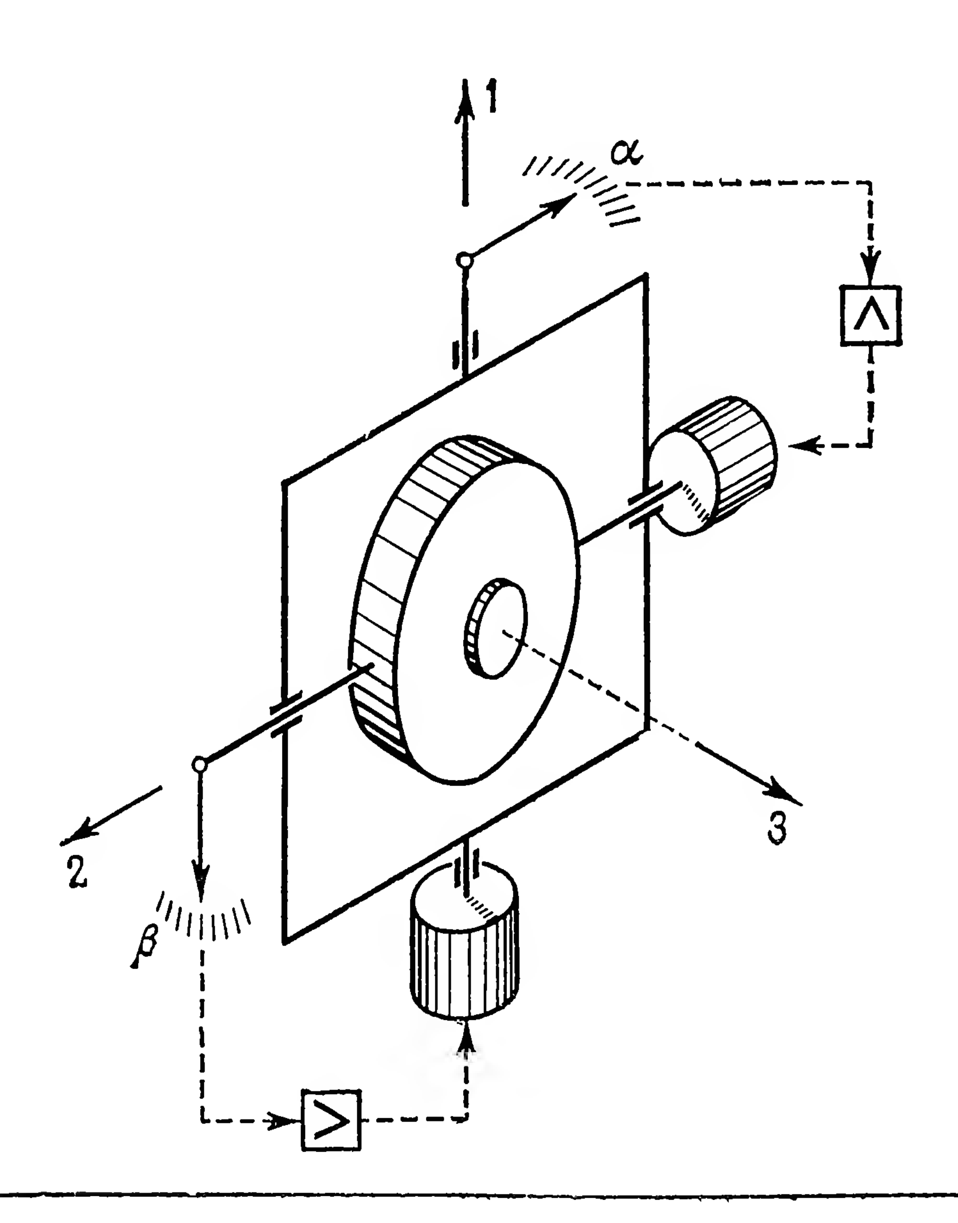


Рис. 14.6. Однороторный двухосный стабилизатор.

При $M_1^S = M_{10}^S$ и $M_2^S = M_{20}^S$ уравнения (14.20) имеют стационарное решение

$$\alpha = \alpha_0 = -\frac{M_{20}^S}{k_2}, \qquad \beta = \beta_0 = \frac{M_{10}^S}{k_1}. \tag{14.21}$$

Выбирая большие значения коэффициентов усиления k_1 и k_2, можно получить малые углы отклонения. Однако, как мы увидим ниже, здесь существуют определенные пределы, обусловленные соображениями устойчивости. Преимущество замкнутого канала стабилизации (со стабилизирующим двигателем) легко заметить, сравнивая (14.21) со стационарным решением системы (14.20) при выключенной стабилизации ($k_1 = k_2 = 0$):

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 = \frac{M_{10}^S d_2 - M_{20}^S H}{H^2 + d_1 d_2}, \qquad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 = \frac{M_{20}^S d_1 + M_{10}^S H}{H^2 + d_1 d_2}. \tag{14.22}$$

В последнем случае реакция гироскопа на возмущающий момент выражается в *скорости* отклонения, тогда как при включенной стабилизации, напротив, в *угле* отклонения.

Отношение возмущающего момента к обусловленному им углу отклонения называют *жесткостью* стабилизатора. В разобранном выше случае (14.21) жесткость совпадает с коэффициентом усиления. При неидеальных цепях стабилизации жесткость может выражаться более сложной функцией и следует учитывать зависимость соответствующего ей передаточного отношения от частоты.

Вопрос об устойчивости стабилизатора можно выяснить, исходя из уравнений (14.20) при $M_1^S = M_2^S = 0$; характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\lambda^4 AB + \lambda^3 (Ad_2 + Bd_1) + \lambda^2 (H^2 + d_1 d_2) + \lambda H (k_1 + k_2) + k_1 k_2 = 0. \tag{14.23}$$

Отсюда прежде всего можно заключить, что при отсутствии демпфирования ($d_1 = d_2 = 0$) стабилизатор неустойчив, так как коэффициент при λ^3 обращается в нуль, тогда как коэффициент при λ остается отличным от нуля. Это примечательный факт: он не может быть установлен при приближенных расчетах на основании упрощенных уравнений прецессионной теории. Действительно, если пренебречь инерционными членами и считать, что $d_1 = d_2 = 0$ или $d_1 d_2 \ll H^2$, то корнями остающегося квадратного уравнения будут

$$\lambda_1 = -\frac{k_1}{H}, \qquad \lambda_2 = -\frac{k_2}{H}. \tag{14.24}$$

Таким образом, создается впечатление асимптотической устойчивости, тогда как в действительности нутационные колебания, которыми мы пренебрегли, неустойчивы. Эти самовозбуждающиеся колебания гироскопических стабилизаторов на самом деле часто наблюдаются на практике.

То, что коэффициенты усиления не могут быть выбраны произвольно большими, видно из следующих условий устойчивости, согласно которым требуется, чтобы определители Гурвица D^{II} и D^{III} были положительными:

$$\begin{aligned} D^{II} &= (H^2 + d_1 d_2)(Ad_2 + Bd_1) - ABH(k_1 + k_2) > 0, \\ D^{III} &= H(k_1 + k_2) D^{II} - (Ad_2 + Bd_1)^2 k_1 k_2 > 0. \end{aligned} \tag{14.25}$$

Само собой разумеется, что устойчивость гироскопического стабилизатора можно повысить, вводя в цепь стабилизации корректирующие цепочки. Однако этого вопроса мы здесь касаться не будем, поскольку он относится к теории регулирования.

14.3.2. Влияние противоэлектродвижущей силы двигателя стабилизации. До сих пор мы предполагали, что компенсирующие моменты коррекции (14.19) зависят только от углов отклонения. Это

предположение с достаточно хорошим приближением оправдывается в случае непосредственной связи датчика момента с рамой карданова подвеса (без промежуточной передачи). Если же электродвигатель связан с кардановой рамой через какую-либо передачу, то в общем случае надо учитывать его противоэлектродвижущую силу. Она оказывает демпфирующее влияние и поэтому при соответствующем подборе параметров может сделать излишними специальные демпфирующие устройства.

Если пренебречь запаздыванием в нарастании тока, то компенсирующий момент относительно оси 1 можно считать равным

$$M_1^K = su, \tag{14.26}$$

где u — напряжение на двигателе, а s—коэффициент пропорциональности. Само напряжение в линейном приближении можно представить так:

$$u = -r\beta - d\dot{\alpha}. \tag{14.27}$$

Здесь d — коэффициент противоэлектродвижущей силы, в котором содержится также передаточное число $\varkappa$ привода. Произведение rs соответствует введенному выше коэффициенту усиления k_1. Если через $A = A^K + \varkappa^2 I$ обозначить суммарный момент инерции, складывающийся из момента инерции A^K гироскопа с кардановой рамой и приведенного момента инерции $\varkappa^2 I$ передачи, то уравнения движения одноосного стабилизатора с одним-единственным двигателем стабилизации при отсутствии возмущающих и демпфирующих моментов можно записать в форме

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} - su &= 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} \quad\quad &= 0, \\ u + r\beta + d\dot{\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{14.28}$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda\,[\lambda^3 AB + \lambda^2 B\,ds + \lambda H^2 + Hrs] = 0. \tag{14.29}$$

Корень $\lambda_1 = 0$ свидетельствует о безразличном положении равновесия системы по углу α. Остальные корни имеют отрицательные действительные части, если

$$D^{II} = HBs(Hd - Ar) > 0. \tag{14.30}$$

Этим определяется допустимое значение усиления r (или rs) при заданном d. При $d = 0$ стабилизатор совершает незатухающие колебания.

14.3.3. Влияние упругой податливости конструкции. У осуществленных стабилизаторов описанного типа (см., например, рис. 14.6) момент инерции A может достигать большой величины, так как внешняя рама выполняется обычно в виде платформы, несущей на себе

ряд элементов, к тому же добавляется еще приведенный момент инерции $\varkappa^2 I$ передачи. Вследствие этого при ускорениях возникают большие моменты, которые приводят к определенной деформации элементов конструкции (валов, подшипников, корпусов, рам). В этом случае угол α отклонения оси ротора отличается от угла φ отклонения платформы, т. е. внешней рамы. Если деформация является упругой, то момент, накладываемый гироскопом на раму и наоборот, может быть записан в виде $\pm c(\varphi-\alpha)$, где c — коэффициент жесткости. Выделяя из $A = A^K + A^P$ моменты инерции гироскопа A^K и платформы A^P, мы можем написать уравнения движения одноосного гироскопического стабилизатора при малых углах отклонения и отсутствии возмущения в виде

$$\begin{aligned} A^K\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= + c(\varphi - \alpha), \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= 0, \\ A^P\ddot{\varphi} &= M_1^K + c(\alpha - \varphi). \end{aligned} \tag{14.31}$$

В предельном случае $c \to \infty$ после сложения первого и третьего уравнений (14.31) в силу того, что $\varphi \to \alpha$, мы снова получим прежние уравнения движения.

Как показал Новожилов [95], при достаточно большом c систему (14.31) можно заменить упрощенной системой уравнений. При большом c в (14.31/1) можно пренебречь инерционным членом, после чего получим

$$H\dot{\beta} \approx c(\varphi - \alpha). \tag{14.32}$$

С другой стороны, при соответствующих начальных условиях из (14.31/2) следует

$$B\dot{\beta} = H\alpha.$$

Подставляя это выражение в (14.32), получаем соотношение между α и φ

$$\alpha = \varphi \frac{cB}{cB + H^2}, \tag{14.33}$$

из которого вытекает

$$c(\varphi - \alpha) = c^*\varphi, \tag{14.34}$$

где

$$c^* = \frac{cH^2}{cB + H^2} \tag{14.35}$$

— новый коэффициент жесткости. Пользуясь полученными результатами, мы можем заменить систему (14.31) следующими двумя приближенными уравнениями:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} - c^*\varphi &= 0, \\ A^P\ddot{\varphi} + c^*\varphi &= M_1^K. \end{aligned} \tag{14.36}$$

Из второго уравнения заключаем, что частота собственных колебаний платформы равна

$$\omega^P = \sqrt{\frac{c^*}{A^P}} = \sqrt{\frac{cH^2}{A^P(cB+H^2)}}. \qquad (14.37)$$

В качестве примера приложения приближенных уравнений (14.36) рассмотрим устойчивость одноосного стабилизатора, когда момент коррекции (14.26) подчиняется закону (14.27), в котором, однако, $\dot{\alpha}$ надо заменить на $\dot{\varphi}$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} - c^*\varphi &= 0, \\ A^P\ddot{\varphi} + c^*\varphi - su &= 0, \\ u + r\beta + d\dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \qquad (14.38)$$

Характеристическое уравнение этой системы является кубическим уравнением

$$\lambda^3 HA^P + \lambda^2 H\,ds + \lambda Hc^* + rsc^* = 0. \qquad (14.39)$$

Соответствующее условие устойчивости

$$D^{\text{II}} = Hsc^*(Hd - A^P r) > 0 \qquad (14.40)$$

приводит к требованию, подобному найденному выше условию (14.30) для абсолютно жесткого стабилизатора. В предельном случае $c \to \infty$ из (14.35) следует $c^* \to H^2/B$ и характеристические уравнения (14.29) и (14.39) полностью совпадают. Таким образом, при приближенном решении задачи выпадает лишь нулевой корень, который обычно не представляет интереса.

14.3.4. Двухроторные стабилизаторы. Наряду с однороторными гироскопическими стабилизаторами существует много типов двух- и многороторных стабилизаторов. Мы приведем два примера таких приборов, ограничившись лишь их описанием.

Гирорамой называется двухроторный стабилизатор, схематически изображенный на рис. 14.7. Приборы такого рода могут быть применены, например, для стабилизации платформ на качающемся корабле. Два одинаковых гироскопа смонтированы в общей внешней раме так, что оси их внутренних рам параллельны. Кожухи гироскопов связаны с помощью «спарника» (или зубчатых колес), позволяющего им поворачиваться только в противоположных направлениях на равные углы ($\beta^{\text{I}} = -\beta^{\text{II}}$). Роторы вращаются в противоположных направлениях, так что в основном положении гироскопов суммарный кинетический момент $H_l = H_l^{\text{I}} + H_l^{\text{II}} = 0$.

Если на внешнюю раму действует возмущающий момент M_1^S, то оба гироскопа прецессируют вокруг оси 2 и активизируют двигатель стабилизации, который создает компенсирующий момент M_1^K,

Таким образом, как и в случае однороторного стабилизатора, компенсирующий момент противодействует возмущающему моменту. Преимущество применения двух вращающихся в противоположных направлениях гироскопов заключается в том, что на подвижном основании гирорама ведет себя лучше однороторного стабилизатора. Пусть, например, основание вращается вокруг оси 2. Тогда рама следует за этим вращением, но при этом никакого поворота вокруг оси 1 не происходит. Моменты $H\dot{\beta}$ гироскопов имеют противоположные направления и взаимно уравновешиваются, лишь внешняя

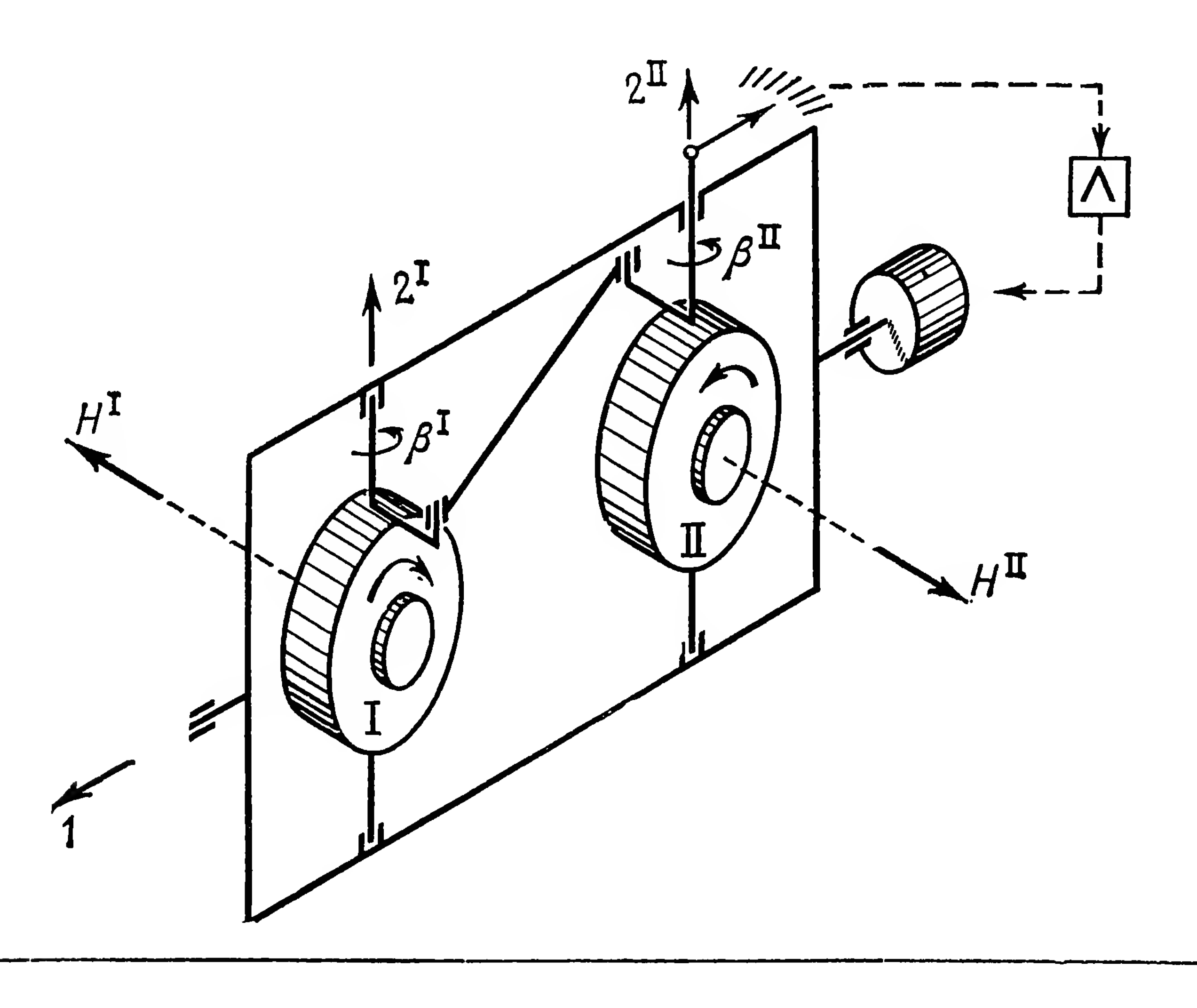


Рис. 14.7. Гирорама.

рама испытывает при этом скручивающие напряжения. При вращении основания вокруг оси 3 и отклоненных от основного положения гироскопах также могут возникнуть гироскопические моменты, под влиянием которых одноименно вращающийся гироскоп стремится повернуться в направлении к оси 3, а второй — от нее. Но и эти моменты не могут вызвать никаких последствий, так как вследствие принудительной связи кожухов они взаимно нейтрализуются и должны восприниматься внешней рамой или спарником.

Двухроторный двухосный стабилизатор изображен на рис. 14.8. Он содержит две рамы, с осями которых связаны двигатели стабилизации; на двигатели подаются сигналы, определяемые углами поворота обоих гироскопов вокруг осей кожухов. Опыты с приборами изображенного на рис. 14.8 типа показали, что такие стабилизаторы склонны к колебаниям, и поэтому для демпфирования системы должны быть приняты специальные меры. Действительно,

путем анализа характера движения Ишлинскому [96] удалось показать, что при прочих одинаковых параметрах приборов двухротор-

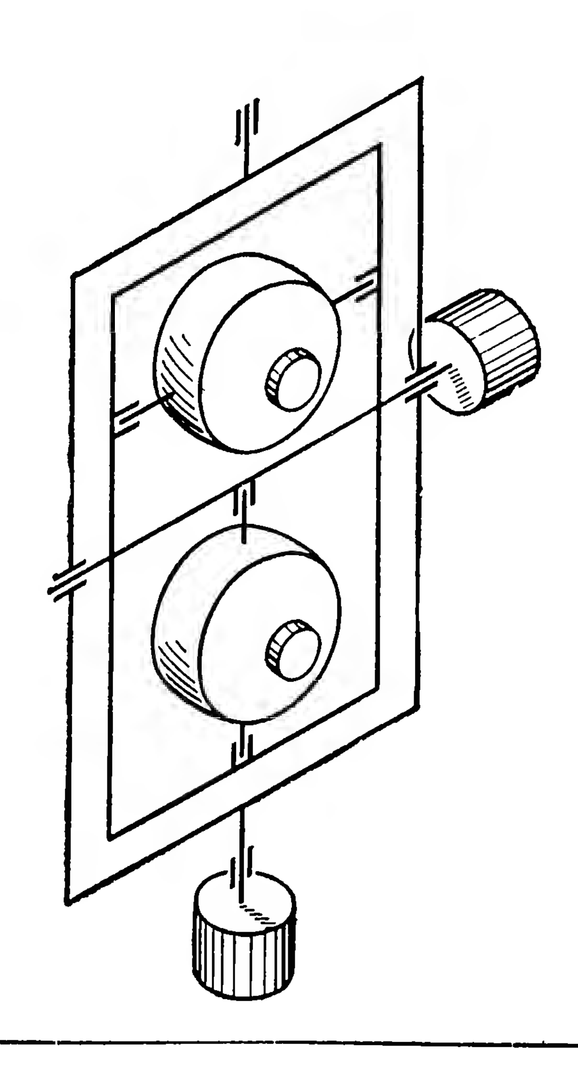


Рис. 14.8. Двухроторный двухосный стабилизатор.

ный стабилизатор, представленный на рис. 14.8, при противоположном вращении роторов всегда менее устойчив, чем соответствующий однороторный стабилизатор, представленный на рис. 14.6.

14.4. Сервогироскоп

Задача сервогироскопа заключается в том, чтобы накладывать на объект, в который он установлен, моменты заданной величины и заданного направления. Такие моменты используются, например, в *системах ориентации космических кораблей*. В этом случае сервогироскоп является одним из элементов в цепи системы ориентации; для анализа движения необходимо привлечь уравнения всех звеньев цепи регулирования. Так как при этом в зависимости от пределов регулирования, закона регулирования и различных возмущающих воздействий возможно большое число вариантов, мы ограничимся некоторыми общими замечаниями, которые относятся главным образом к принципу действия собственно сервогироскопа.

Прежде всего укажем простой пример гироскопического привода, который может быть применен, например, для приведения в действие колокола. При этом с помощью гироскопических сил создаются периодические моменты, которые возбуждают и поддерживают угловые колебания. Принципиальное устройство такого

сервогироскопа показано на рис. 14.9. Гироскоп смонтирован в кардановом подвесе и может беспрепятственно вращаться вокруг оси 2. Вращение его вокруг этой оси осуществляется двигателем M. При этом изменение направления вектора кинетического момента H_i приводит к возникновению гироскопического момента относительно оси 1, величину которого можно вычислить на основании уравнений движения.

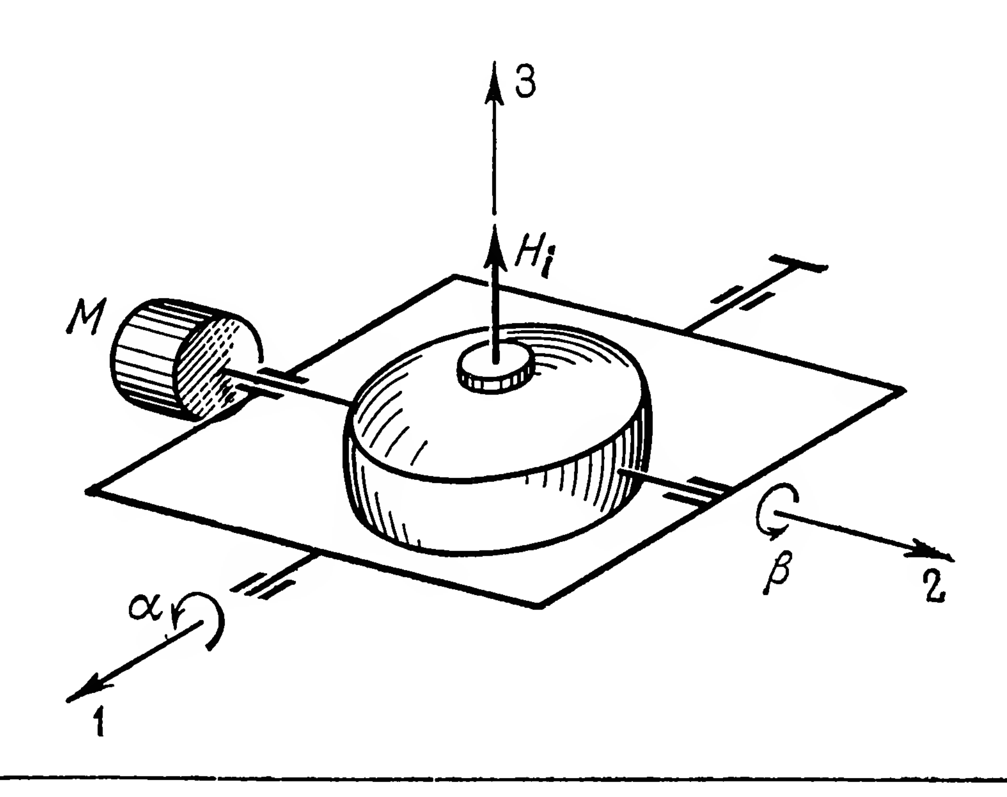


Рис. 14.9. Гироскопический привод для вибраторов.

Линеаризуя уравнения относительно угловых скоростей $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ (но не относительно угла β), получаем [см., например, уравнение (4.63)]

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\cos\beta\,\dot{\beta} &= M_1, \\ B\ddot{\beta} - H\cos\beta\,\dot{\alpha} &= M_2. \end{aligned} \tag{14.41}$$

Считая для простоты вынужденное вращение гироскопа равномерным ($\dot{\beta} = \Omega$), получаем гироскопический момент

$$M_1^{KR} = -H\Omega\cos\Omega t, \tag{14.42}$$

который может быть использован для приведения в действие связанной с осью 1 колебательной системы. Кажущийся окольным путь осуществления привода посредством гироскопа, а не непосредственно при помощи двигателя, имеет два преимущества: во-первых, однонаправленное вращение двигателя преобразуется непосредственно (т. е. без рычажных или зубчатых передач) в периодический момент, а во-вторых, это преобразование сопровождается усилительным эффектом. Двигателю приходится развивать момент, значительно меньший, чем максимальный момент относительно оси 1, который дается формулой (14.42). Если в установившемся режиме принять $\alpha = \alpha_A \cos(\Omega t - \varphi)$, то, кроме прочих моментов

сопротивления, двигатель должен дополнительно преодолевать гироскопический момент

$$M_2^K = -H\cos\beta\dot{\alpha} = H\Omega\alpha_A \sin(\Omega t - \varphi)\cos\Omega t. \qquad (14.43)$$

Его величина зависит от амплитуды α_A колебаний угла α. Отношение амплитуд моментов

$$\frac{(M_1^{KR})_{max}}{M_{2\,max}^K} = \frac{1}{\alpha_A} \qquad (14.44)$$

можно назвать коэффициентом усиления, причем α_A надо брать в дуговом измерении. Например, если $\alpha_A = 5{,}7°$, то получается десятикратное усиление по моменту. Эту закономерность можно рассматривать как своеобразный *закон рычага для моментов.*

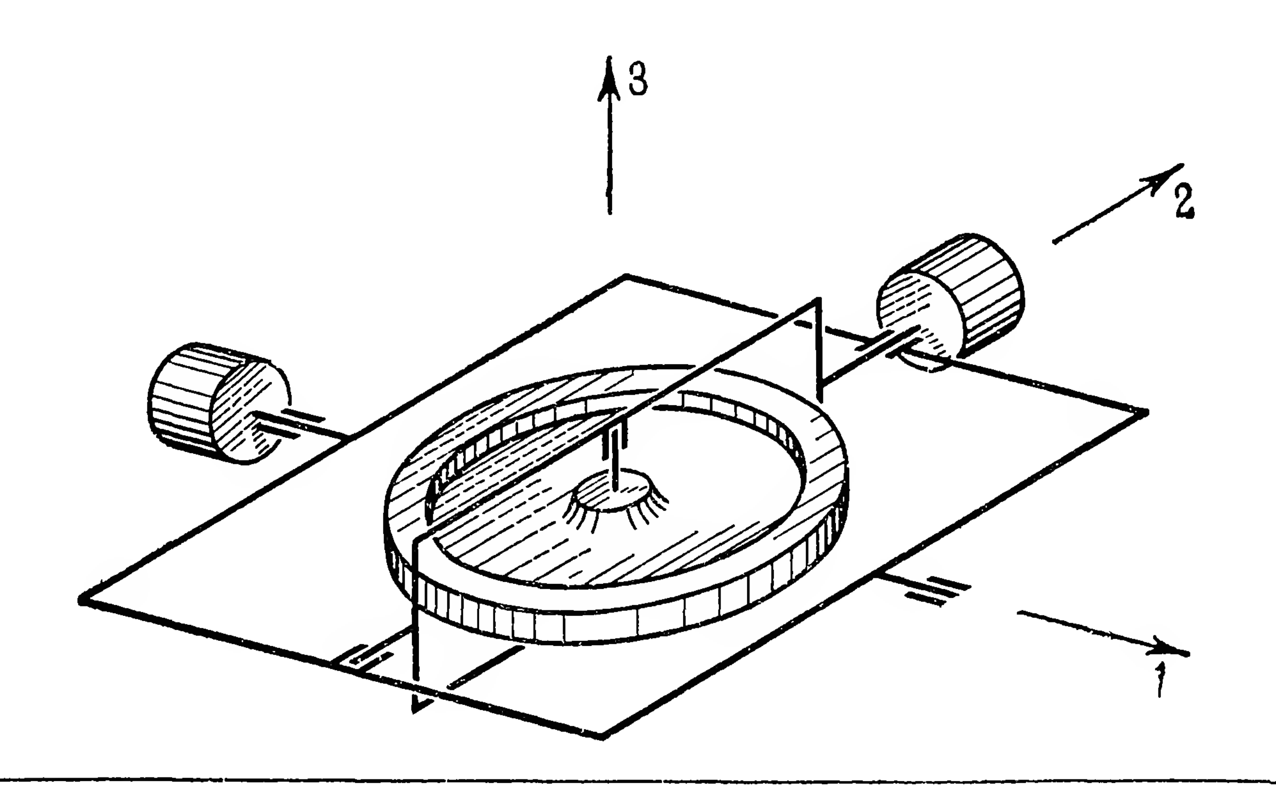


Рис. 14.10. Трехосный сервогироскоп.

При приведении в движение вибратора в зоне резонанса следует предусматривать не жесткое, а соответственно рассчитанное упругое соединение вибратора с осью 1. В этом случае внешняя рама сервогироскопа будет совершать в установившемся режиме лишь небольшие колебания по углу α, тогда как амплитуда самого вибратора вследствие резонанса может оказаться значительной.

В отличие от изображенного на рис. 14.9 сервогироскопа, который управляется только по одной оси, гироскоп, изображенный на рис. 14.10, управляется по трем осям. С помощью этого прибора можно создавать моменты относительно всех трех осей подвеса. В предположении неизменной ориентации носителя (космический корабль) и небольших отклонений гироскопа от нормального рабочего положения величины этих моментов будут равны

$$M_1 = -H\dot{\beta}, \quad M_2 = H\dot{\alpha}, \quad M_3 = -C^R\ddot{\gamma}. \qquad (14.45)$$

Гироскопическими можно назвать только сервомоменты M_1 и M_2, тогда как момент M_3 обусловлен лишь инерцией ускоряющегося или замедляющегося ротора. В космонавтике применяются оба типа генераторов момента (однако, как правило, на каждом объекте устанавливаются однотипные генераторы).

В действии *маховиков* или *шаров центробежного регулятора* также проявляется инерция вращающихся тел, но возникающие при этом случайные прецессионные моменты являются нежелательным побочным явлением. У собственно сервогироскопов (по-английски — control moment gyro) для создания момента используется изменение направления кинетической оси, а ускорение ротора не используется — величина кинетического момента поддерживается в них постоянной.

Хотя с помощью одного сервогироскопа можно создавать моменты относительно двух осей, в системах регулирования космических кораблей применяют по каждой оси отдельный сервогироскоп; это дает возможность легче справляться с взаимным влиянием отдельных каналов. При анализе движения космического корабля с системой ориентации, включающей в себя сервогироскопы, приходится иметь дело с системами уравнений, подобными тем, с которыми мы встречались выше при исследовании гиростатов (§ 4.1). В зависимости от типа сервогироскопа и программы регулирования здесь возможно большое число случаев, описание и расчет которых можно найти в обширной специальной литературе (см., например, Шинделин [97], Кэннон [98], Роберсон [99] или Летова [100]).

Глава 15

Поворотные гироскопы

Поворотные гироскопы являются, пожалуй, наиболее часто применяемыми и, вообще говоря, наиболее надежными гироскопическими приборами. Они служат прежде всего для измерения угловой скорости и поэтому иногда называются *гиротахометрами*. Принцип измерения можно трактовать как обращение прецессионного движения гироскопа: в то время как явление прецессии характеризуется тем, что момент вызывает угловую скорость — прецессионное движение, — у поворотного гироскопа следствием вынужденного вращения является момент. Этот момент может быть надлежащим образом компенсирован и измерен; измеренная величина является мерой угловой скорости вынужденного вращения.

Для качественного объяснения свойств поворотного гироскопа можно также привлечь правило Фуко об одноименном параллелизме осей вращения. Если быстровращающемуся гироскопу сообщить вынужденное вращение, то у него появится тенденция совместить свою кинетическую ось, которая практически совпадает с осью ротора, с осью вынужденного вращения, причем так, чтобы направление последнего совпадало с направлением вращения ротора.

15.1. Устройство и уравнения движения

Для расчетов поворотного гироскопа примем некоторую обобщенную модель, от которой путем тех или иных модификаций можно будет перейти к наиболее важным типам поворотных гироскопов. Рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе, показанный на рис. 15.1. Вращения внешней рамы вокруг оси 1 и внутренней рамы вокруг оси 2 стеснены упругой связью, создающей восстанавливающие моменты при отклонении рам от некоторого среднего (основного) положения[1]. Демпфирование системы осуществляется мо-

[1]) Следует иметь в виду, что здесь, как и в некоторых других местах книги, термин «связь» применяется не в том смысле, который принят в русской литературе по механике. В последней, как известно, связями называют ограничения, накладываемые на положения или скорости механической системы и, следовательно, обязательно уменьшающие число степеней свободы. В данном же случае «упругая связь» означает лишь наложение (с помощью пружин или каких-либо других устройств) «упругих» моментов, которое, конечно, не отражается на числе степеней свободы системы. — *Прим. ред.*

ментами, пропорциональными угловой скорости рам. В предположении, что

1) ротор симметричен,
2) в основном положении ($\alpha = \beta = 0$) главные оси ротора и рам совпадают с их геометрическими осями (т. е. отсутствует динамическая неуравновешенность),
3) центры тяжести расположены на осях (т. е. отсутствует статическая неуравновешенность),
4) рассматриваются лишь малые отклонения от основного положения $\alpha = \beta = 0$ (т. е. $\alpha, \beta \ll 1$),
5) кинетический момент H гироскопа постоянен,
6) угловая скорость системы координат 1, 2, 3 мала по сравнению с угловой скоростью ротора ($\Omega \ll \omega$),

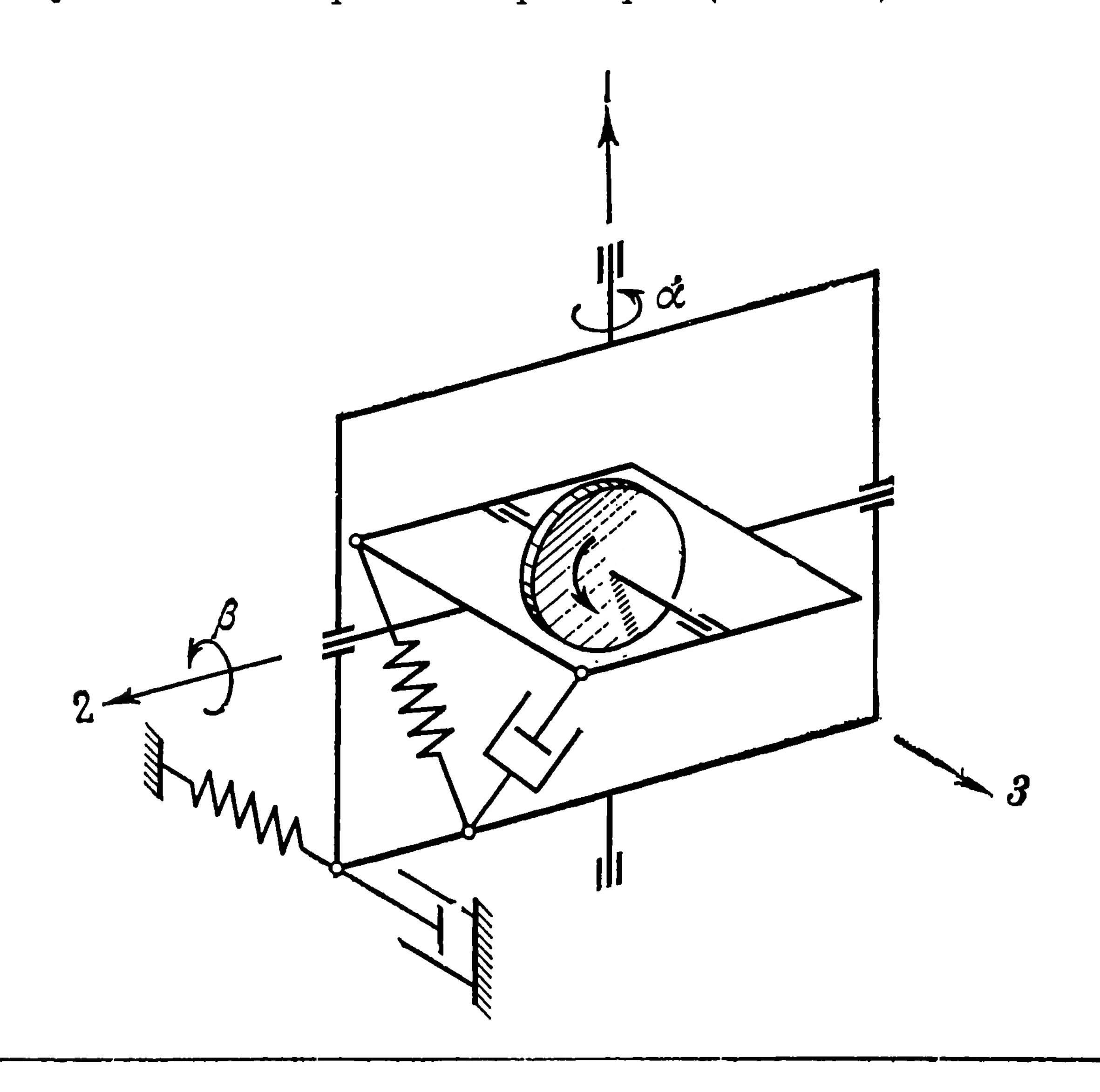


Рис. 15.1. Модель поворотного гироскопа: гироскоп в кардановом подвесе с восстанавливающими моментами и демпфированием относительно обеих осей.

мы можем воспользоваться уравнениями (10.22) и записать их в данном случае в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + d_1\dot{\alpha} + (c_1 + H\Omega_3)\,\alpha &= -A\dot{\Omega}_1 - H\Omega_2, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + d_2\dot{\beta} + (c_2 + H\Omega_3)\,\beta &= -B\dot{\Omega}_2 + H\Omega_1. \end{aligned} \tag{15.1}$$

При этом компоненты Ω_1, Ω_2, Ω_3 вектора угловой скорости объекта следует считать заданными функциями времени, так что в общем случае (15.1) является неоднородной системой уравнений с переменными коэффициентами. Для конкретных случаев решения уравнений, конечно, всегда могут быть найдены методом численного

интегрирования, однако получить из (15.1) представление об общих свойствах системы затруднительно. Поэтому в дальнейшем мы применим эти уравнения к частным видам поворотных гироскопов, представляющим технический интерес, отыщем и проанализируем соответствующие решения. Рассмотрим следующие типы поворотных гироскопов:

a) гироскопический тахометр (P-поворотный гироскоп), для которого $c_1 \to \infty$;
b) интегрирующий поворотный гироскоп (I-поворотный гироскоп), для которого $c_1 \to \infty$, $c_2 = 0$ и d_2 велико;
c) дважды интегрирующий поворотный гироскоп (I^2-поворотный гироскоп), для которого $c_1 \to \infty$, $c_2 = 0$, $d_2 = 0$;
d) дифференцирующий поворотный гироскоп (D-поворотный гироскоп), для которого c_1 велико;
e) *гироскоп с жесткой связью* (strap-down-gyro), для которого $c_1 \to \infty$, $c_2 \to \infty$.

15.2. Гироскопический тахометр (P-поворотный гироскоп)

В предельном случае жесткой связи по оси 1 имеем $c_1 \to \infty$ и $\alpha = 0$. Тогда от системы (15.1) остается только второе уравнение, в котором $H\dot{\alpha} = 0$. Если использовать неподвижную систему отсчета, то $\Omega_i = 0$ и уравнение движения переходит в следующее:

$$B\ddot{\beta} + d_2\dot{\beta} + c_2\beta = 0. \qquad (15.2)$$

Отсюда можно заключить, что собственные колебания $\beta(t)$ внутренней рамы не зависят от кинетического момента H. Однако такой вывод допустим только как приближение, так как даже ничтожные деформации могут иметь существенное значение. Из анализа, проведенного в п. 9.2.2, следует, что для отыскания собственных колебаний поворотного гироскопа в случае упругой податливости элементов конструкции нужно выражение $B = A^R + A^J + A^A$ заменить на $B + H^2/c_1$ [см. уравнение (9.21)]. Несмотря на то что c_1 велико, влиянием дополнительного слагаемого из-за наличия множителя H^2 пренебрегать нельзя. Тем не менее частота собственных колебаний практически выполненных поворотных гироскопов настолько высока (от 10 до 60 Гц) и колебания так быстро затухают, что в большинстве случаев переходным процессом можно пренебречь, т. е. считать процесс квазистатическим. Сказанное справедливо при дополнительном предположении, что обычно основная частота угловой скорости Ω объекта значительно ниже частоты собственных колебаний поворотного гироскопа. Для обычных угловых скоростей носителей (самолеты, космические корабли) это всегда подтверждается. Правда, при наличии вибраций такая посылка может оказаться неоправданной. Этого вопроса мы еще коснемся в § 15.5.

В предположении квазистатической системы, полагая $H\dot{\alpha} = 0$, мы находим из (15.1/2) показание гироскопического тахометра

$$\beta \approx \frac{H\Omega_1 - B\dot{\Omega}_2}{c_2 + H\Omega_3}. \tag{15.3}$$

Полученный результат свидетельствует, что в показание β входят все три составляющие угловой скорости Ω_i объекта. Однако анализ порядка величин отдельных членов показывает, что в подавляющем большинстве случаев можно принять $B\dot{\Omega}_2 \ll H\Omega_1$ и $H\Omega_3 \ll c_2$. Тогда получаем приближенное выражение

$$\beta \approx \frac{H}{c_2}\Omega_1. \tag{15.4}$$

Это выражение означает, что гироскопический и восстанавливающий моменты взаимно уравновешиваются. Угол β называется *выходной величиной* поворотного гироскопа, а ось внутренней рамы — *выходной осью*. Неподвижная относительно корпуса прибора ось 1 называется *входной* или *измерительной осью;* Ω_1 является *входной величиной*. В нулевом (основном) положении внутренней рамы входная и выходная ось и ось ротора взаимно перпендикулярны.

В результате проведенных нами рассуждений можно констатировать, что при указанных допущениях выходной угол β гироскопического тахометра пропорционален входной величине Ω_1. Чувствительность прибора определяется множителем H/c_2. При большом кинетическом моменте H и не слишком жесткой упругой связи внутренней рамы (малое c_2) можно добиться большой чувствительности. Предел этому кладет техническое несовершенство прибора, например сухое трение в подвесах рам. Тем не менее удалось построить настолько чувствительные гиротахометры, с помощью которых может быть доказано наличие угловой скорости Земли.

Гироскопические тахометры применяются на самолетах, главным образом для измерения угловой скорости виража. Следует отметить две связанные с этим особенности: зависимость выходной величины β, во-первых, от наклона самолета (угол крена φ), всегда сопровождающего вираж, и, во-вторых, от направления вращения ротора. Гироскопические тахометры обычно монтируются так, чтобы измерительная ось совпадала с нормальной осью самолета, а выходная — с его продольной осью. Тогда оси 1, 2, 3 гироскопа, показанные на рис. 15.1, соответствуют осям 3^F, 1^F, 2^F самолета, изображенным на рис. 9.1. Если самолет выполняет горизонтальный левый вираж, то вектор Ω_i направлен вертикально вверх (рис. 15.2). Ввиду наличия угла крена φ самолета координаты Ω_i в осях 1, 2, 3, связанных с корпусом прибора, а значит, и с самолетом, будут

$$\Omega_i = (\Omega\cos\varphi,\ 0,\ \Omega\sin\varphi). \tag{15.5}$$

Тогда, согласно (15.3), квазистатическое показание поворотного гироскопа

$$\beta \approx \frac{H\Omega \cos \varphi}{c_2 + H\Omega \sin \varphi} \approx \frac{H \cos \varphi}{c_2} \Omega. \tag{15.6}$$

Таким образом, показание зависит от наклона самолета, причем, поскольку $\cos \varphi \leqslant 1$, коэффициент пропорциональности между β и Ω оказывается заниженным. Но в действительности это занижение зависит не только от угла φ, но и от направления вращения гироскопа. Это видно из того, что гироскопический момент

$$M_i^K = -\varepsilon_{ijk}\Omega_j H_k \tag{15.7}$$

имеет значение

$$M^K = M_2^K = H\Omega \sin(\pi/2 - \varphi - \beta) = H\Omega \cos(\varphi + \beta), \tag{15.8}$$

Если вектор кинетического момента гироскопа направлен к правому борту, то углы β и φ имеют одинаковые знаки. Если же вектор

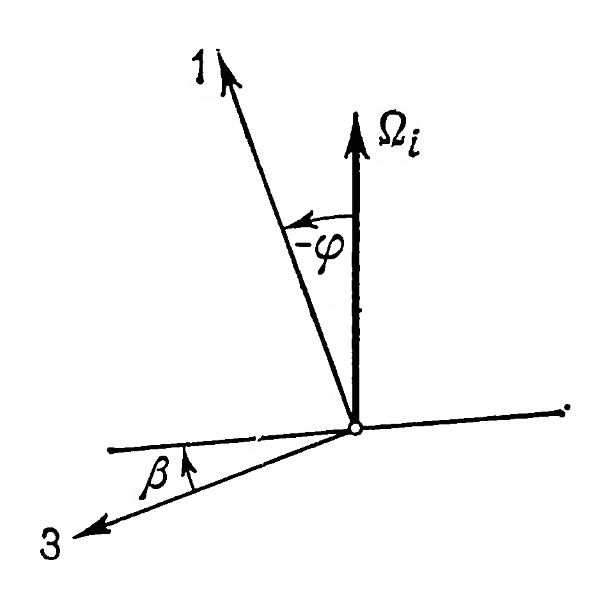


Рис. 15.2. К анализу поведения поворотного гироскопа на вираже

H_i направлен к левому борту, то знаки эти различны, как показано, например, на рис. 15.2. В последнем случае имеется возможность путем настройки прибора на $\beta = -\varphi$ обратить множитель $\cos(\varphi + \beta)$ в единицу. Тогда требование равновесия гироскопического и восстанавливающего моментов снова приводит к формуле (15.4).

При настройке на $\beta = -\varphi$ оказывается возможным одновременно использовать поворотный гироскоп в качестве горизонта (*указатель ориентации*). Как видно из рис. 15.2, при $\beta = -\varphi$ ось ротора действительно постоянно горизонтальна. Нетрудно определить, какие условия следует в этом случае соблюсти при правильном вираже и $\varphi \ll 1$. При правильном вираже

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi = -\frac{v\Omega}{g}, \tag{15.9}$$

где v — скорость самолета. С другой стороны, показание поворотного гироскопа выражается формулой (15.4). Поэтому требование $\beta = -\varphi$ приводит к зависимости

$$H = \frac{c_2}{g} v. \tag{15.10}$$

Таким образом, должна поддерживаться пропорциональность кинетического момента — а значит, и угловой скорости ротора — скорости полета. В осуществленных приборах такого типа это достигалось попросту путем пневматического привода ротора посредством расположенной в направлении полета трубки Вентури. Так как область допустимых скоростей полета вообще ограничена довольно узкими пределами, такого рода устройство невысокой точности вполне пригодно.

Зависимость выходной величины поворотного гироскопа от угла φ можно устранить, размещая прибор так, чтобы кинетическая ось была ориентирована в направлении полета. Однако в этом случае могут всплыть ошибки в показаниях из-за наклона по тангажу или ускорений по крену.

15.3. Интегрирующие и дифференцирующие поворотные гироскопы

С помощью вычислительной машины выходную величину гироскопического тахометра можно, конечно, проинтегрировать или продифференцировать — механическим или электрическим способом. Но можно также и сам прибор построить таким образом, чтобы его новая выходная величина являлась интегралом или производной прежней. Интегрирующего эффекта можно достичь, выбрав, согласно (15.1), как и в случае гироскопического тахометра, $c_1 \to \infty$, т. е. $\alpha \equiv 0$, и дополнительно $c_2 = 0$. Кроме того, надо позаботиться о том, чтобы коэффициент демпфирования d_2 был достаточно велик. Тогда уравнение движения примет вид

$$B\ddot{\beta} + d_2\dot{\beta} + H\Omega_3\beta = H\Omega_1 - B\dot{\Omega}_2. \tag{15.11}$$

Отсюда при равномерном вращении системы отсчета ($\dot{\Omega}_i = 0$) получаем показание, соответствующее положению равновесия:

$$\beta \approx \frac{\Omega_1}{\Omega_3}.$$

Это значение, вообще говоря, нельзя считать малым в той степени, как это предполагалось в отношении β. Этот результат означает не что иное, как то, что в положении равновесия ось ротора из-за отсутствия восстанавливающего момента по β устанавливается одноименно параллельно составляющей Ω_i, лежащей в плоскости 1-3.

Однако у рассматриваемого *I-поворотного гироскопа* представляет интерес не столько положение равновесия, сколько переходный

процесс. Для выяснения этого в квазистатическом случае (т. е. при $B\dot{\Omega}_2 \ll H\Omega_1$) мы можем, согласно (15.11), воспользоваться уравнением [1])

$$B\ddot{\beta} + d_2\dot{\beta} \approx H\Omega_1, \tag{15.12}$$

решением которого является

$$\dot{\beta} = \frac{H}{d_2}\Omega_1 - \left(\frac{H\Omega_1}{d_2} - \dot{\beta}_0\right)e^{-t/T_z}. \tag{15.13}$$

Здесь

$$T_z = \frac{B}{d_2} \tag{15.14}$$

— постоянная времени, отражающая затухание второго члена правой части (15.13). Если коэффициент d_2 достаточно велик, то T_z настолько мала, что с достаточной степенью приближения можно записать

$$\dot{\beta} \approx \frac{H}{d_2}\Omega_1, \tag{15.15}$$

или

$$\beta = \beta_0 + \frac{H}{d_2}\int \Omega_1\,dt. \tag{15.16}$$

Соотношение (15.15) показывает, что гироскопический и демпфирующий моменты взаимно уравновешиваются. Как видно из (15.16), при $\beta_0 = 0$ выходная величина β пропорциональна интегралу от входной величины Ω_1. Тогда для рассмотренного выше примера горизонтального виража, при котором $\Omega_1 = \Omega\cos\varphi$ и $\int \Omega\,dt = -(\psi - \psi_0)$, получим

$$\beta = \beta_0 + \frac{H\cos\varphi}{d_2}(\psi_0 - \psi). \tag{15.17}$$

Таким образом, при $\beta_0 = \psi_0 = 0$ азимутальный угол ψ и выходной угол β пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности для $\varphi \ll 1$, равный H/d_2, называется *коэффициентом усиления*. У осуществленных приборов удалось достичь примерно стократного усиления, так что I-поворотный гироскоп оказывается весьма чувствительным измерителем углов. Трудность настройки заключается прежде всего в том, что, хотя при понижении d_2 (демпфирование по β) усиление и увеличивается, одновременно в силу (15.14) растет также и постоянная времени T_z.

Поэтому надо искать компромисс между большим усилением и таким измерением, которое по возможности не искажается переходным процессом. Само собой разумеется, что для определения оптимальных параметров надо обратиться к более строгому анализу погрешностей, которого мы, однако, здесь проводить не будем. Заметим еще, что у применяемых I-поворотных гироскопов ротор за-

[1]) Уравнение (15.12) получается из уравнения (15.11) отбрасыванием наряду с $B\dot{\Omega}_2$ и гироскопического момента $H\Omega_3\beta$, малого по сравнению с $d_2\dot{\beta}$. — *Прим. ред.*

ключен в закрытую цилиндрическую камеру. Эта камера плавает в поддерживающей жидкости, вязкость которой наряду с зазором между поплавком и корпусом гироскопа определяет величину демпфирования d_2.

При $d_2 = 0$, т. е. при отсутствии демпфирования по β, поворотный гироскоп можно превратить в прибор двойного интегрирования (*I^2-поворотный гироскоп*). В этом случае уравнение (15.11) означает, что в основном инерционный момент $B\ddot{\beta}$ уравновешивается гироскопическим моментом $H\Omega_1$, так что приближенно

$$\ddot{\beta} \approx \frac{H}{B}\Omega_1. \tag{15.18}$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\beta \approx \beta_0 + \dot{\beta}_0 t + \frac{H}{B}\int\int \Omega_1(t)\,dt^2. \tag{15.19}$$

Таким образом, при $\beta_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ выходная величина β пропорциональна двойному интегралу входной величины Ω_1. Приборы подобного рода применяются главным образом в качестве чувствительных нулевых индикаторов. В технической реализации прибора ротор помещается в герметически закрытой камере, подвешенной на газовых подшипниках, обеспечивающих минимальное трение.

Поворотный гироскоп с дифференцирующими свойствами (*D-поворотный гироскоп*) можно получить, если предоставить гироскопу известную возможность поворота по углу α. Тогда мы получаем систему с тремя степенями свободы, как показано на рис. 15.1 и отражено в уравнениях (15.1), но восстанавливающий момент по α (коэффициент c_1) должен быть при этом большим. В предельном случае можно даже представить себе столь жесткую связь, что измеряется лишь момент относительно оси 1 при $\alpha \equiv 0$. Тогда отклонение внешней рамы, т. е. угол α, зависит от производной $\dot{\Omega}_1$ входной величины поворотного гироскопа. Как вытекает из (15.4), изменению Ω_1 соответствует изменение β. Но угловая скорость $\dot{\beta}$ обусловливает гироскопический момент $H\dot{\beta}$ относительно оси 1, который может быть компенсирован только восстанавливающим моментом $c_1\alpha$. Таким образом, угол α поворота внешней рамы пропорционален $\dot{\beta}$, а значит, и $\dot{\Omega}_1$.

Провести более строгий анализ поведения D-поворотного гироскопа позволяют уравнения (15.1). При этом можно принять, что, согласно (15.4), $\beta \approx (H/c_2)\Omega_1$. Если пренебречь также переходным процессом по координате α, то из (15.1/1) следует

$$c_1\alpha \approx -A\dot{\Omega}_1 - H(\Omega_2 + \dot{\beta}). \tag{15.20}$$

Используя соотношение (15.4), исключим отсюда β и получим

$$\alpha \approx -\frac{1}{c_1}\left(A + \frac{H^2}{c_2}\right)\dot{\Omega}_1 - \frac{H}{c_1}\Omega_2. \tag{15.21}$$

Так как обычно $A \ll H^2/c_2$, это выражение еще более упрощается:

$$\alpha \approx -\frac{H^2}{c_1 c_2}\dot{\Omega}_1 - \frac{H}{c_1}\Omega_2. \tag{15.22}$$

Если поворотный гироскоп находится на горизонтальном основании, то, поскольку $\Omega_2 = 0$, в этом выражении остается только член с $\dot{\Omega}_1$. Тогда получается прибор с двумя выходными величинами

$$\alpha \approx -\frac{H^2}{c_1 c_2}\dot{\Omega}_1, \quad \beta \approx \frac{H}{c_2}\Omega_1. \tag{15.23}$$

Съем D-поворотного гироскопа можно выполнить таким образом, чтобы он выдавал только одну выходную величину, которая в данном случае явится линейной комбинацией исходных значений (15.23). В осуществленных приборах подобного рода это достигалось просто тем, что поворот внутренней рамы отсчитывался не по

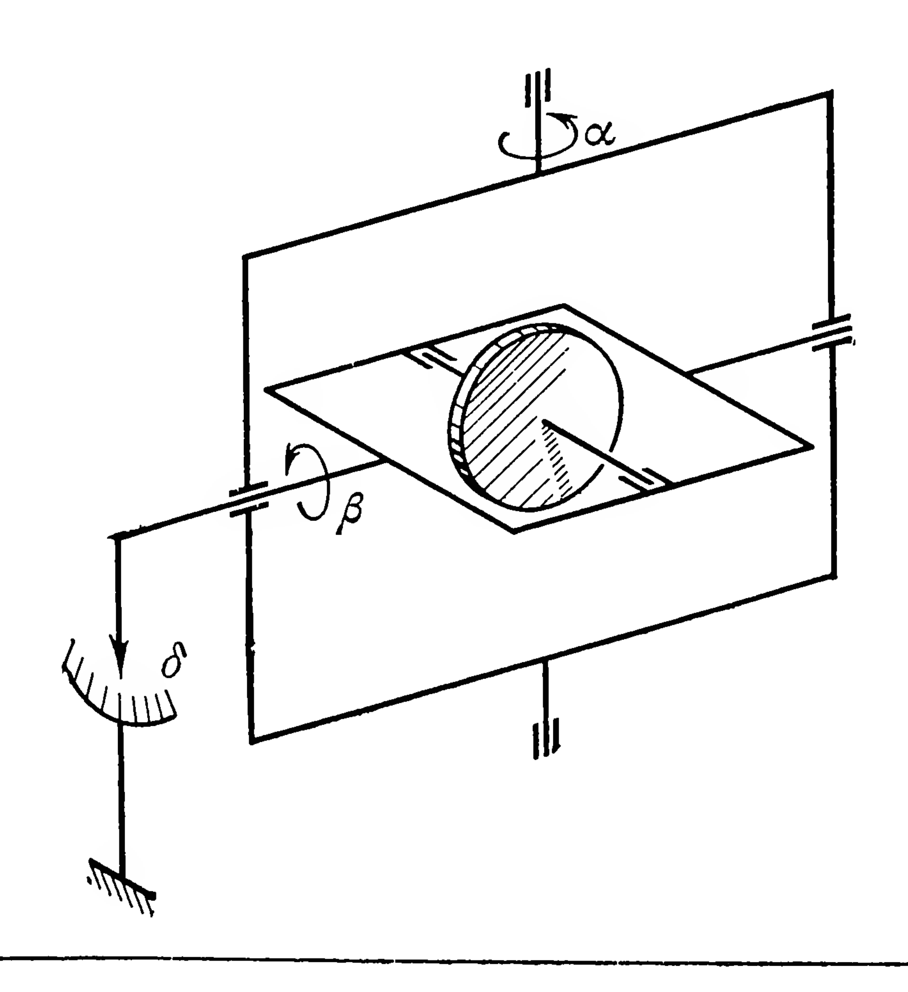


Рис. 15.3. Гироскоп со смесительным съемом угловой скорости и углового ускорения (PD-поворотный гироскоп).

отношению к внешней раме, а по отношению к корпусу прибора (рис. 15.3). Тогда с выхода прибора будет сниматься величина

$$\delta_{PD} = k_1\beta + k_2\alpha \approx \frac{k_1 H}{c_2}\Omega_1 - \frac{k_2 H^2}{c_1 c_2}\dot{\Omega}_1, \tag{15.24}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты, определяемые из чисто геометрических соображений. Гироскоп такого вида называется поворотным гироскопом со смесительным съемом или просто *гироскопом со смесительным съемом*, потому что его выходная величина является комбинацией функций входной величины. Уравнение (15.24) описывает *PD-поворотный гироскоп.*

PI- и PID-поворотные гироскопы хорошо зарекомендовали себя в качестве измерительных элементов демпфирующих цепей (см., например, [101]). Во многих случаях они делают излишними специальные смесительные элементы в регуляторах, так как эта операция осуществляется непосредственно в измерительном звене. Величины на выходе *PI-поворотного гироскопа* и *PID-поворотного гироскопа* имеют соответственно следующие выражения:

$$\delta_{PI} = k_1\Omega_1 + k_2 \int \Omega_1\, dt, \tag{15.25}$$

$$\delta_{PID} = k_1\Omega_1 + k_2 \int \Omega_1\, dt + k_3\dot{\Omega}_1. \tag{15.26}$$

15.4. Поворотный гироскоп с несимметричным ротором (U-поворотный гироскоп)

Отметим еще один очень интересный по своему принципу действия поворотный гироскоп. Он имеет несимметричный ротор, все три

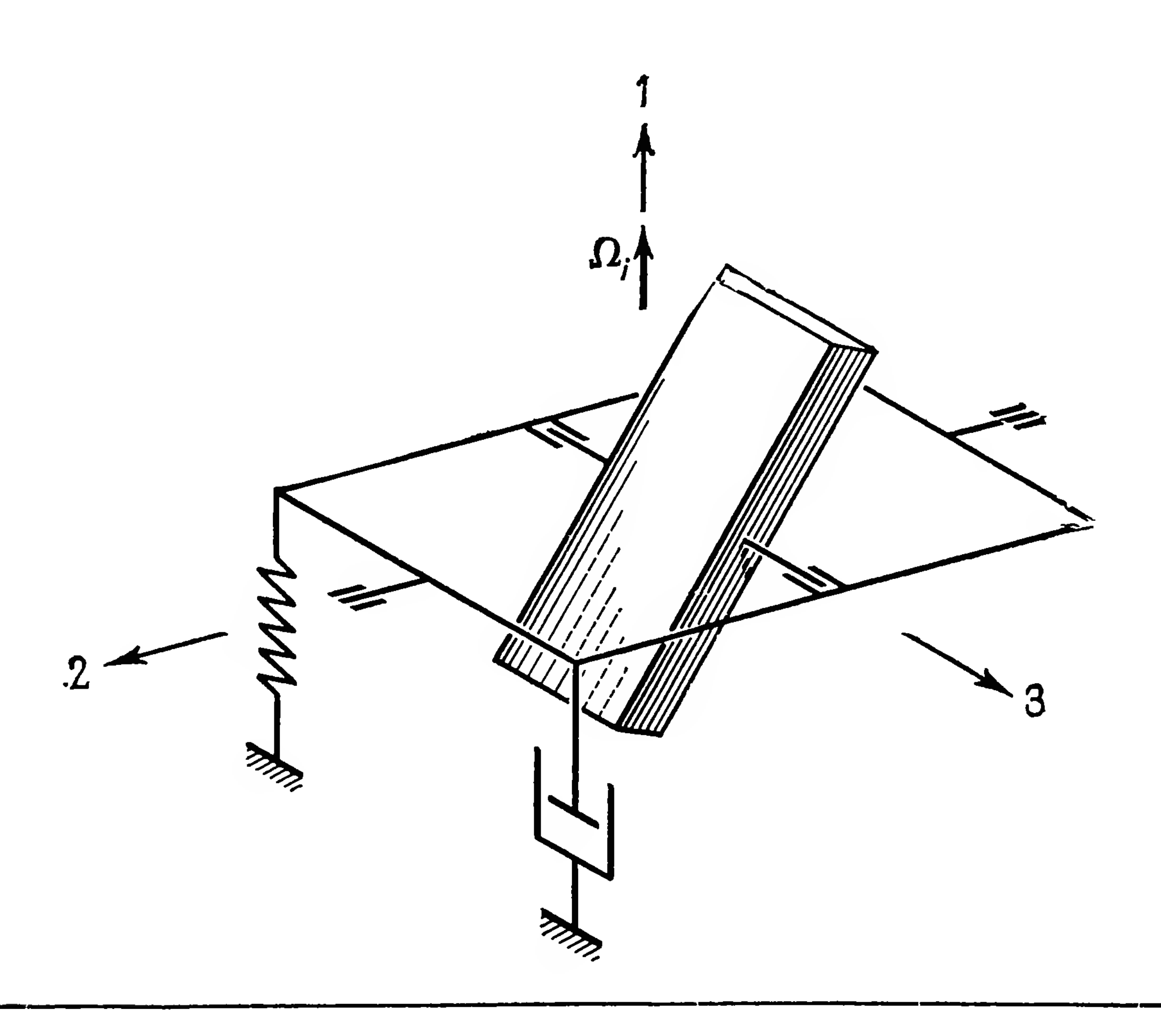


Рис. 15.4. Схема поворотного гироскопа с несимметричным ротором.

главных момента инерции которого A^R, B^R, C^R различны. Во всем остальном гироскоп не отличается от нормального P-поворотного гироскопа, у которого удалена внешняя рама (рис. 15.4).

Для того чтобы разобраться в принципе действия прибора, предположим простоты ради, что рама неподвижна, т. е. $\beta = 0$. Нас интересует момент M_2, который возникает при вращении системы отсчета с угловой скоростью $\Omega_i = (\Omega, 0, 0)$ при $\Omega = \text{const}$. Если

ось ротора является главной осью, то в системе координат, связанной с ротором, получаем

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \Omega \cos\gamma \\ -\Omega \sin\gamma \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \qquad H_i = \begin{bmatrix} A^R \Omega \cos\gamma \\ -B^R \Omega \sin\gamma \\ C^R \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \qquad (15.27)$$

Используя эти выражения, находим на основании уравнений Эйлера реактивный момент [см. уравнение (3.3)]

$$-M_i^K = \frac{d' H_i}{dt} + \varepsilon_{ijk}\omega_j H_k = \begin{bmatrix} (B^R - A^R - C^R)\,\Omega\dot{\gamma}\sin\gamma \\ (A^R - B^R - C^R)\,\Omega\dot{\gamma}\cos\gamma \\ C^R\ddot{\gamma} + (A^R - B^R)\,\Omega^2 \sin\gamma\cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (15.28)$$

Момент относительно оси 2 равен

$$M_2 = M_1^K \sin\gamma + M_2^K \cos\gamma,$$

откуда с учетом (15.28) получаем

$$M_2 = H\Omega\left(1 - \frac{A^R - B^R}{C^R}\cos 2\gamma\right). \qquad (15.29)$$

Здесь на момент $H\Omega$, который существует и у Р-поворотного гироскопа с симметричным ротором, накладывается периодическая составляющая, частота которой равна удвоенной угловой скорости ротора. Частное $(A^R - B^R)/C^R$ служит мерой амплитуды колебаний. Теоретически это частное может принимать значения от -1 до $+1$, однако практически реализуемые величины заключены приблизительно в пределах $\pm 0{,}3$.

Выход поворотного гироскопа можно построить таким образом, чтобы возможно было измерить либо среднее значение $H\Omega$ момента (15.29) по классическому способу, либо амплитуду колебаний $H\Omega(A^R - B^R)/C^R$. Правда, среднее значение всегда больше амплитуды колебаний, но при определении последней легче избавиться от помех, если отфильтровать удвоенную частоту вращения ротора. Этого можно добиться чисто механическим путем, сделав, например, собственную частоту рамы равной удвоенной частоте вращения ротора или, что еще лучше, присоединив настроенный именно на эту частоту вибратор.

В более строгой теории погрешностей U-поворотного гироскопа, разработанной Зоргом [102], исследован ряд причин наблюдаемых помех: деформации ротора, процессы в шарикоподшипниках, колебания числа оборотов, расстройка прибора и эффекты трения. Опыты подтвердили приемлемость самого принципа измерения, однако из-за сложности конструкции и определенной трудности настройки U-поворотный гироскоп не нашел пока применения.

15.5. Влияние вибраций на поворотный гироскоп

В § 11.4 были рассмотрены два вида вибрационных явлений, которые могут возникать также у поворотных гироскопов: связанные с влиянием инерционности рам и связанные с упругой податливостью элементов конструкции. Причиной неверных показаний поворотного гироскопа может явиться и динамическая неуравновешенность рамы (или кожуха ротора), т. е. несовпадение главной оси инерции рамы с ее геометрической осью. При этом вынужденная

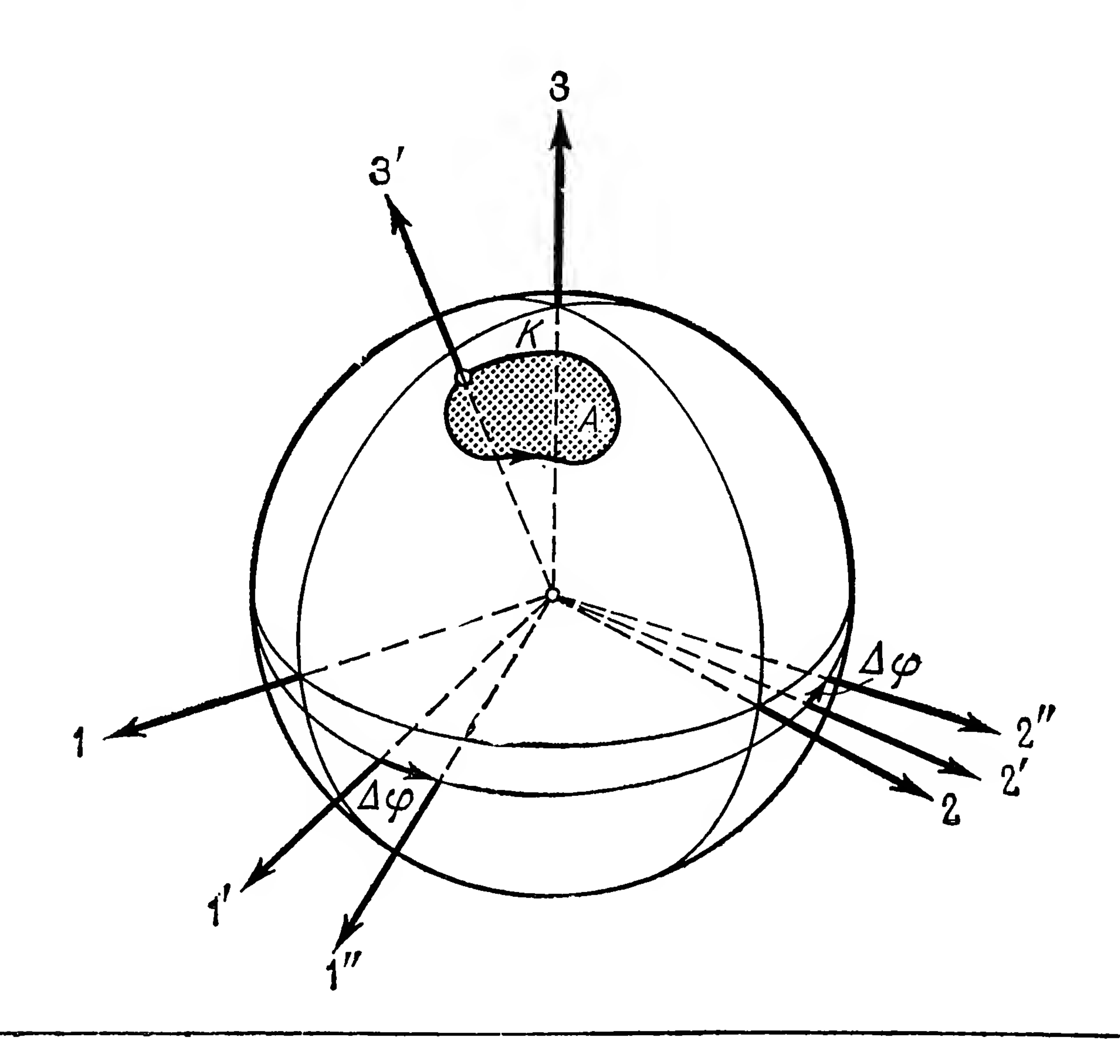


Рис. 15.5. К расчету погрешности конического движения; поворот системы координат 1′, 2′, 3′ при обходе осью 3′ замкнутой кривой *K*.

угловая вибрация корпуса прибора приводит к колебаниям рамы, среднее положение которой теперь уже не обязательно совпадает с ее невозмущенным положением. Более того, может возникнуть выпрямительный эффект, который в конечном счете проявится в искажении показаний. Упругая податливость элементов конструкции оказывает свое влияние главным образом при поступательной вибрации корпуса прибора. Если направление вибрации и направление вызванного ею перемещения элемента не совпадают, то и в этом случае может возникнуть выпрямительный эффект.

Объясним еще один эффект, типичный для поворотных гироскопов и вообще для всех измерителей угловой скорости. Речь идет о погрешности показаний, вызываемой исключительно кинематическими причинами и получившей название *погрешности конического движения* (coning error). Она может быть определена на

основании кинематической теоремы, принадлежащей Гудмену и Робинсону [103].

Рассмотрим две системы координат — неподвижную 1, 2, 3 и подвижную 1′, 2′, 3′, — имеющие общее начало O (рис. 15.5). Пусть в момент $t=0$ оси 1′, 2′, 3′ занимают положение, показанное на рисунке. Заставим теперь ось 3′ (при $t>0$) двигаться так, чтобы ее точка пересечения с единичной сферой, имеющей центром точку O, описала за время T замкнутую кривую K, ограничивающую некоторую площадь A. После одного обхода кривой K ось 3′ возвращается в исходное положение, оси же 1′ и 2′ занимают новые положения, обозначенные через 1″ и 2″. Требуется определить угол $\Delta\varphi$, образуемый осями 1′ и 1″ или 2′ и 2″.

Для решения этой кинематической задачи обратимся к углам Эйлера ψ, ϑ, φ (см. рис. 1.23). Углы $\psi(t)$ и $\vartheta(t)$, зависящие от движения оси 3′, являются заданными функциями времени, причем $\psi(T)=\psi(0)$ и $\vartheta(T)=\vartheta(0)$. Искомым является угол $\Delta\varphi = \varphi(T)-\varphi(0)$, который мы можем найти из кинематического соотношения (1.49/3):

$$\omega_3' = \dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta. \tag{15.30}$$

Здесь ω_3' — угловая скорость, которую зарегистрировал бы связанный с подвижной системой измеритель угловой скорости, измерительная ось которого совпадает с осью 3′. Интегрируя (15.30), получаем

$$\int_0^T \omega_3'\,dt = \int d\varphi + \int \cos\vartheta\,d\psi = \Delta\varphi + \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\psi. \tag{15.31}$$

Преобразуем это выражение, введя в него площадь A. Рис. 15.6 показывает, что

$$dA = d\psi\int_0^{\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta = (1-\cos\vartheta)\,d\psi,$$

т. е.

$$A = \int_0^{2\pi}(1-\cos\vartheta)\,d\psi = \Delta\psi - \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\psi. \tag{15.32}$$

Здесь либо $\Delta\psi = \Delta\psi(2\pi)-\Delta\psi(0)=0$, если кривая K не охватывает полюс единичной сферы (точки пересечения оси 3 со сферой), либо

$$\Delta\psi = \pm 2n\pi, \tag{15.33}$$

если ось 3′ обходит n раз ось 3 в положительном (отрицательном) направлении. Подставляя (15.32) и (15.33) в (15.31), получаем

$$\Delta\varphi = \int_0^T \omega_3'\,dt + A \mp 2n\pi. \tag{15.34}$$

Приложим это кинематическое соотношение к двум примерам. Сначала рассмотрим горизонтированную платформу, которая управляется от поворотного гироскопа (или какого-либо иного измерителя угловой скорости) так, что $\omega_3' \equiv 0$. Следовательно, платформа вращается относительно Земли вокруг вертикали. Если

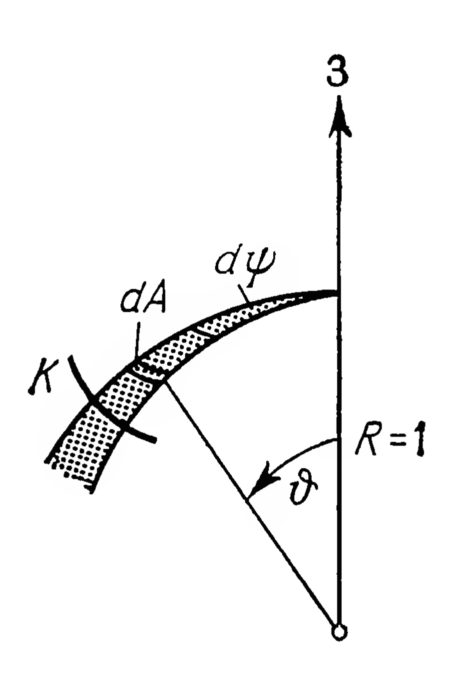


Рис. 15.6. К вычислению площади A, ограниченной кривой K.

платформа не перемещается по поверхности Земли, то угол, на который она повернется вокруг вертикали на протяжении суток (точнее, звездных суток), равен

$$\Delta\varphi = A - 2\pi.$$

Так как A — площадь шарового сегмента, соответствующего $\vartheta = \vartheta_0$, имеем

$$\Delta\varphi = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0) - 2\pi = -2\pi\cos\vartheta_0. \qquad (15.35)$$

Отсюда следует, что при $\vartheta_0 = 0$ (на полюсе) $\Delta\varphi = -2\pi$, при $\vartheta_0 = \pi/2$ (на экваторе) $\Delta\varphi = 0$, а при $\vartheta_0 = 60°$ (30° географической широты) $\Delta\varphi = -\pi = -180°$.

В качестве второго примера рассмотрим Р-поворотный гироскоп с обозначением осей согласно рис. 15.1. Пусть корпус прибора совершает вынужденные колебания, вектор угловой скорости Ω_i которых лежит в плоскости 1-3 (рис. 15.7). Пусть

$$\Omega_i = \Omega_{i0}\cos\nu t = (\Omega_{10}\cos\nu t,\ 0,\ \Omega_{30}\cos\nu t), \qquad (15.36)$$

где Ω_{i0} — амплитуда угловой скорости колебаний, а ν — частота колебаний.

Собственное движение рамы [т. е. функцию $\beta(t)$] приходится находить с помощью уравнения (15.1/2). Решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами может оказаться весьма затруднительным. Однако для выяснения существа погрешности поворотного гироскопа примем для простоты, что $\beta(t)$ можно определить так же,

как это было сделано в случае невозмущенного идеального Р-поворотного гироскопа; тогда

$$\beta(t) \approx \frac{H}{c_2}\,\Omega_{10}\cos\nu t. \tag{15.37}$$

На такой же угол β колеблется и эффективная измерительная ось поворотного гироскопа, которая перпендикулярна осям ротора и рамы. Но так как корпус прибора колеблется еще и вокруг оси 3, эффективная измерительная ось совершает в пространстве

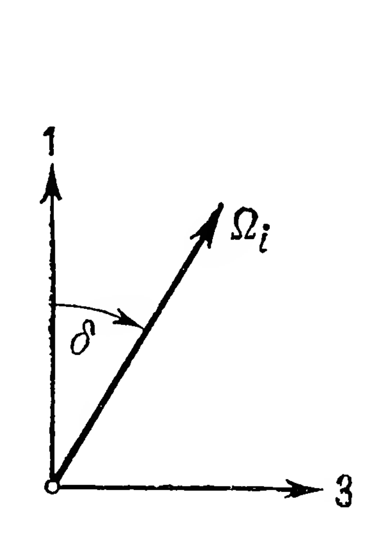


Рис. 15.7 Положение вектора угловой скорости вынужденных колебаний в плоскости 1-3 (показанной на рис. 15.1).

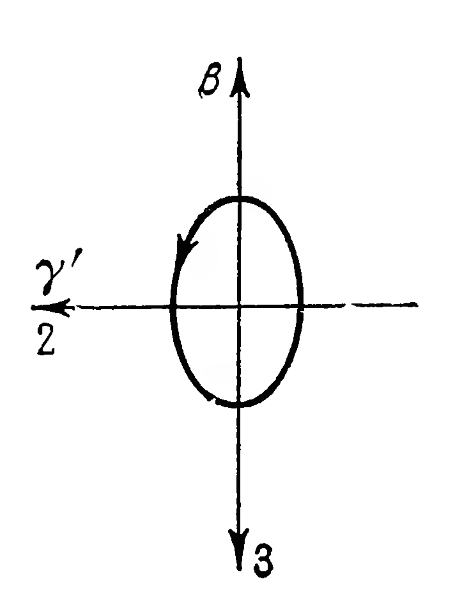


Рис. 15.8. Траектория некоторой точки эффективной измерительной оси при колебаниях корпуса прибора по закону (15.36).

такое движение, при котором любая ее точка описывает некоторый овал (рис. 15.8). При этом угол γ' поворота корпуса вокруг оси 3 (при $\gamma' \ll 1$) равен

$$\gamma' = \int_0^T \Omega_3\,dt = \frac{\Omega_{30}}{\nu}\sin\nu t. \tag{15.38}$$

Для нахождения погрешности показаний поворотного гироскопа воспользуемся формулой (15.34). Рассмотрим полное колебание, совершающееся за время $T = 2\pi/\nu$. Так как по прошествии одного колебания корпус возвращается в исходное положение, имеем $\Delta\varphi = 0$. Кроме того, $n = 0$, так как при принятом выборе углов (γ' соответствует ψ, а β соответствует $90° - \vartheta$) только обход оси 3 мог бы привести к $n \neq 0$. Таким образом, в данном случае

$$\int_0^T \omega_3'\,dt = -A.$$

Площадь A, ограниченная кривой, описываемой эффективной измерительной осью, с учетом (15.37) и (15.38) выражается сле-

дующей формулой:

$$A = \int_0^T \beta\, d\gamma' = \int_0^T \beta\Omega_3\, dt = \frac{H\Omega_{10}\Omega_{30}}{c_2} \int_0^T \cos^2 \nu t\, dt = \frac{\pi H\Omega_{10}\Omega_{30}}{\nu c_2}.$$

Регистрируемое поворотным гироскопом осредненное за один период колебания корпуса значение угловой скорости составляет

$$\bar{\omega}_3' = -\frac{A}{T} = -\frac{H\Omega_{10}\Omega_{30}}{2c_2}. \tag{15.39}$$

Полагая, что вектор Ω_i образует с осью 1 угол δ (рис. 15.7), получаем

$$\Omega_{10} = \Omega_0 \cos\delta, \qquad \Omega_{30} = \Omega_0 \sin\delta,$$

так что (15.39) можно записать в виде

$$\bar{\omega}_3' = -\frac{H\Omega_0^2 \sin 2\delta}{4c_2}. \tag{15.40}$$

Нередко представляет интерес зависимость $\bar{\omega}_3'$ от амплитуды Φ колебаний корпуса. Поскольку $\Omega_0 = \Phi\nu$, выражение (15.40) преобразуется в

$$\bar{\omega}_3' = -\frac{H\Phi^2\nu^2 \sin 2\delta}{4c_2}. \tag{15.41}$$

Так как корпус прибора совершает только колебания, но в среднем не поворачивается вокруг измерительной оси, величина (15.39), (15.40) или (15.41) должна рассматриваться как *погрешность* показаний (погрешность конического движения).

Более строгие исследования рассматриваемых здесь погрешностей были проведены несколькими авторами, в первую очередь Швейцером [104]. При этом оказалось, что величина погрешности очень сложным образом зависит от направления и амплитуды вибрации и от параметров гироскопа. Если вектор возмущения Ω_i параллелен оси рамы, то никакой погрешности не возникает. Но она становится особенно большой, когда Ω_i лежит в плоскости 1-3. Если частота вибрации близка к собственной частоте гироскопа, то резонансные явления могут повести к весьма большим погрешностям.

Погрешность показаний зависит также от типа поворотного гироскопа. Так, например, идеальный I-поворотный гироскоп не обнаруживает погрешности при вибрации корпуса прибора по закону (15.36), так как в силу (15.16) его показание определяется выражением

$$\beta \approx \frac{H\Omega_{10}}{d_2\nu} \sin \nu t. \tag{15.42}$$

Эта формула совместно с (15.38) определяет движение эффективной измерительной оси вдоль прямой, как показано на рис. 15.9,

в противоположность соответствующему движению идеального P-поворотного гироскопа (рис. 15.8). Таким образом, в силу $A = 0$ погрешность в показаниях I-поворотного гироскопа отсутствует. Однако если колебания корпуса вокруг осей 1 и 3 сдвинуты по фазе, т. е. если вместо чистых угловых колебаний имеет место

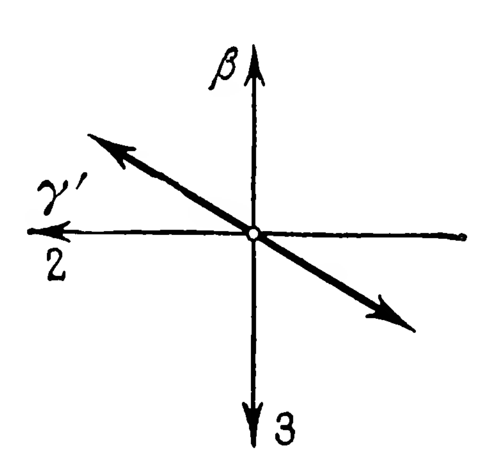


Рис. 15.9. Траектория некоторой точки эффективной измерительной оси I-поворотного гироскопа при угловых колебаниях корпуса прибора по закону (15.36).

коническое движение, то погрешность возникает и у I-поворотного гироскопа.

Поскольку уравнения движения (15.1) при наличии колебаний корпуса содержат периодические коэффициенты, возможны колебания параметрического происхождения, которые накладываются на показания прибора. Поэтому устойчивость положений равновесия нуждается в специальном исследовании. И действительно, Швейцер [104] показал, что при определенных обстоятельствах показания поворотного гироскопа могут оказаться неустойчивыми.

Глава 16

Инерциальные платформы

Инерциальные платформы — это стабилизированные с помощью гироскопов платформы, которые применяются в технике инерциальной навигации. Разбирая принцип устройства и важнейшие свойства этих приборов, мы не будем вдаваться в детальное описание конструктивных вариантов и довольно сложных технологических проблем, связанных с осуществлением таких систем. Мы не будем касаться здесь также теории ошибок и сошлемся на обширную специальную литературу по этому вопросу (например, Дрейпер, Ригли и Говорка [105], Фернандец и Макомбер [78] или Броксмейер [106]).

Следует сделать еще замечание относительно терминологии. Под *платформой в самом общем смысле* часто понимают все устройство, т. е. ориентатор, позволяющий определять положение связанных с корпусом осей по отношению к некоторой системе отсчета. *В более узком смысле* — и именно так это понятие будет здесь употребляться — под платформой понимают тот элемент конструкции ориентатора, который можно рассматривать как приборную реализацию системы отсчета. Этот конструктивный элемент вместе с установленными на нем гироскопическими устройствами мы будем иногда называть *ядром платформы*.

16.1. Основные идеи инерциальной навигации

Инерциальной навигацией называют метод определения места, который основан на использовании закона инерции. Так как при этом не требуется какой-либо внешней информации, получаемой, например, оптическими средствами или по радио, то речь идет о вполне автономном способе. Определяются и обрабатываются ускорения, измеряемые на движущемся объекте (носителе). Интегрированием измеренных величин получают скорости, а повторным интегрированием — отрезки пройденного пути.

Насколько проста эта идея, настолько же трудно создать на ее основе практически пригодный прибор. Главную причину этого можно усмотреть в том, что принципиально невозможно различить силу инерции и силу тяготения. Поскольку акселерометры должны

выдавать только ускорение объекта, составляющие, обусловленные тяготением, нужно выделить расчетным путем или инструментально и компенсировать. При движении объекта по земной поверхности этого можно достигнуть, удерживая измерительные оси точно в горизонтальной плоскости. Ввиду вращения Земли и движения объекта нужно в этом случае вращать платформу таким образом, чтобы она всегда оставалась горизонтальной. Если этого не происходит, то следует расчетным путем или приборными средствами исключить обусловленные тяготением слагаемые, входящие в измеряемые величины. В соответствии с принципами, которыми решается эта задача, возможны и реализованы различные типы инерциальных платформ.

1. В *геометрических системах* платформа стабилизирована таким образом, что ее абсолютная угловая скорость равна нулю. При этом ориентация платформы относительно инерциальной системы координат остается неизменной. В специальной разновидности этих систем рама вращается с помощью часового механизма вокруг земной оси, сохраняющей неизменное направление в инерциальном пространстве; скорость этого вращения в точности равна угловой скорости Земли ω^E, так что рама остается параллельной некоторой плоскости меридиана.

2. В *аналитических системах* гироскопы и акселерометры смонтированы жестко на объекте. Угловые скорости объекта измеряются гироскопами, а переносные ускорения — акселерометрами. Счетно-решающий прибор может по этим данным определить движение, а отсюда и мгновенное положение объекта относительно Земли (или относительно иного небесного тела).

3. Наряду с системами, упомянутыми в п. 1 и 2, имеются некоторые промежуточные формы, которые называют *полуаналитическими системами*. В них платформа с акселерометрами удерживается в горизонтальном положении, а в некоторых случаях даже так, что платформа ориентируется по земным осям север — запад — зенит. У других платформ этого вида скорость вращения вокруг вертикали делается равной нулю.

Для всех трех типов систем необходим счетно-решающий прибор, чтобы рассчитывать координаты места движущегося объекта. Однако роль счетно-решающих приборов в этих системах различна; она особенно велика в аналитических системах. Можно сказать, что часть трудностей конструктивно-механического характера можно здесь обойти, применяя соответствующую программу в счетно-решающем приборе. Однако и в данном случае предъявляются очень высокие требования к точности гироскопов и акселерометров.

В зависимости от конструкции и выполняемых функций платформы подвешиваются в двух, трех и даже в четырех рамах (с тремя, четырьмя или пятью осями), чтобы обеспечить полную свободу вращений. Для подвешивания самой платформы доста-

точно двух рам или трех осей. Дополнительные рамы устанавливаются с целью исключить явление складывания рам или когда нужно сообщить раме принудительное движение например, как об этом упоминалось в п. 1. Кроме того, стремятся располагать рамы так, чтобы измеряемые углы определялись с наименьшей карданной погрешностью. Например, для правильного измерения общепринятых угловых координат самолета (см. [107]) — углов рыскания, тангажа и крена — рамы следует располагать в следующем порядке (считая от платформы): рама рыскания, рама тангажа, рама крена. Но возможны и также важны другие точки зрения. Так, наиболее вероятный характер движений объекта диктует и определенную последовательность рам как наиболее благоприятную. Вследствие взаимного движения рам на платформу действуют реактивные моменты, которые могут вызвать погрешность прибора. Тогда выбирают такое расположение рам, при котором погрешности будут минимальными.

Точность измерительных устройств, акселерометров и гироскопов имеет решающее значение для функционирования инерциальной платформы. Постоянная погрешность в измерении ускорений после двукратного интегрирования могла бы привести к погрешности в определении места, растущей пропорционально квадрату времени. Нетрудно сообразить, что ввиду этого возможность продолжительной (т. е. длящейся часами) навигации с приемлемой точностью стала бы иллюзорной. Однако в действительности благодаря соответствующей настройке платформы можно удерживать погрешность в определенных границах. Об этом будет рассказано в § 16.4.

Что касается гироскопов платформы, то необходимо стремиться к уменьшению сигналов гиротахометров в их нулевом положении и к уменьшению скорости дрейфа позиционных гироскопов. Так как движение платформы управляется гироскопами, погрешности гироскопов непосредственно влекут за собой и погрешность платформы. Дело обстоит так, что уменьшение нежелательного, но не поддающегося полному устранению дрейфа гироскопов и платформ составляет одну из важнейших проблем при практическом осуществлении приборов инерциальной навигации.

16.2. Одноосная платформа

В качестве чувствительных элементов платформ можно применять или позиционные, или поворотные гироскопы. Для трехосной платформы требуется не меньше двух позиционных или трех поворотных гироскопов. Само собой разумеется, что могут применяться и их комбинации. Едва ли можно решить в общем виде, какому из возможных устройств следует отдать предпочтение, так как требования, предъявляемые к платформе, зависят также и от характера поставленных перед ней задач. Легко понять, что эффект, который

может дать платформа, в значительной мере зависит и от технологических затрат на ее изготовление, а следовательно, от ее стоимости. Некоторые различия в поведении двух основных типов платформ, обусловленные самим построением систем, выясняются уже на простой модели одноосной платформы, которая будет рассмотрена ниже.

16.2.1. Одноосная платформа с интегрирующим гироскопом. Устройство платформы схематически изображено на рис. 16.1. На

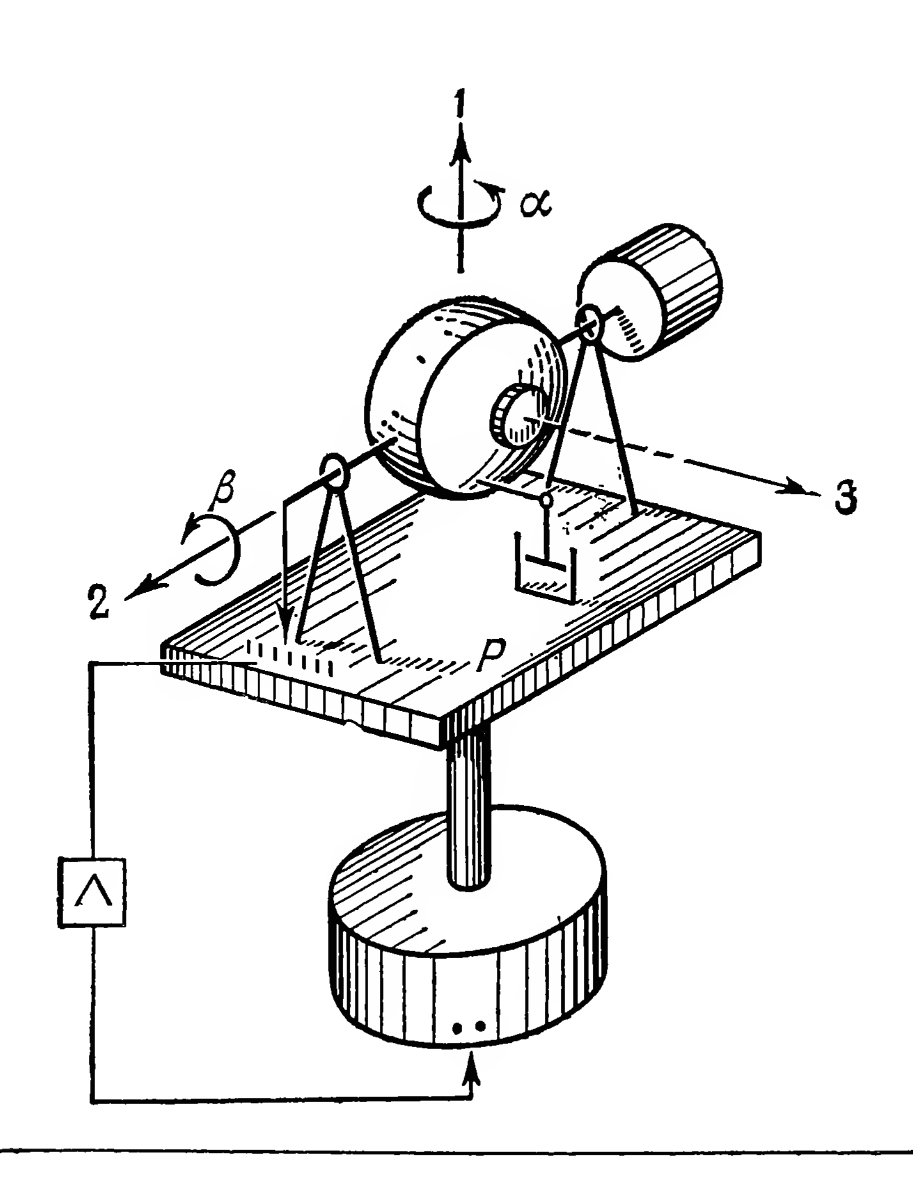


Рис. 16.1. Одноосная стабилизированная платформа с поворотным гироскопом.

платформе P, которая может вращаться вокруг оси 1, установлен поворотный гироскоп таким образом, что его входная ось совпадает с направлением оси 1. Система в целом устроена так же, как уже рассмотренный в п. 14.3.1 однороторный стабилизатор. Только внешняя рама здесь заменена платформой P; кроме того, двигатель стабилизации на оси 2 выполняет иную функцию. Если принять, что возмущающий момент действует лишь на платформу, но не на гироскоп $(M_2^S = 0)$, то получим следующие аналогичные (14.2) уравнения движения платформы, изображенной на рис. 16.1:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1^S + M_1^K = M_1^S - k\beta, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + d\dot{\beta} &= M_2^K. \end{aligned} \qquad (16.1)$$

Здесь для наложения момента коррекции взят идеальный датчик момента с коэффициентом усиления k, так что $M_1^K = -k\beta$. При более точном анализе система должна быть дополнена уравнением цепи стабилизации, которая учитывает инерцию этой цепи. Однако мы не будем здесь это делать.

О поведении системы при постоянных значениях M_1^S и M_2^K можно судить по уравнениям равновесия

$$\beta_0 = \frac{M_{10}^S}{k}, \qquad \dot{\alpha}_0 = -\frac{M_{20}^K}{H} \tag{16.2}$$

Действие возмущающего момента относительно оси 1 приводит к отклонению по углу β; момент относительно оси 2 порождает вращение вокруг оси 1 с угловой скоростью $\dot{\alpha}$. Фактически наложение момента коррекции M_2^K применяется для того, чтобы получить нужный поворот на угол $\Delta\alpha$.

Поведение системы в динамике характеризуется в принципе теми же соотношениями, которые были получены в п. 14.3.1 для гироскопических стабилизаторов. Из характеристического уравнения

$$\lambda\,(AB\lambda^3 + A\,d\lambda^2 + H^2\lambda + Hk) = 0, \tag{16.3}$$

получаемого из (16.1) при $M_1^S = M_2^K = 0$, следует единственное условие устойчивости

$$AH\,(Hd - Bk) > 0, \tag{16.4}$$

которое соответствует ранее полученному условию (14.25/1). Отсюда ясно, что коэффициент усиления ограничен прежде всего величинами кинетического момента и коэффициента демпфирования:

$$k < \frac{Hd}{B}. \tag{16.5}$$

При коэффициентах демпфирования, которые обычно имеются у интегрирующих гироскопов, ограничение (16.5) в величине k не очень стеснительно. Конечно, требуются специальные стабилизирующие элементы в цепи стабилизации, когда нужно работать с особенно большими коэффициентами усиления или когда коэффициент d очень мал, как это имеет место в случае дважды интегрирующих гироскопов.

16.2.2. Одноосная платформа с позиционным гироскопом. Схема прибора показана на рис. 16.2. Ось внешней рамы совпадает с осью 1. Если рама гироскопа повернется вокруг этой оси на угол α относительно инерциальной системы отсчета, а платформа повернется вокруг той же оси на угол δ (тоже относительно инерциальной системы), то на выходе гироскопа будет измерена разность углов $\delta - \alpha$. Эта величина поступит через усилитель на датчик моментов, установленный на оси 1, и, таким образом, к

платформе окажется приложенным момент $M_1^{KP} = -k(\delta - \alpha)$. Если обозначить через Θ момент инерции платформы, через d_1 — коэффициент демпфирования, возникающего при относительном движении внешней рамы и платформы, и через d_2 — коэффициент

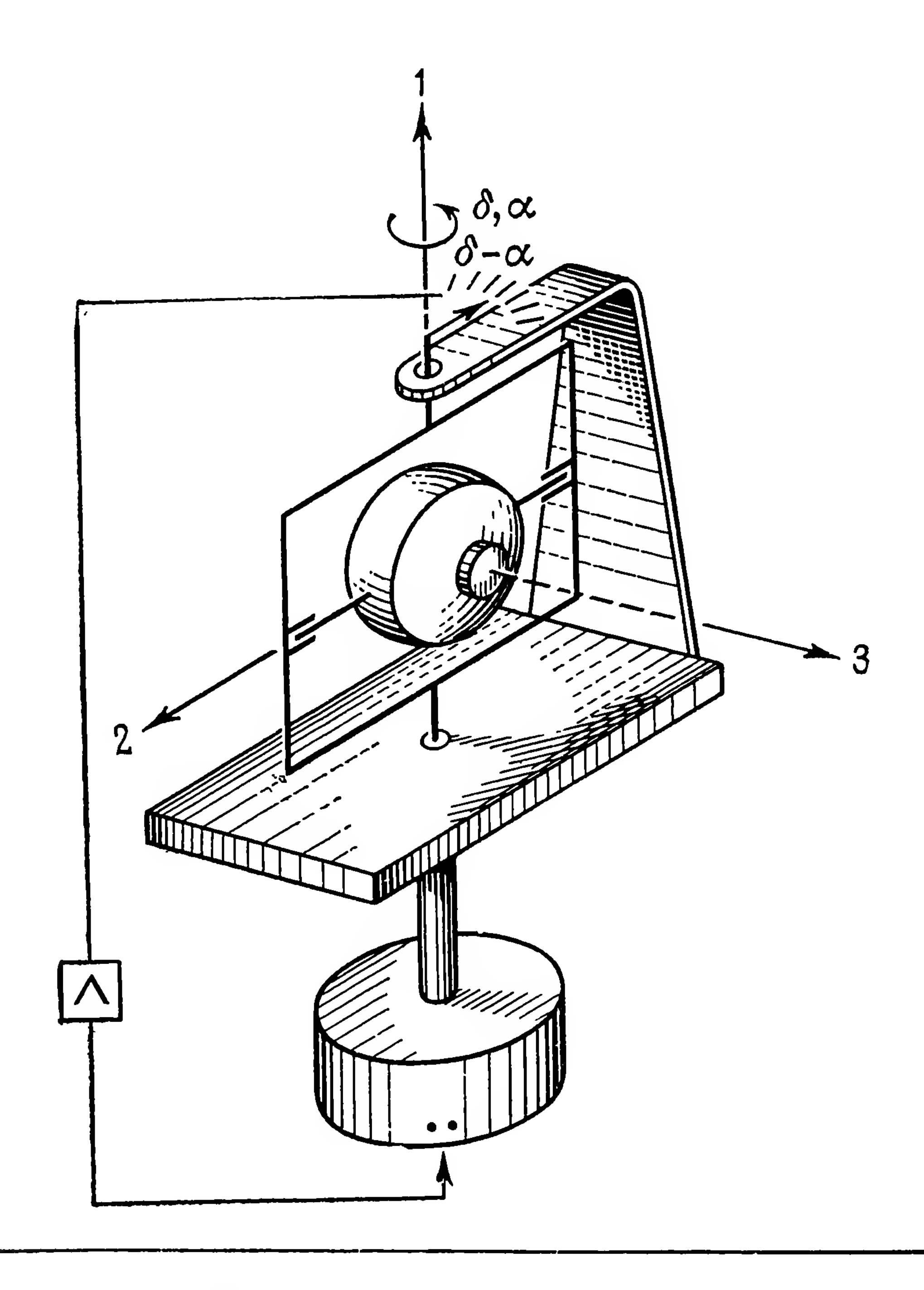


Рис. 16.2. Одноосная стабилизированная платформа с позиционным гироскопом.

демпфирования при вращении вокруг оси внутренней рамы, то уравнения движения запишутся так:

$$\Theta\ddot{\delta} + d_1(\dot{\delta} - \dot{\alpha}) = M_1^{SP} + M_1^{KP} = M_1^{SP} - k(\delta - \alpha).$$
$$A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + d_1(\dot{\alpha} - \dot{\delta}) = 0, \qquad (16.6)$$
$$B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + d_2\dot{\beta} = M_2^K.$$

Статические соотношения для случая постоянных моментов M_1^{SP} и M_2^K опять могут быть получены из уравнений равновесия

$$(\delta - \alpha)_0 = \frac{M_1^{SP}}{k}, \qquad \dot{\alpha}_0 = -\frac{M_2^K}{H}, \qquad \dot{\beta}_0 = 0. \qquad (16.7)$$

Здесь в отличие от (16.2) действие возмущающего момента M_1^{SP} ведет к появлению взаимного поворота платформы и внешней

рамы на угол $(\delta-\alpha)_0$. Момент M_2^K порождает, как и прежде, уход гироскопа со скоростью $\dot{\alpha}_0$. Платформа следует за гироскопом с отставанием на угол $(\delta-\alpha)_0$.

Об устойчивости системы можно судить по характеристическому уравнению системы (16.6); имеем

$$\begin{vmatrix} \Theta\lambda^2+d_1\lambda+k & -d_1\lambda-k & 0 \\ -d_1\lambda & A\lambda^2+d_1\lambda & H\lambda \\ 0 & -H\lambda & B\lambda^2+d_2\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2\{\lambda^4 AB\Theta+\lambda^3(ABd_1+\Theta Ad_2+\Theta Bd_1)+ \\ +\lambda^2(ABk+\Theta d_1d_2+Ad_1d_2+H^2\Theta)+\lambda(Ad_2k+H^2d_1)+H^2k\}=0. \tag{16.8}$$

Отсюда следует, что незадемпфированная система (при $d_1=d_2=0$) в лучшем случае может находиться на границе области устойчивости, так как для нее коэффициенты при λ и λ^3 обращаются в нуль. Поэтому для повышения устойчивости нужно ввести определенное демпфирование. На практике это достигается большей частью подвешиванием гирокамеры в масляной ванне, заполненной жидкостью соответствующей вязкости.

Кроме того, представляет интерес прежде всего влияние коэффициента усиления k. Оно определяется условиями устойчивости, получаемыми из (16.8), а в общем о нем можно судить, руководствуясь даже качественными соображениями. По условиям устойчивости определители Гурвица

$$D^{II}=(ABd_1+\Theta Ad_2+\Theta Bd_1)(ABk+\Theta d_1d_2+Ad_1d_2+H^2\Theta)- \\ -AB\Theta(Ad_2k+H^2d_1), \tag{16.9}$$
$$D^{III}=(Ad_2k+H^2d_1)D^{II}-(ABd_1+\Theta Ad_2+\Theta Bd_1)^2H^2k$$

должны быть положительными. Поскольку при $k>0$ и $D^{III}>0$ неравенство $D^{II}>0$ выполняется автоматически, то из двух условий критическим является $D^{III}>0$. В выражении D^{II} отрицательный член, имеющий множитель k, уничтожается точно таким же положительным слагаемым; следовательно, D^{II} с возрастанием k всегда растет. В выражении D^{III} первый положительный член содержит слагаемое с множителем k^2, в то время как отрицательное слагаемое умножается только на k. Отсюда можно заключить, что рассматриваемая модель, во всяком случае при $k\to\infty$, устойчива и, следовательно, коэффициент усиления не ограничен сверху. Разумеется, необходимо позаботиться о том, чтобы устойчивость не была утеряна при определенных промежуточных значениях k. Как показал Гюбнер [108], в действительности возможно появление промежуточных областей неустойчивости, которые могут быть устранены лишь определенным выбором закона регулирования мо-

мента коррекции M_I^{KP}. В случае же очень большого кинетического момента никаких трудностей не следует ожидать. При $H \to \infty$ уравнение (16.8) принимает вид

$$\lambda^2\{\lambda^2\Theta + \lambda d_I + k\} = 0. \qquad (16.10)$$

Корни этого уравнения, если исключить двухкратный нулевой корень, имеют при всех k отрицательные действительные части. Выражение, стоящее в фигурных скобках, означает, что платформа ведет себя как тело, которое колеблется около неподвижно стоящего гироскопа, будучи задемпфировано и соединено с ним упругой связью.

16.3. Трехосные платформы

В инерциальной навигации применяются исключительно трехосные платформы, в которых, помимо описанных выше эффектов, имеющих место в одноосной платформе, появляются другие — прежде всего взаимное влияние движений вокруг трех осей подвеса. Цепи стабилизации влияют друг на друга таким образом, что возмущающее воздействие на одной оси обычно передается на другие. В дальнейшем это будет объяснено на двух примерах.

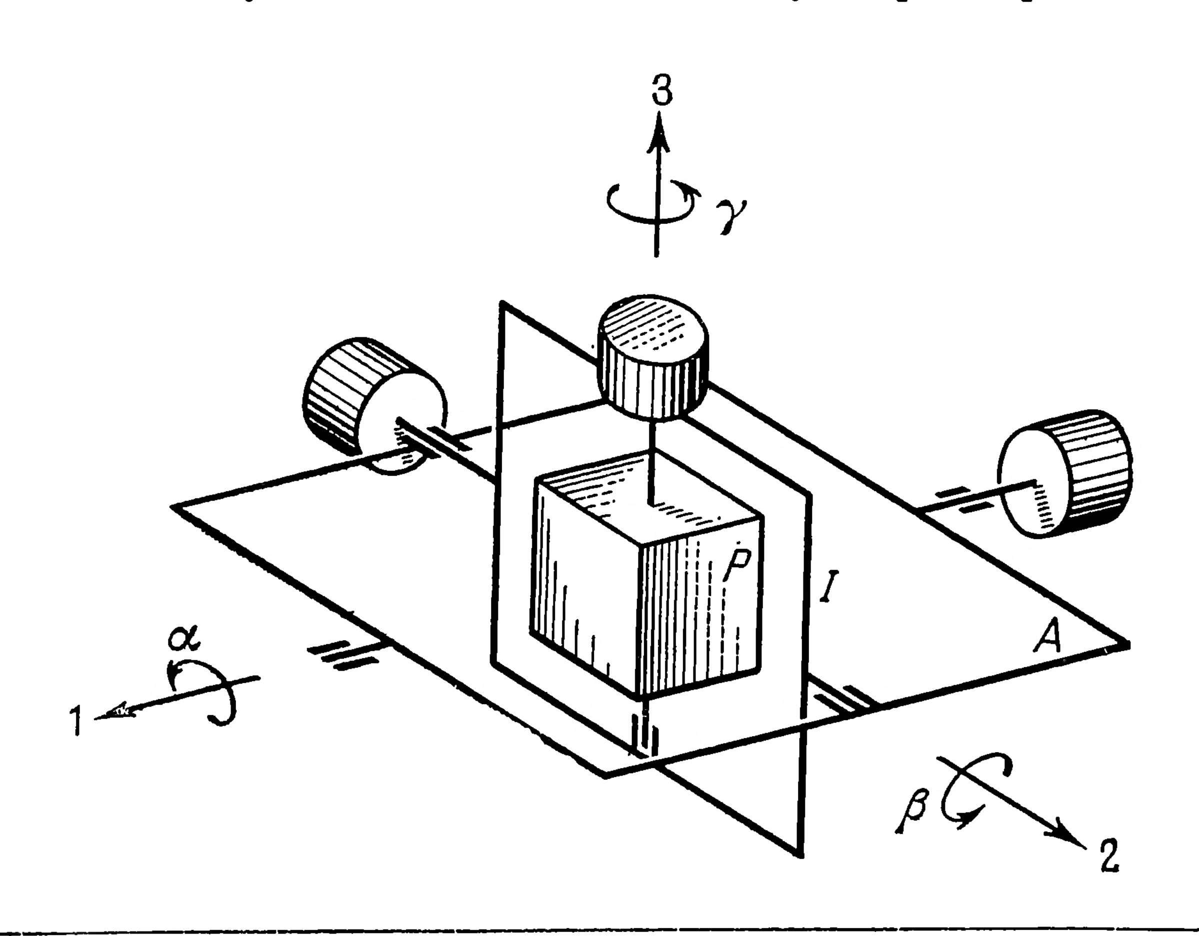


Рис. 16.3. Платформа в трехосном подвесе.

Положим, что платформа, как это примерно показано на рис. 16.3, помещена в полном кардановом подвесе. Для этого потребуются по меньшей мере две рамы — внутренняя рама I и внешняя A. На каждой из трех осей помещен датчик моментов, так что корректирующие моменты M^K можно прикладывать относительно всех трех осей. В зависимости от типа платформы, изо-

браженной на рис. 16.3 лишь в виде ящика, поведение системы будет различным.

16.3.1. Платформа с тремя интегрирующими гироскопами. Для измерения вращений платформы вокруг трех осей рам можно применить поворотные гироскопы, измерительные оси которых параллельны осям рам. Ядро прибора — платформу с гироскопами — можно тогда построить, например, так, как показано на рис. 16.4. Измерительная ось X-гироскопа (Y-, Z-гироскопов) имеет направление оси 1 (осей 2, 3). Положим, что соответствующие оси системы[1]) в нормальном положении прибора параллельны ортогональным осям 1, 2, 3. Пусть они будут также главными осями отдельных частей устройства. Трением пренебрегаем; всю конструкцию считаем абсолютно жесткой. Если еще ограничиться случаем малых отклонений от нормального положения, то известным способом можно получить уравнения движения в линейном приближении. При этом для моментов инерции и абсолютных углов поворотов мы будем применять обозначения, указанные в табл. *a*) и *b*).

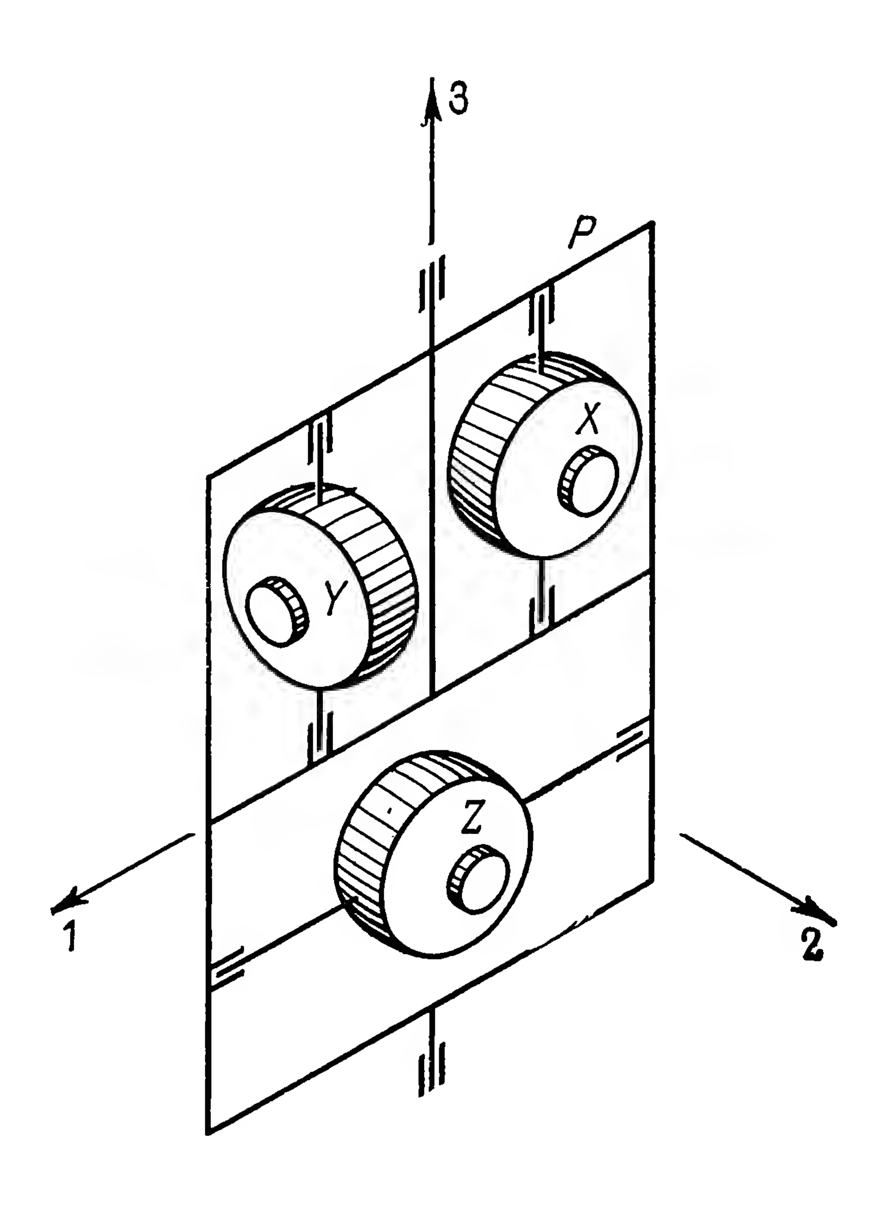


Рис. 16.4. Ядро платформы с тремя интегрирующими гироскопами.

[1]) То есть оси кардановых рам, гирокамер и роторов. — *Прим. ред.*

a) Моменты инерции

	Внешняя рама	Внутренняя рама	Платформа	X-гироскоп	Y-гироскоп	Z-гироскоп
Относительно оси 1	A^A	A^J	A^P	—	—	B
Относительно оси 2	B^A	B^J	B^P	—	—	—
Относительно оси 3	C^A	C^J	C^P	B	B	—

Положим, что величины A^P, B^P, C^P включают в себя и моменты инерции тех частей гироскопов, которые вращаются вместе с платформой. Все гироскопы устроены одинаково, и потому можно считать, что $B^X = B^Y = B^Z = B$. Для сокращения записи введем суммарные моменты инерции $A^R = A^A + A^J + A^P$ и $B^R = B^J + B^P$.

b) Абсолютные углы поворотов

	Платформа	X-гироскоп	Y-гироскоп	Z-гироскоп
Вокруг оси 1	α	α	—	$\alpha+\beta^Z$
Вокруг оси 2	β	—	β	—
Вокруг оси 3	γ	$\gamma+\beta^X$	$\gamma+\beta^Y$	γ

Выходные углы, определяющие поворот каждого из гироскопов относительно рамы, обозначены β^X, β^Y, β^Z.

Если далее принять, что $H^X = H^Y = H^Z = H$ и что направления кинетических моментов роторов совпадают с положительными направлениями соответствующих осей, то при одинаковых коэффициентах демпфирования $d^X = d^Y = d^Z = d$ получаем уравнения движения гироскопов

$$\begin{aligned} X\colon\ & B(\ddot\beta^X + \ddot\gamma) + H\dot\alpha + d\dot\beta^X = 0, \\ Y\colon\ & B(\ddot\beta^Y + \ddot\gamma) - H\dot\beta + d\dot\beta^Y = 0, \\ Z\colon\ & B(\ddot\beta^Z + \ddot\alpha) - H\dot\gamma + d\dot\beta^Z = 0. \end{aligned} \qquad (16.11)$$

При этом остались неучтенными датчики моментов на выходных осях, которые всегда имеются в практически осуществленных приборах. Отсутствуют также моменты упругих связей, так как гироскопы мы полагаем интегрирующими (I-поворотными гироскопами).

Система (16.11) должна быть дополнена уравнениями движения платформы и рам. Учитывая моменты коррекции M^K и возмущающие моменты M^S, а также полагая, что трение в подвесе рам

отсутствует, имеем

$$\begin{aligned} A^R\ddot{\alpha} - H(\dot{\beta}^X + \dot{\gamma}) - d\dot{\beta}^Z &= M_1^K + M_1^S, \\ B^R\ddot{\beta} + H(\dot{\beta}^Y + \dot{\gamma}) &= M_2^K + M_2^S, \\ C^P\ddot{\gamma} + H(\dot{\beta}^Z + \dot{\alpha}) - d(\dot{\beta}^X + \dot{\beta}^Y) &= M_3^K + M_3^S. \end{aligned} \tag{16.12}$$

Моменты коррекции зависят от выходных углов соответствующих гироскопов. Если принять для простоты линейную характеристику момента двигателя стабилизации с одинаковым для всех каналов коэффициентом усиления k, то

$$M_1^K = k\beta^X, \qquad M_2^K = -k\beta^Y, \qquad M_3^K = -k\beta^Z. \tag{16.13}$$

Знаки выбраны таким образом, чтобы ликвидировались возникающие отклонения гироскопов. Подставив выражения (16.13) в (16.12) и присоединив уравнения (16.11), получим полную систему шести дифференциальных уравнений, из которых координаты системы β^X, β^Y, β^Z, α, β, γ могут быть определены как функции времени. Уравнения могут быть разрешены только совместно, поскольку они связаны друг с другом как общей величиной кинетического момента H, так и демпфированием и цепями стабилизации. Схема связей показана в следующей таблице:

		β^X	β^Y	β^Z	α	β	γ
(16.11)	1	●	—	—	●	—	●
	2	—	●	—	—	●	●
	3	—	—	●	●	—	●
(16.12)	4	●	—	●	●	—	●
	5	—	●	—	—	●	●
	6	●	●	●	●	—	●

При другом расположении гироскопов в платформе можно получить другие схемы связей, но сами связи остаются во всех случаях. Они физически обусловлены действием гироскопических сил, а также демпфированием и действием цепей стабилизации.

Полученные уравнения образуют систему девятого порядка, так как углы α, β, γ входят в них не сами, а лишь своими производными первого и второго порядка. Для решения этой системы полезно привести ее к матричной форме

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Fx = s, \tag{16.14}$$

где x — вектор положения, а матрицы M, D, F и вектор s возмущений могут быть получены из уравнений (16.11) и (16.12) с

учетом (16.13). Так как по этим уравнениям движения невозможно судить об общих свойствах системы, здесь будет рассмотрен лишь частный случай постоянного возмущающего момента M^S, а также будут разобраны некоторые приближенные соотношения, характеризующие поведение системы во времени.

При *постоянных возмущающих моментах* M^S в положении равновесия, т. е. в установившемся состоянии, правые части уравнений (16.12) обращаются в нуль. Учитывая (16.13), получаем для углов отклонений равенства

$$\beta_0^X = -\frac{M_{10}^S}{k}, \qquad \beta_0^Y = \frac{M_{20}^S}{k}, \qquad \beta_0^Z = \frac{M_{30}^S}{k}. \tag{16.15}$$

Тогда из (16.11) следует, что стационарные значения скоростей $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = \dot{\gamma}_0 = 0$; следовательно, после достижения стационарного состояния платформа далее не отклоняется, так как возмущающие моменты скомпенсированы датчиками моментов. Следует, однако, учитывать, что до установления равновесия платформа совершила определенный поворот. Действительно, пусть платформа отъюстирована так, что при отсутствии возмущающего момента и при покоящейся платформе $\alpha = \beta = \gamma = \beta^X = \beta^Y = \beta^Z = 0$; тогда из (15.15) или (16.11) для квазистационарного движения получаются следующие соотношения между угловыми координатами гироскопов и платформы:

$$\beta^X = -\frac{H}{d}\alpha, \qquad \beta^Y = \frac{H}{d}\beta, \qquad \beta^Z = \frac{H}{d}\gamma. \tag{16.16}$$

Отсюда с учетом (16.15) получаются выражения для отклонений платформы, вызванных действием возмущающих моментов:

$$\alpha_0 = \frac{d}{kH} M_{10}^S, \qquad \beta_0 = \frac{d}{kH} M_{20}^S, \qquad \gamma_0 = \frac{d}{kH} M_{30}^S. \tag{16.17}$$

Эти величины в общем очень малы, так как величина $K = kH/d$ для осуществленных приборов принимает большие значения. Уже сам коэффициент усиления H/d в интегрирующем гироскопе обычно находится примерно в пределах между 20 и 80.

Поведение платформы во времени может быть выяснено при рассмотрении корней характеристического уравнения девятого порядка (или в результате исследования соответствующих сложных передаточных функций). Это, однако, возможно только в том случае, когда заданы конкретные численные значения параметров. Вместо этого мы рассмотрим вопрос в приближенной постановке, при которой уравнения упрощаются благодаря пренебрежению собственными колебаниями гироскопов. Тогда можно в уравнения (16.12) подставить вместо углов β^X, β^Y, β^Z их стационарные значения, полученные из (16.16). Таким образом, вся система сво-

дится к трем уравнениям относительно угловых координат платформы α, β и γ:

$$\begin{aligned} &A^R\ddot{\alpha} + \frac{H^2}{d}\dot{\alpha} + \frac{kH}{d}\alpha - 2H\dot{\gamma} = M_1^S, \\ &B^R\ddot{\beta} + \frac{H^2}{d}\dot{\beta} + \frac{kH}{d}\beta + H\dot{\gamma} = M_2^S, \\ &C^P\ddot{\gamma} + \frac{H^2}{d}\dot{\gamma} + \frac{kH}{d}\gamma + 2H\dot{\alpha} - H\dot{\beta} = M_3^S. \end{aligned} \tag{16.18}$$

Эта упрощенная система шестого порядка, как и полная исходная система девятого порядка, не позволяет еще сделать какие-либо заключения общего характера. Однако можно получить оценки, если учесть, что коэффициент усиления H/d велик. Если все угловые скорости $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ — величины одного порядка, то *в среднем*

$$\frac{H}{d}\dot{\alpha} \gg \dot{\gamma}, \quad \frac{H}{d}\dot{\beta} \gg \dot{\gamma}, \quad \frac{H}{d}\dot{\gamma} \gg \dot{\alpha}, \quad \frac{H}{d}\dot{\gamma} \gg \dot{\beta}.$$

Если в уравнениях (16.18) опустить малые члены, то система уравнений распадается. Остаются три уравнения, каждое из которых описывает колебания платформы вокруг одной из трех осей. Собственные колебания в общем случае сильно задемпфированы или даже являются апериодическими, так что опасность потери устойчивости отсутствует. Однако этим результатом можно пользоваться лишь в том случае, когда собственные частоты платформы пренебрежимо малы по сравнению с частотами собственных колебаний гироскопов, которыми мы выше пренебрегли. Но это условие далеко не всегда выполняется. В действительности часто оказывается, что платформы рассматриваемого типа чувствительны к вибрационным колебаниям и потому нельзя делать коэффициент усиления k цепи стабилизации сколь угодно большим. При задании числовых значений параметров граница допустимых величин k без труда определяется из неупрощенных уравнений движения. Граничное значение (16.5), вычисленное для одноосной платформы, может служить здесь в качестве контрольной величины.

16.3.2. Платформа с двумя позиционными гироскопами. В случае когда датчиками угловых координат платформы служат позиционные гироскопы, вычисления протекают аналогично тому, как это было в п. 16.3.1. На рис. 16.5 изображено ядро платформы, соответствующее этому случаю. И здесь имеются различные устройства, которые, однако, не отличаются своими принципиальными свойствами.

X-гироскопом (Y-гироскопом) теперь назван гироскоп, ось фигуры которого параллельна оси 1 (оси 2). Он может измерять повороты платформы вокруг осей 2 и 3 (1 и 3). Если углы, на которые повернуты гироскопы относительно платформы, обозначить

через α^X, α^Y (поворот вокруг оси внешней рамы гироскопа) и β^X, β^Y (поворот вокруг оси внутренней рамы), то получим следующие уравнения движения гироскопов:

$$\begin{aligned} X\colon\ & A(\ddot{\alpha}^X+\ddot{\gamma})-H(\dot{\beta}^X+\dot{\beta})+d\dot{\alpha}^X=0,\\ & B(\ddot{\beta}^X+\ddot{\beta})+H(\dot{\alpha}^X+\dot{\gamma})+d\dot{\beta}^X=0,\\ Y\colon\ & A(\ddot{\alpha}^Y+\ddot{\alpha})-H(\dot{\beta}^Y+\dot{\gamma})+d\dot{\alpha}^Y=0,\\ & B(\ddot{\beta}^Y+\ddot{\gamma})+H(\dot{\alpha}^Y+\dot{\alpha})+d\dot{\beta}^Y=0. \end{aligned} \tag{16.19}$$

Здесь A — суммарный момент инерции внешней рамы, внутренней рамы и ротора одного позиционного гироскопа относительно оси

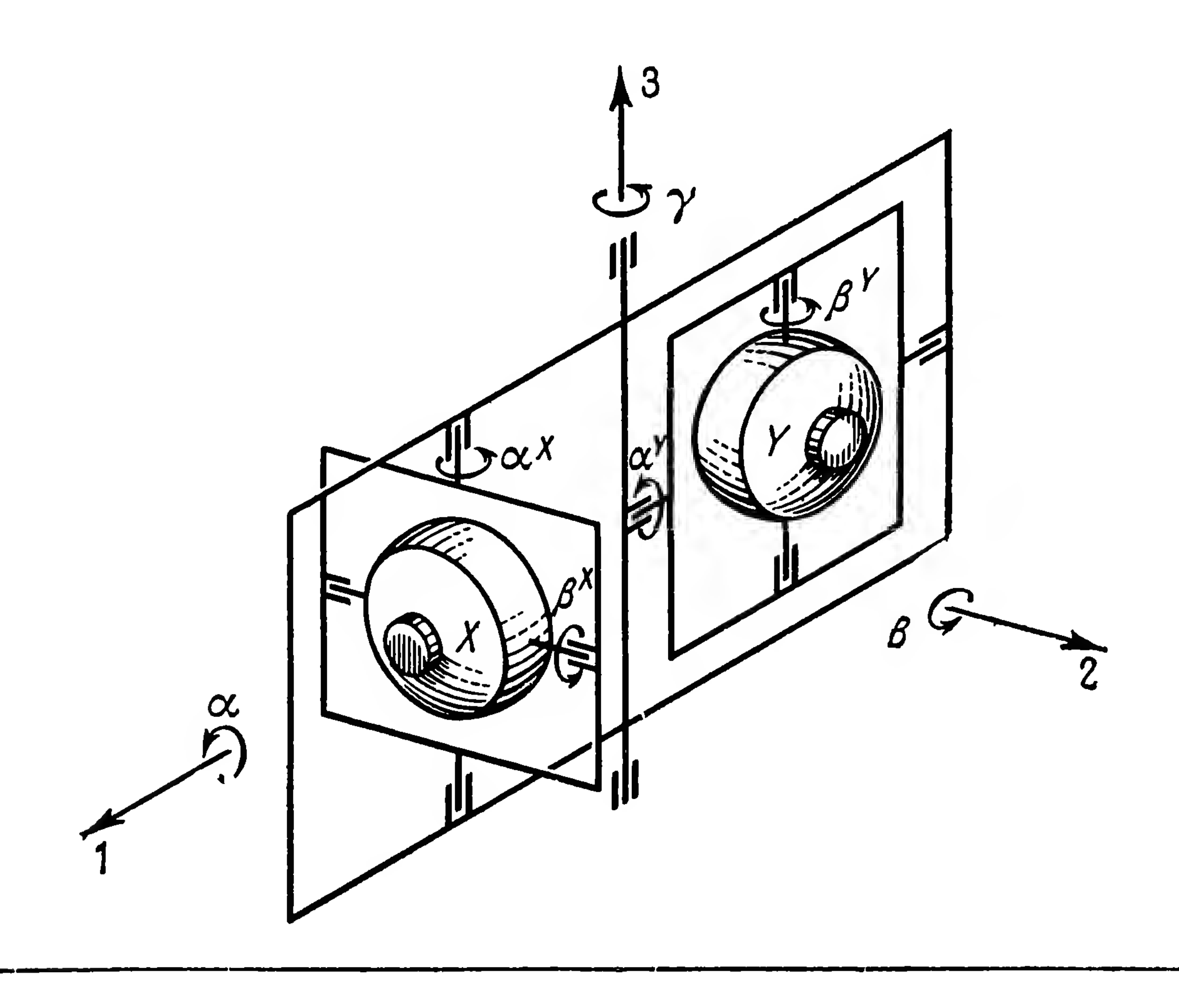


Рис. 16.5. Ядро платформы с двумя позиционными гироскопами.

внешней рамы, B — суммарный момент инерции внутренней рамы и ротора относительно оси внутренней рамы. Оба позиционных гироскопа одинаковы, причем коэффициенты демпфирования d также одинаковы. Уравнения движения платформы в обозначениях п. 16.3.1 имеют вид

$$\begin{aligned} & A^R\ddot{\alpha}-d\dot{\alpha}^Y=M_1^K+M_1^S,\\ & B^R\ddot{\beta}-d\dot{\beta}^X=M_2^K+M_2^S,\\ & C^P\ddot{\gamma}-d(\dot{\alpha}^X+\dot{\beta}^Y)=M_3^K+M_3^S. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Снова положим, что моменты коррекции M^K пропорциональны соответствующим выходным сигналам гироскопов. Поворот платформы на угол γ вокруг оси 3 измеряется дважды, потому что

в каждом из гироскопов имеется измерительная ось, совпадающая с этим направлением. Момент коррекции M_3^K положим пропорциональным среднему значению измеряемых величин, так как имеет смысл воспользоваться избыточностью информации:

$$M_1^K = k\alpha^Y, \qquad M_2^K = k\beta^X, \qquad M_3^K = k(\alpha^X + \beta^Y)/2. \qquad (16.21)$$

После подстановки этих соотношений в (16.20) в нашем распоряжении для расчета системы имеется всего семь уравнений. Из-за наличия различных взаимосвязей они также могут быть решены лишь совместно. Схема связей показана в следующей таблице:

		α^X	β^X	α^Y	β^Y	α	β	γ
(16.19)	1	●	●	—	—	—	●	●
	2	●	●	—	—	—	●	●
	3	—	—	●	●	●	—	●
	4	—	—	●	●	●	—	●
(16.20)	5	—	—	●	—	●	—	—
	6	—	●	—	—	—	●	—
	7	●	—	—	●	—	—	●

И в этом случае невозможно добиться ликвидации указанных связей за счет иного расположения гироскопов в платформе. Однако в отличие от ранее рассмотренной платформы с тремя интегрирующими гироскопами здесь в уравнениях платформы не появляются гироскопические моменты, так что связь между движениями гироскопов и платформы осуществляется лишь через демпфирование и цепи стабилизации.

Система уравнений движения теперь имеет одиннадцатый порядок, следовательно, на два порядка выше, чем в исследованном ранее случае. Для численных расчетов ее приводят к матричной форме (16.14), причем матрицы M, D и F, а также вектор s легко найти из уравнений (16.19) и (16.20) с учетом соотношений (16.21). Мы и здесь довольствуемся исследованием стационарного случая и *приближенным рассмотрением* временны́х соотношений.

В случае *постоянных возмущений* M^S моменты, стоящие в правых частях уравнений (16.20), после затухания возможных собственных колебаний взаимно уничтожаются и показания прибора определяются следующими соотношениями:

$$\alpha_0^Y = -\frac{1}{k} M_{10}^S, \qquad \beta_0^X = -\frac{1}{k} M_{20}^S, \qquad \alpha_0^X + \beta_0^Y = -\frac{2}{k} M_{30}^S. \qquad (16.22)$$

Уходы платформы можно оценить следующим образом: в квазистационарном режиме в уравнениях (16.19) остаются лишь члены

с первыми производными. Решение получившейся системы линейных уравнений имеет вид

$$\dot{\alpha}^X = \frac{H\,d\dot{\beta} - H^2\dot{\gamma}}{H^2 + d^2}, \qquad \dot{\beta}^X = -\frac{Hd\dot{\gamma} + H^2\dot{\beta}}{H^2 + d^2},$$
$$\dot{\alpha}^Y = \frac{H\,d\dot{\gamma} - H^2\dot{\alpha}}{H^2 + d^2}, \qquad \dot{\beta}^Y = -\frac{H\,d\dot{\alpha} + H^2\dot{\gamma}}{H^2 + d^2}. \tag{16.23}$$

Если принять во внимание, что почти всегда $d^2 \ll H^2$, то из (16.23) интегрированием при соответствующих начальных условиях можно получить

$$\alpha^X \approx -\gamma + \frac{d}{H}\beta, \qquad \beta^X \approx -\beta - \frac{d}{H}\gamma,$$
$$\alpha^Y \approx -\alpha + \frac{d}{H}\gamma, \qquad \beta^Y \approx -\gamma - \frac{d}{H}\alpha. \tag{16.24}$$

Таким образом, выходные данные гироскопов не соответствуют, как это было бы желательно, углам поворота платформы; каждое из них содержит некоторую часть другого угла поворота платформы. Так как величина d/H в общем случае мала, ошибка совершенно незначительна. Если теперь подставить (16.24) в (16.22), то получится система линейных уравнений относительно α, β, γ, решение которой после отбрасывания малых членов, содержащих множитель $(d/H)^2$, приводится к виду

$$\alpha_0 \approx \frac{1}{k}\left[M_{10}^S + \frac{d}{H} M_{30}^S\right],$$
$$\beta_0 \approx \frac{1}{k}\left[M_{20}^S - \frac{d}{H} M_{30}^S\right], \tag{16.25}$$
$$\gamma_0 \approx \frac{1}{k}\left[M_{30}^S + \frac{d}{2H}\left(M_{20}^S - M_{10}^S\right)\right].$$

Следовательно, из-за наличия демпфирования возмущающие моменты, действующие относительно одной оси, приводят к поворотам вокруг других осей. В этом отличие от результатов (16.17), полученных ранее для платформы с тремя интегрирующими гироскопами. Однако эта перекрестная связь является весьма слабой.

Чтобы получить соотношения, характеризующие поведение платформы во времени, применим для обоих гироскопов технические приближенные уравнения, пренебрегая в (16.19) слагаемыми, содержащими ускорения. Тогда справедливы приближенные равенства (16.24), подставив которые в уравнения платформы (16.20), приходим к упрощенной системе:

$$A^R\ddot{\alpha} + d\dot{\alpha} + k\alpha - \frac{d^2}{H}\dot{\gamma} - \frac{kd}{H}\gamma = 0,$$
$$B^R\ddot{\beta} + d\dot{\beta} + k\beta + \frac{d^2}{H}\dot{\gamma} + \frac{kd}{H}\gamma = 0, \tag{16.26}$$
$$C^P\ddot{\gamma} + 2\,d\dot{\gamma} + k\gamma + \frac{d^2}{H}(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) + \frac{kd}{H}(\alpha - \beta) = 0.$$

Отсюда видно, что в предельном случае при $d/H \to 0$ система полностью распадается на самостоятельные уравнения, которые описывают колебания рам вокруг неподвижного гироскопа. Частота этих колебаний у существующих приборов находится примерно в интервале между 5 и 20 Гц. Так как частота нутаций позиционных гироскопов составляет примерно 100 Гц, приближения, сделанные выше, можно считать практически приемлемыми. Можно поэтому полагать, что некоторое увеличение коэффициента усиления k не приведет к возникновению колебаний платформы. Сказанное было подтверждено на конкретном примере численным интегрированием точных уравнений. Поэтому полученные на одноосной модели результаты, относящиеся к временны́м характеристикам, в основном остаются справедливыми и для трехосных платформ.

16.4. Настройка платформ

При исследовании гировертикали в § 12.3 один из важнейших результатов состоял в следующем: как гироскопический, так и физический маятник можно путем надлежащего выбора параметров настроить так, чтобы возникающие ошибки прибора были минимальными. Это справедливо и для платформ, применяемых в технике инерциальной навигации. Получим эти зависимости на примере горизонтируемой платформы, которая часто применяется при навигации на поверхности Земли.

16.4.1. Настройка синтезированного маятника. Тяжелый маятник является колебательной системой, свойства которой могут быть

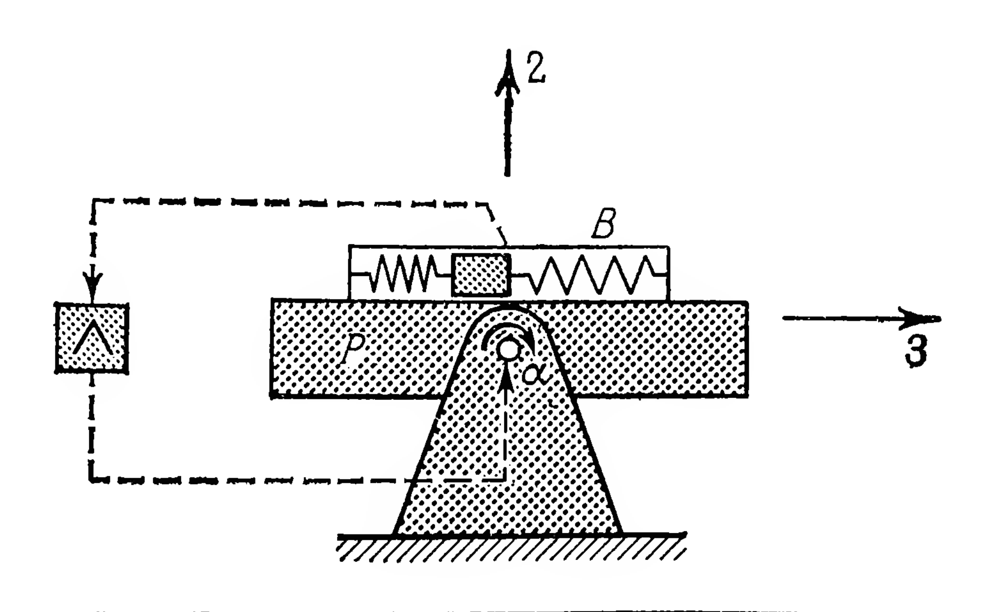


Рис. 16.6. Синтезированный маятник, состоящий из платформы, акселерометра и цепи стабилизации.

объяснены совместным действием сил инерции и движущих сил. Но такие же силы можно реализовать и искусственно в синтезированной системе, как это для примера изображено на рис. 16.6. В этом синтезированном маятнике платформа P может свободно

вращаться вокруг горизонтальной оси 1, проходящей через центр масс платформы. На ней установлен акселерометр B, который при отклонении платформы от горизонта посылает сигнал в датчик момента (сервомотор), прикладывающий момент относительно оси вращения платформы. Знак момента выбирается так, чтобы наклон платформы уменьшался.

Исследуем теперь поведение синтезированного маятника при движении его основания по дуге большого круга Земли (рис. 16.7).

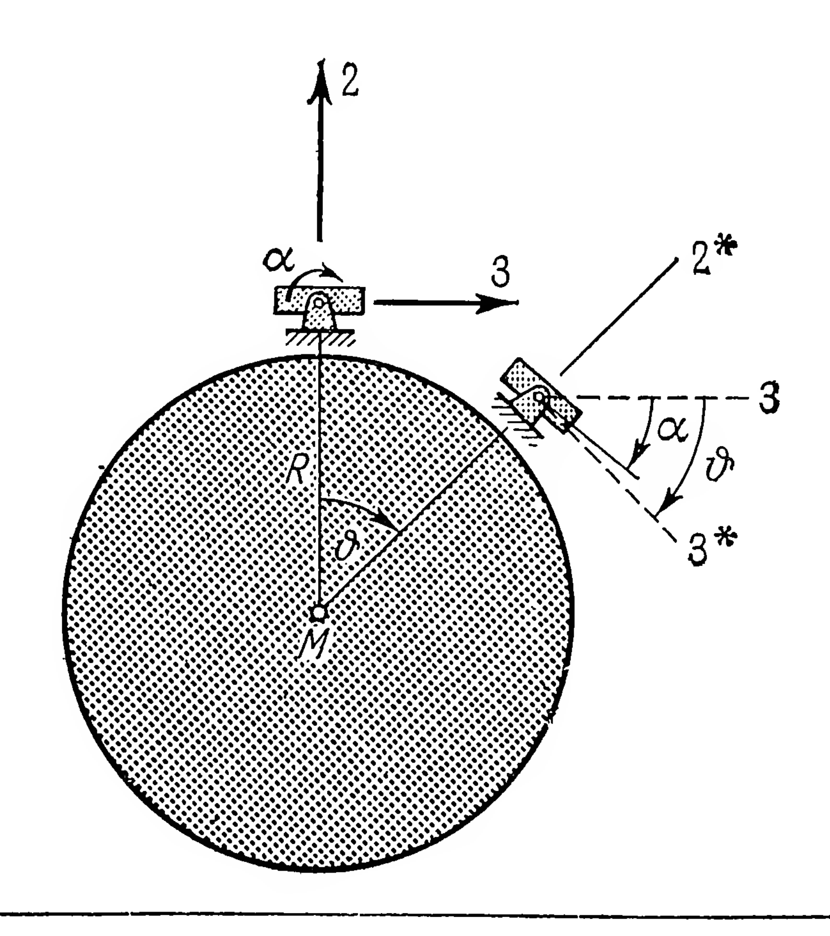


Рис. 16.7 Движение платформы по дуге большого круга Земли.

Через ϑ обозначим угол, на который повернется радиус-вектор, проведенный из центра M Земли к объекту, несущему на себе маятник. Если α — абсолютный угол поворота платформы и $\dot{v} = R\ddot{\vartheta}$ — ускорение объекта при его движении по Земле, то при $(\alpha - \vartheta) \ll 1$ акселерометр регистрирует величину

$$b^M = \dot{v} - g(\alpha - \vartheta). \qquad (16.27)$$

Если принять линейную характеристику момента, развиваемого сервомотором, то момент коррекции можно положить равным

$$M_1^K = kb^M = k[\dot{v} - g(\alpha - \vartheta)]. \qquad (16.28)$$

Уравнение движения маятника имеет вид

$$A\ddot{\alpha} = M_1^K + M_1^G. \qquad (16.29)$$

Здесь M_1^G — суммарный момент сил тяготения, который имеется и тогда, когда ось 1 проходит через центр масс. Согласно формуле (8.8), в данном случае опять-таки при $(\alpha - \vartheta) \ll 1$, имеем

$$M_1^G = \frac{3g}{R}(B - C)(\alpha - \vartheta). \qquad (16.30)$$

Подставив в (16.29) значения величин, взятые из (16.28) и (16.30), получим

$$A\ddot{\alpha} + \left[kg - \frac{3g}{R}(B - C)\right](\alpha - \vartheta) = k\dot{v}. \tag{16.31}$$

При выполнении *условия настройки*

$$k = \frac{A}{R}, \tag{16.32}$$

вследствие того, что $\dot{v} = R\ddot{\vartheta}$, уравнение (16.31) можно привести к виду

$$A(\ddot{\alpha} - \ddot{\vartheta}) + \left[\frac{gA}{R} - \frac{3g}{R}(B - C)\right](\alpha - \vartheta) = 0. \tag{16.33}$$

Это уравнение движения имеет частное решение

$$\alpha = \vartheta, \tag{16.34}$$

которое означает, что платформа P маятника остается горизонтальной при любом движении объекта по дуге большого круга. Таким образом, найдено условие настройки [соотношение (16.32)], обеспечивающей полную независимость маятника от ускорений движения объекта. Если начальные условия не соответствуют частному решению (16.34) или имеются возмущающие воздействия, то, как это видно из уравнения (16.33), маятник совершает незатухающие колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt{\frac{A}{A - 3(B - C)}}. \tag{16.35}$$

Этот результат полностью соответствует формуле (12.60), полученной в п. 12.3.3 для простого тяжелого маятника. Следует отметить, что в исследованном нами синтезированном маятнике нельзя пренебрегать моментом градиента сил тяжести. Только при симметричном относительно оси 1 эллипсоиде инерции, т. е. при $B = C$, получается известный период Шулера $T = 2\pi\sqrt{R/g} = 84$ мин. В зависимости от соотношений между моментами инерции действительные периоды колебаний системы, изображенной на рис. 16.6, лежат в интервале от 42,2 мин до ∞.

16.4.2. Горизонтируемая управляемая платформа. Простейшая система, изображенная на рис. 16.6, мало пригодна для технических приложений. Ее дополняют введением следящей системы (рис. 16.8), назначение которой — сообщать платформе задаваемую угловую скорость $\dot{\alpha}_{\text{soll}}$, подчиняющуюся закону

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_{\text{soll}} = \frac{1}{R}\int b^M\,dt. \tag{16.36}$$

При идеальном регулировании с учетом (16.27) уравнение движения получается в виде

$$A\ddot{\alpha} = M_1^K = A\ddot{\alpha}_{\mathrm{soll}} = \frac{A}{R} b^M = \frac{A}{R}[\dot{v} - g(\alpha - \vartheta)],$$

или при $\dot{v} = R\ddot{\vartheta}$

$$(\ddot{\alpha} - \ddot{\vartheta}) + \frac{g}{R}(\alpha - \vartheta) = 0. \qquad (16.37)$$

Это уравнение также имеет желаемое частное решение $\alpha = \vartheta$. Благодаря регулированию по закону (16.36) период колебаний системы всегда равен

$$T = 2\pi\sqrt{R/g} = 84{,}4 \text{ мин}. \qquad (16.38)$$

Колебания возникают тогда, когда в начальных условиях имеются ошибки. В отличие от рассмотренного выше маятника в данном

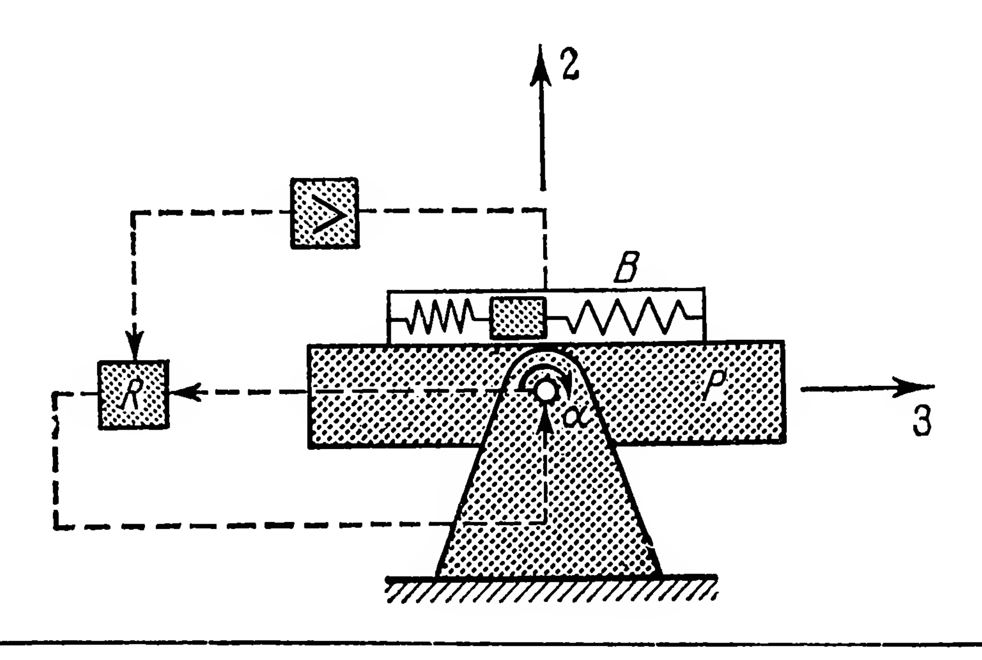


Рис. 16.8. Горизонтируемая платформа со следящей системой.

случае при правильно настроенном контуре колебания системы происходят в точности с периодом Шулера. Момент градиента сил тяжести выступает здесь лишь как возмущающий момент, который полностью компенсируется следящей системой, так как предполагается, что регулирование является идеальным. Трудности, которые всегда возникают при реализации подвеса платформы, в системе, построенной согласно рис. 16.8, преодолеваются легче, чем в маятнике, изображенном на рис. 16.6.

Закон регулирования (16.36) означает, что угловая скорость $\dot{\alpha}$ платформы точно соответствует угловой скорости $\dot{\vartheta}$ радиуса-вектора, проведенного из центра Земли к месту расположения объекта. Если положить, что начальные условия были соблюдены точно, то ось 2 будет всегда совпадать с направлением вертикали места [1]).

[1]) Разумеется, $\dot{\alpha}$ будет в точности совпадать с $\dot{\vartheta}$ при условии, что величина b^M, выдаваемая акселерометром, не содержит составляющую от силы тяжести; но при точной начальной выставке платформы эта составляющая отсутствует. — *Прим. ред.*

Цепь регулирования (рис. 16.8) может быть реализована так, как это изображено на рис. 16.9. Нужная угловая скорость $\dot{\alpha}_{\mathrm{soll}}$ создается датчиком момента, установленным на выходной оси поворотного гироскопа, который служит чувствительным измерителем угловой скорости платформы. Благодаря действию следящей системы, состоящей из усилителя и серводвигателя, средняя величина угла отклонения гироскопа всегда остается равной нулю.

Момент коррекции M_2^K делается равным интегралу от выходной величины b^M акселерометра, так что

$$M_2^K = k_2 \int b^M\,dt = -\frac{H}{R} \int b^M\,dt. \tag{16.39}$$

Именно тогда в стационарном состоянии точно выполняется условие (16.36).

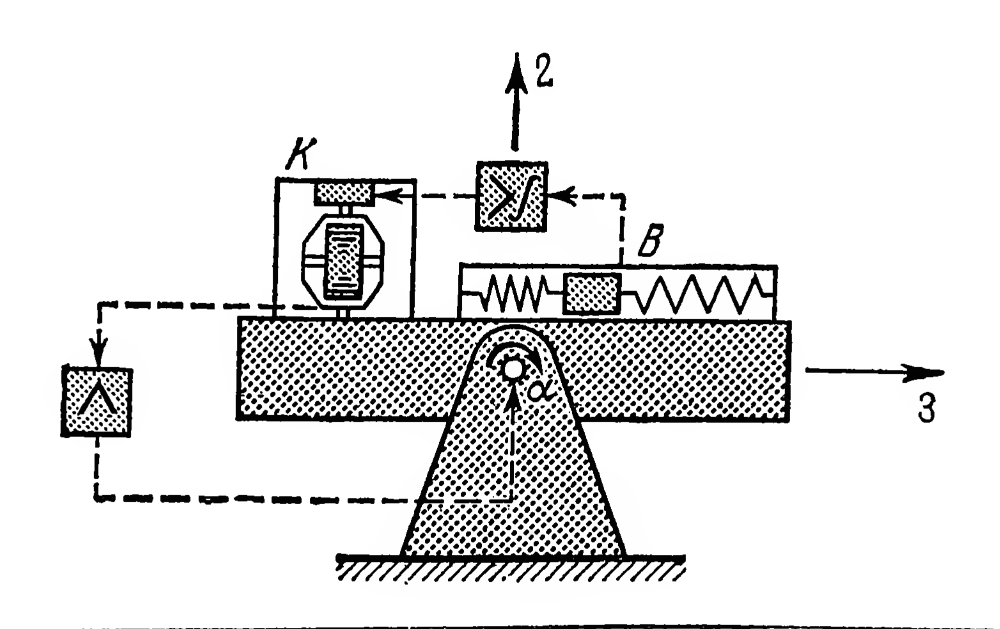


Рис. 16.9. Горизонтируемая платформа со следящей системой, акселерометром B и поворотным гироскопом K.

В реальных системах имеются отклонения от равенства (16.36). Они могут быть оценены при рассмотрении уравнений движения. Вместо простейшего уравнения движения (16.37) следует тогда составить уравнения моментов, действующих как относительно оси 1, так и относительно оси рамы гироскопа (рис. 16.9); имеем

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= M_1^K + M_1^S = -k_1\beta, \\ B^K\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + d\dot{\beta} + c\beta &= M_2^K = -\frac{H}{R} \int b^M\,dt. \end{aligned} \tag{16.40}$$

С учетом (16.27) эти уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + k_1\beta &= M_1^S, \\ B^K\ddot{\beta} + d\dot{\beta} + c\beta - H \int \left[(\ddot{\alpha} - \ddot{\vartheta}) + \frac{g}{R}(\alpha - \vartheta)\right] dt &= 0. \end{aligned} \tag{16.41}$$

При заданном движении объекта по земной поверхности $\vartheta = \vartheta(t)$ является известной возмущающей функцией. Поэтому из (16.41)

может быть найдено вынужденное движение системы, прежде всего поведение функции $\alpha(t)$. Из (16.41/2) следует, что существованию идеального решения $\alpha - \vartheta = 0$ возможного, впрочем, лишь при настройке системы по Шулеру, мешает переходный процесс в гироскопе. Но возмущения могут создаваться и цепью стабилизации (16.41/1). Поведение системы во времени можно выяснить, исследовав передаточную функцию, соответствующую уравнениям (16.41), или рассмотрев корни характеристического уравнения

$$\lambda^5 AB^K + \lambda^4 Ad + \lambda^3 (H^2 + Ac) + \lambda^2 k_1 H + \lambda \frac{H^2}{R} g + \frac{Hgk_1}{R} = 0. \quad (16.42)$$

Вполне допустимо считать, что $H^2 \gg Ac$. Если теперь пренебречь переходным процессом в гироскопе, что сводится к отбрасыванию обоих членов с высшими степенями λ, то (16.42) можно представить приближенно так:

$$H\left(\lambda^2 + \frac{g}{R}\right)(\lambda H + k_1) \approx 0. \quad (16.43)$$

Уравнение (16.43) имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{R}{g}}, \qquad \lambda_3 = -\frac{k_1}{H}. \quad (16.44)$$

Этот результат указывает на то, что на 84-минутные колебания платформы накладывается еще апериодический переходный процесс в цепи стабилизации. Вместе с тем происходит и успокоение колебаний гироскопа, которыми мы до сих пор пренебрегали.

16.4.3. Путевая погрешность платформы, в которой осуществлено условие настройки. Чтобы убедиться в преимуществах платформы, настроенной на период Шулера (84,4 мин), рассмотрим простой случай, когда основание платформы неподвижно и ей придан начальный наклон $\alpha = \alpha_0$. Это изображено в верхней части рис. 16.10; на кривых, расположенных ниже, показано, как изменяются с течением времени величины

$$b^M, \qquad v^M = \int b^M\,dt, \qquad s^M = \int v^M\,dt, \quad (16.45)$$

соответствующие данному случаю. Величину v^M, получаемую интегрированием измеренной величины b^M, можно назвать *погрешностью в скорости*, а величину s^M — *путевой погрешностью*. Вследствие того что имеется $\alpha = \alpha_0$, акселерометр в соответствии с (16.27) ложно показывает сначала отрицательное ускорение. Поэтому после интегрирования возникают отличные от нуля значения v^M и s^M, представляющие собой погрешности, так как основание платформы в действительности неподвижно. Платформа, как

это было показано ранее, совершает колебания с частотой Шулера $\omega^S = \sqrt{g/R}$:

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega^S t. \tag{16.46}$$

То, что эти колебания должны возникнуть, наглядно видно из кривых на рис. 16.10, если принять во внимание, что платформа вращается с угловой скоростью v^M/R и вместе с тем на это движение

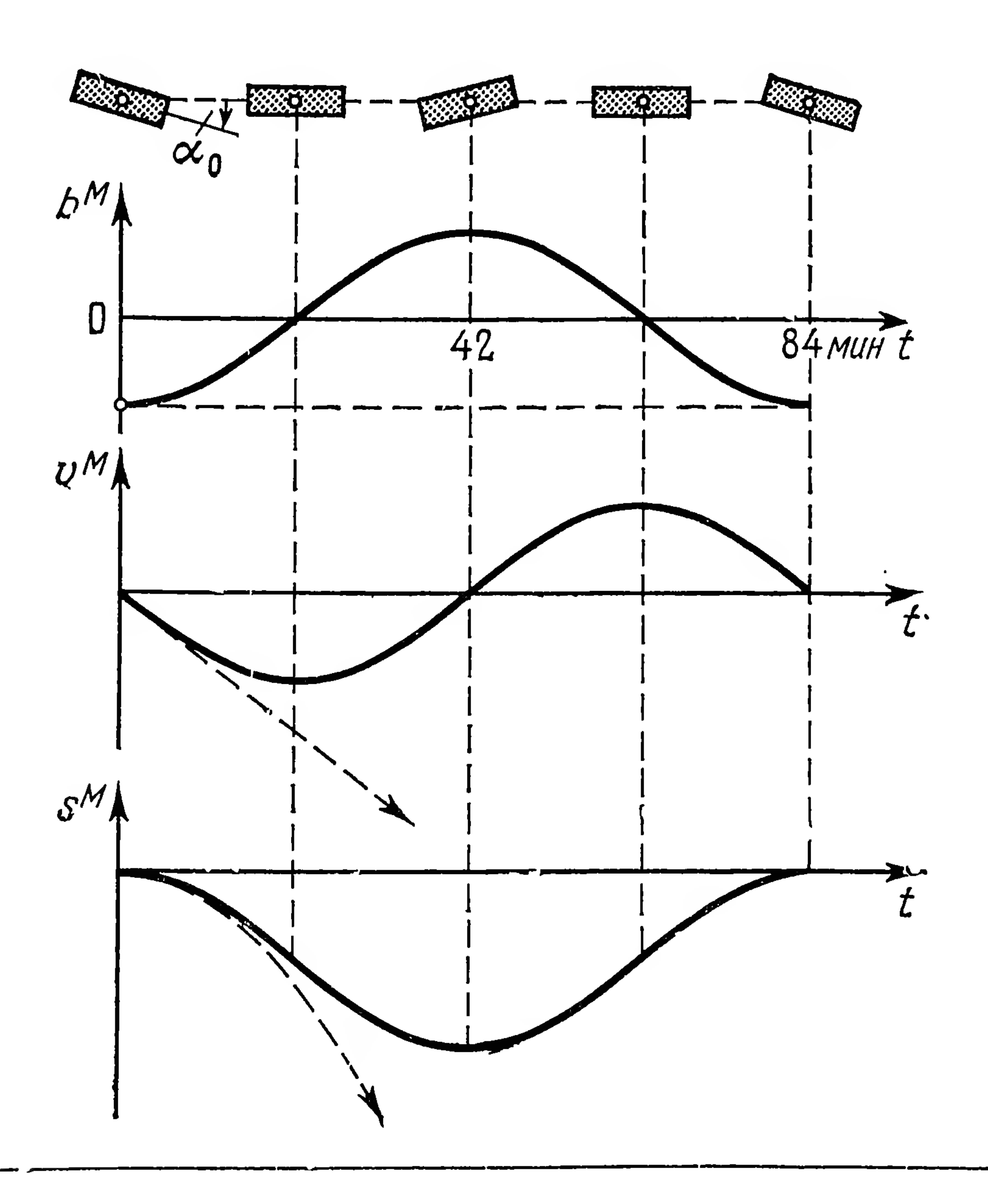


Рис. 16.10. Погрешности в измерении ускорения, скорости и пути, возникающие при начальном отклонении платформы на угол α_0. Штриховые кривые соответствуют платформе, не имеющей коррекции от маятника.

влияет измеренная величина b^M. Из (16.45) интегрированием при начальных данных $v^M(0) = 0$, $s^M(0) = 0$ получается

$$\begin{aligned} b^M &= -g\alpha = -g\alpha_0 \cos \omega^S t, \\ v^M &= -\frac{g\alpha_0}{\omega^S} \sin \omega^S t = -\alpha_0 \sqrt{gR} \sin \omega^S t, \\ s^M &= -\frac{g\alpha_0}{(\omega^S)^2}(1 - \cos \omega^S t) = -R\alpha_0 (1 - \cos \omega^S t). \end{aligned} \tag{16.47}$$

Эти функции представлены на рис. 16.10. В то время как скорость и ускорение колеблются периодически с амплитудами $\alpha_0 \sqrt{gR}$ и $g\alpha_0$ около средней величины, равной нулю, функция s^M изменяется также периодически от нуля до максимальной величины $2R\alpha_0$.

На рис. 16.10 штриховыми линиями показаны те функции, которые получатся, если платформа управляется лишь членом $b^M = \dot{v}$, содержащимся в выражении (16.27), но не используется характерное для маятника слагаемое $g(\alpha - \vartheta)$. Считая теперь, что $b^M = b_0^M$, т. е. что величина b^M остается равной начальной погрешности $b_0^M = -g\alpha_0$, получаем

$$\begin{aligned} b^M &= b_0^M = \text{const}, \\ v^M &= b_0^M t, \\ s^M &= {}^1/_2 b_0^M t^2. \end{aligned} \tag{16.48}$$

Погрешность в скорости растет здесь линейно, а путевая погрешность — пропорционально квадрату времени. Погрешности (16.48) во всех случаях больше, чем получаемые из равенств (16.47). Если положить, например, $\alpha_0 = 0{,}01°$, то из (16.48) получим, что через час пугевая погрешность составит 11,3 км, между тем как, согласно (16.47), максимальная величина погрешности вообще составляет лишь 2,2 км. Через два часа погрешность (16.48) возросла бы уже до 45,2 км.

Рассмотренный пример относится к случаю, когда имеется начальная погрешность акселерометра $b_0^M = -g\alpha_0$, которая возникла, например, вследствие начального наклона платформы (погрешность выставки). На практике же существуют также погрешности, которые вызываются дрейфом гироскопа и вследствие действия следящей системы проявляются в дрейфе $\dot{\alpha}_0$ платформы. В этом случае, обладая свойствами колебательной системы, платформа, настроенная на частоту Шулера ω^S, движется по закону

$$\alpha = \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega^S} \sin \omega^S t. \tag{16.49}$$

Отсюда следует, что при неподвижном относительно Земли основании платформы и при $v^M(0) = s^M(0) = 0$

$$\begin{aligned} b^M &= -g\alpha = -\dot{\alpha}_0 \sqrt{gR} \sin \omega^S t, \\ v^M &= -\dot{\alpha}_0 R (1 - \cos \omega^S t), \\ s^M &= -\dot{\alpha}_0 R \left(t - \sqrt{R/g} \sin \omega^S t\right). \end{aligned} \tag{16.50}$$

В этом случае среднее значение путевой погрешности растет пропорционально времени. На среднюю погрешность накладывается колебание с периодом 84 мин. Этот результат еще раз подтверждает, что дрейф гироскопа нужно по возможности уменьшать. Легко показать, что путевая погрешность платформы, не настроенной соответствующим образом, росла бы пропорционально третьей степени времени.

16.4.4. Блок-схема управляемой платформы с географической ориентацией осей. Рассмотрим платформу, которая управляется таким образом, что ее оси всегда ориентированы по направлениям восток (O) — север (N) — зенит (Z)· Принцип действия, а также и объем расчетных операций, который потребуется при применении такой платформы для навигационных целей, можно выяснить с помощью блок-схемы, показанной в упрощенном виде на рис. 16.11.

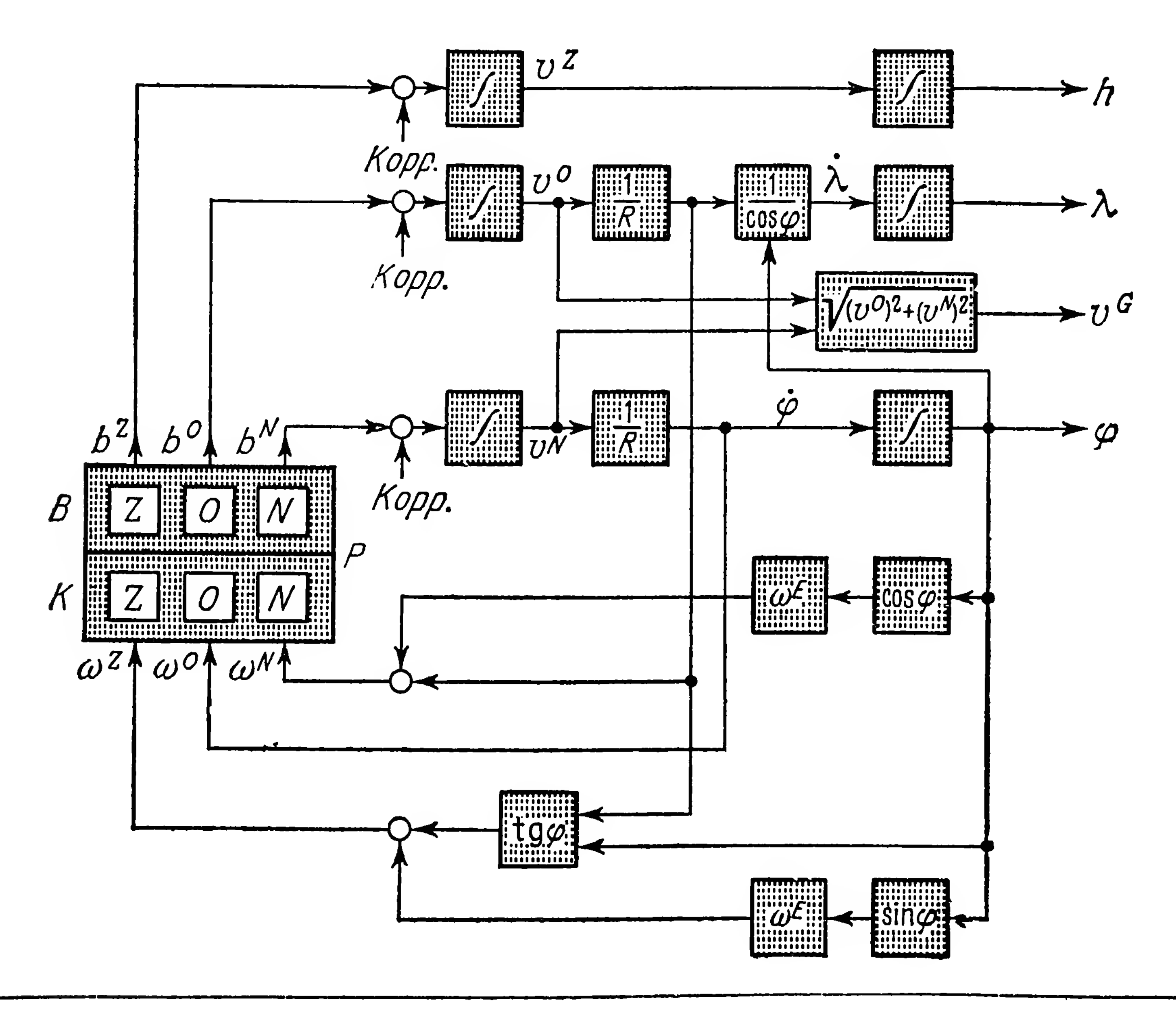


Рис. 16.11. Упрощенная блок-схема инерциальной системы навигации, ориентированной по осям географического трехгранника.

Платформа P несет на себе три гироскопа K и три акселерометра B. Исходными данными для платформы являются измеренные величины b^Z, b^O, b^N, по которым, однако, еще невозможно непосредственно вычислить скорости. Дело в том, что эти величины содержат еще слагаемые, которые обусловлены ускорением Кориолиса и центростремительным ускорением. Эти слагаемые, а также изменения ускорения земного тяготения при навигации на больших высотах должны быть учтены и компенсированы. После однократного интегрирования получаются скорости v^Z, v^O, v^N. По ним может быть вычислена и указана скорость v^G относительно Земли. После интегрирования v^Z получают высоту h; так как значение h большей частью содержит быстро растущие во времени погрешности, оно используется только кратковременно. Умножая

v^N на $1/R$, получают сразу производную $\dot{\varphi}$ от географической широты. Ввиду необходимости учета схождения меридианов, для получения $\dot{\lambda}$ величину v^O/R умножают на $1/\cos\varphi$. По величинам $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$ получают после интегрирования данные о координатах φ и λ.

Для того чтобы платформа была всегда должным образом ориентирована относительно Земли, оси платформы нужно вращать со следующими угловыми скоростями:

$$\omega^O = -\frac{v^N}{R},$$
$$\omega^N = \frac{v^O}{R} + \omega^E \cos\varphi. \qquad (16.51)$$
$$\omega^Z = \frac{v^O}{R}\operatorname{tg}\varphi + \omega^E \sin\varphi.$$

Эти величины можно сформировать способом, показанным на блок-схеме, и использовать как входные данные платформы, вернее как данные для управления гироскопами.

Само собой разумеется, что должны быть даны начальные значения h_0, v_0^G, λ_0 и φ_0, которые в качестве исходных данных содержатся в текущих значениях высоты h, скорости v^G, долготы λ и широты φ, указываемых инерциальной системой навигации. Для самолетов можно в большинстве случаев использовать упрощенную систему, в которой отсутствует указание высоты. Таким образом можно сэкономить один акселерометр и соответствующую счетную операцию. Но при движении в космосе выдача инерциальной системой координаты по высоте необходима, так как получить ее здесь барометрическим способом невозможно.

16.5. Выставка платформы

Платформу, ориентируемую по земным осям, необходимо перед пуском ее в эксплуатацию выставить так, чтобы ее оси по возможности точно совпадали с осями выбранной системы отсчета. Если в качестве последней взята система осей восток — север — зенит, то одна ось платформы должна быть направлена по вертикали места, а две другие — в горизонтальной плоскости на восток и на север.

Автоматическая выставка платформы происходит следующим образом: сначала платформа горизонтируется, для чего выходы акселерометров «Восток» и «Север» подключаются на входы гироскопов «Север» и «Восток» соответственно. При этом следящая система, управляемая гироскопами, будет вращать платформу вокруг горизонтальных осей до тех пор, пока сигналы акселерометров не обратятся в нуль. Затем платформа ориентируется на север. Для

этого — как и в компасе — используется эффект вращения Земли. Как показано на рис. 16.12, компоненты $\omega^E \cos\varphi$ и $\omega^E \sin\varphi$ направлены соответственно на север и в зенит. При отклонении осей платформы O' и N' от направлений восток и север на некоторый курсо-

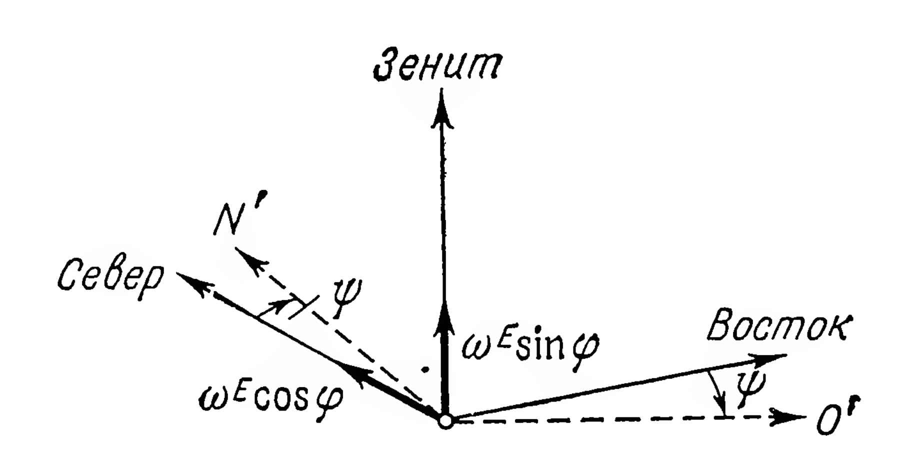


Рис. 16.12. К расчету инерциальной платформы с автоматической начальной выставкой.

вой угол ψ проекция угловой скорости Земли на ось O', а следовательно, и на измерительную ось гироскопа «Восток» будет равна

$$\omega^{O'} = -\omega^E \cos\varphi \sin\psi. \tag{16.52}$$

Обращение в нуль этой угловой скорости указывает на то, что $\psi = 0$, т. е. что платформа выставлена правильно.

Для выставки выход гироскопа «Восток» подают на вход гироскопа «Зенит». Тогда платформа вращается вокруг своей вертикальной оси до тех пор, пока не обратится в нуль сигнал гироскопа «Восток» и измерительная ось этого гироскопа не укажет точно на восток.

При практической реализации этого принципа следует иметь в виду, что горизонтирование и выставка в азимуте влияют друг на друга и что вращение Земли нужно учитывать как возмущающий фактор. Большей частью применяют включение платформы по *компасной схеме* (*гирокомпасирование*), как это упрощенно изображено на рис. 16.13. Горизонтирование платформы вращением вокруг оси N, в результате которого восточная ось устанавливается в горизонте, не зависит от других контуров выставки. При этом выход акселерометра «Восток» подключается через соответствующий усилитель на вход гироскопа «Север». Составляющую $\omega^E \cos\varphi$ угловой скорости Земли, которая в установившемся состоянии измеряется гироскопом «Север», нужно во время горизонтирования компенсировать.

Более сложной является выставка северной оси платформы в горизонте и в направлении на север, т. е. ориентирование ее в азимуте. В данном случае выход акселерометра «Север» подается сначала на вход гироскопа «Восток» для горизонтирования платформы. При этом следящая система, управляемая гироскопом,

вращает платформу вокруг восточной оси со скоростью, которая поглощает полезную компоненту (16.52), необходимую для ориентирования в азимуте. Можно поэтому сначала производить выставку в азимуте.

Эти трудности можно частично обойти, подав сигнал акселерометра «Север» и на вход гироскопа «Зенит». Составляющую $\omega^E \sin \varphi$ угловой скорости Земли следует опять учитывать как возмущение. Тогда можно даже ликвидировать изображенную на рис. 16.3 штриховой линией цепь, идущую от выхода гироскопа

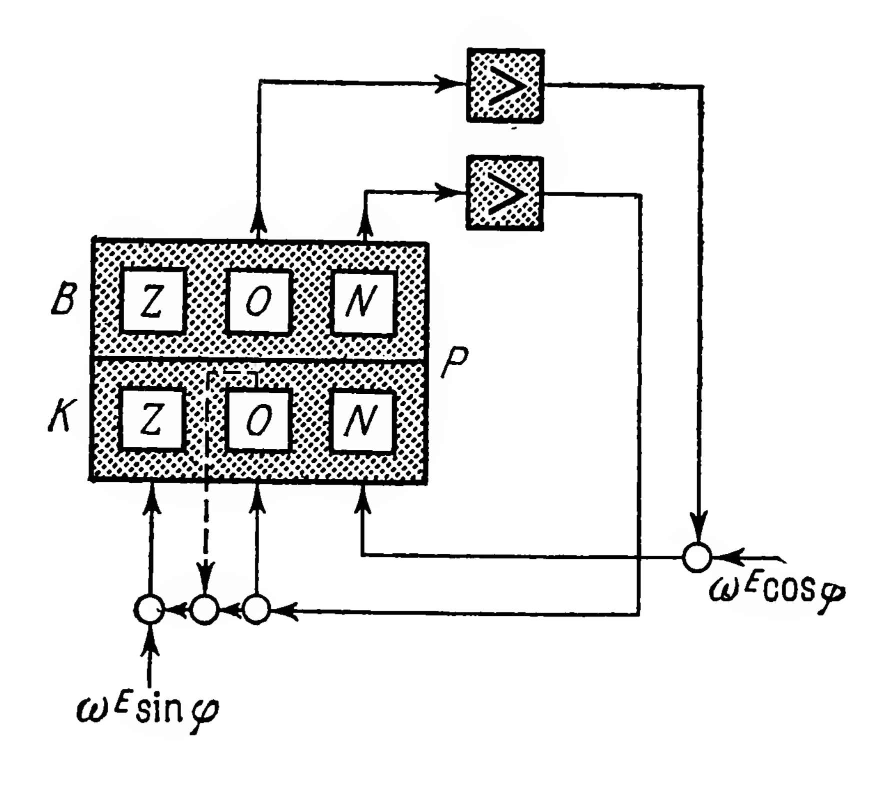


Рис. 16.13. Упрощенная принципиальная схема выставки инерциальной платформы в горизонте и в меридиане.

«Восток» на вход гироскопа «Зенит». По вопросам частным и относящимся к расчетам систем регулирования сошлемся на уже цитированную специальную литературу, а также на исследования Кэннона [109] и Мюллера [110].

На рис. 16.13 не изображена следящая система, которая вращает платформу в соответствии с сигналами, поступающими от гироскопов. Так как эта система регулирования обладает очень малыми постоянными времени по сравнению с достижимым временем установления платформы, при исследовании можно считать, что платформа следует за показаниями гироскопов без запаздывания. Контуры горизонтирования действуют также гораздо быстрее, чем цепь приведения платформы в азимуте, но все же совсем пренебрегать этими взаимными связями цепей нельзя.

Следует еще указать на следующие три вида трудностей, возникающих при выставке платформы:

1) влияние дрейфа гироскопов,
2) возмущения, возникающие вследствие вращений объекта.
3) зависимость от географической широты места φ,

Дрейф гироскопов, который никогда невозможно устранить полностью, ведет к появлению ошибок как в горизонтировании, так и в азимутальной выставке. Чтобы эти ошибки сделать малыми, выработаны методы, позволяющие специальными измерениями определять дрейф гироскопов в процессе регулировки системы и учитывать его затем как возмущающий фактор. Правда, при этом значительно возрастает время, необходимое для выставки платформы.

Очень малая по величине компонента (16.52) может быть измерена сколько-нибудь надежно только тогда, когда основание платформы, а следовательно, и объект неподвижны. Каждое движение объекта, как это, например, имеет место на старте самолета при сильном ветре, вредит точной выставке платформы. В этом случае ошибка может быть уменьшена лишь ценой увеличения времени выставки. Если выставка происходит полностью автоматически, то время выставки в условиях самолета следует считать равным примерно двенадцати минутам. Для кораблей это время еще больше; в условиях открытого моря время успокоения в азимутальной цепи определяется в основном тем, что она настроена на период Шулера. Для самого прихода в положение равновесия требуется около трех часов. Наконец, при настройке на движущемся объекте необходимо еще учитывать, например по формуле (16.51), составляющую, вносимую собственной скоростью. Для этого нужно иметь достаточно точную информацию о курсе и скорости.

Следует указать еще на то, что величина (16.52) вблизи полюсов становится столь малой, что выставка в азимуте не может быть произведена с желаемой точностью. Это свойство самоустанавливающейся платформы одинаково присуще и гирокомпасам, описанным в гл. 13; возле полюсов они также теряют способность устанавливаться в направлении на север.

Список литературы

Работы общего характера

1. Арнольд и Маундер (Arnold R. N., Maunder L.), Gyrodynamics, New York — London, Academic Press, 1961.
2. Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, ГОНТИ, М., 1939, изд. 2, Гостехиздат, М., 1955.
3. Граммель (Grammel R.), Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, 2 Bde., Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1950. [Русский перевод: Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, т. 1, т. 2, ИЛ, М., 1952.]
4 Грей (Gray A.), A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion, Theory and Applications, New York, Dover, 1959.
5. Ишлинский А. Ю., Механика гироскопических систем, Изд-во АН СССР, 1963.
6 Клейн и Зоммерфельд (Klein F., Sommerfeld A.), Über die Theorie des Kreisels, 4 Bde., Leipzig, Teubner, 1910—1922
7. Лейманис (Leimanis E.), The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point, Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1965.
8. Меркин Д. Р., Гироскопические системы, Гостехиздат, М, 1956.
9. Перри (Perry J.), Spinning Tops and Gyroscopic Motion, New York, Dover, 1957.
10. Ричардсон (Richardson K. I. T.), The Gyroscope Applied, London — New York, Hutchinsons, 1955.
11. Ройтенберг Я. Н., Гироскопы, изд-во «Наука», М., 1966.
12. Саидов П. И., Теория гироскопов, изд-во «Высшая школа», М., 1965.
13 Саве (Savet P. H.), Gyroscopes, Theory and Design, New York, McGraw-Hill, 1961.
14. Шулер (Schuler M.), Kreisellehre, in Müller — Pouillets Lehrbuch der Physik, 11 Aufl., Bd. 1, I, Braunschweig, Vieweg, 1929.
15. Kreiselprobleme, Herausgeber H. Ziegler, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1963. [Русский перевод: Проблемы гироскопии, под ред. Г. Циглера, изд-во «Мир», М., 1967.]

Специальные труды и публикации

16. Душек и Хохрайнер (Duschek A., Hochrainer A.), Tensorrechnung in analytischer Darstellung, 3 Bde., Wien, Springer, 1960.
17. Голдстейн (Goldstein H.), Classical Mechanics, Ch. 4—5, Addison-Wesley, Reading, 1951. [Русский перевод: Голдстейн Г., Классическая механика, гл. 4—5, Гостехиздат, 1957]
18. Трусделл (Truesdell C.), *Z. Angew. Math. Mech*, **44** (1964), 149.
19. Гебелейн (Gebelein H.), *Ann. Phys.*, **12** (1932), 889—926.

20. Румянцев В. В., *Прикл. матем и мех.*, **18** (1954), 457—458
21. Штауде (Staude O.), *Crelles J Reine und Angew. Math.*, **113** (1894), 318.
22. Румянцев В. В., *Докл. АН СССР*, **116** (1957), 185—188
23. Гуляев М П., *Докл. АН Казах. ССР*, **1** (1958), 202—208.
24. Граммель (Grammel R), *Ing-Arch*, **22** (1954), 73—97.
25. Бёдевадт (Bödewadt U. T), *Math. Z*, **55** (1952), 310—320.
26. Граммель (Grammel R.), *Ing.-Arch*, **29** (1960), 153—159.
27 Вайденгаммер (Weidenhammer F.), *Z. Angew. Math. Mech.*, **38** (1958), 480—483.
28. Вибелиц (Wiebelitz R), *Z. Angew. Math Phys.*, **6** (1955), 362—377.
29. Лейпгольц (Leipholz H.), *Ing-Arch*, **32** (1963), 255—296.
30. Кейс И. А., *Изв. АН Эст. ССР*, **14** (1965), 555—558.
31. Магнус (Magnus K), *Acta Mechanica*, **2** (1966), 130—143.
32. Четаев Н Г, Устойчивость движения, изд. 2, Гостехиздат, 1955.
33. Магнус (Magnus K), *Z. Angew. Math. Mech.*, **35** (1955), 23—34.
34. Томсон и Тэт (Thomson W, Tait P. G.), Treatise on Natural Philosophy, vol. 1, Cambridge, University Press, 1897.
35. Циглер (Ziegler H.), *Z. Angew Math Phys*, **4** (1953), 89—121.
36. Больцман (Boltzmann L), Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Koordinaten, *Sitzungsber. Akad. Wien*, 1902.
37. Теллеген (Tellegen B. D. H.), *Phillips Res Rep*, **3** (1948), 81—101.
38. Форбат (Forbat N.) Analytische Mechanik der Schwingungen, Berlin, 1966.
39. Метелицын И И., *Докл. АН СССР*, **86** (1952), 31—34.
40. Гантмахер Ф Р., Теория матриц, изд. 3, изд-во «Наука», 1967.
41. Заяк (Zajac E. E), *J. Aeronaut Sci.*, **11** (1964), 46—49
42. Магнус (Magnus K.), *Z. Angew. Math. Mech.*, **22** (1942), 336—356.
43 Лурье А. И, *Труды Ленингр. политехн. ин-та*, **210** (1960), 7—22.
44. Роберсон и Виттенбург (Roberson R. E, Wittenburg J.), Proc. of the 3rd IFAC-Congress, London, 1966.
45. Виттенбург (Wittenburg J.), *Ing-Arch*, **37** (1968), 221—242.
46 Роберсон и Ликинс (Roberson R. E., Likins P. W.), *Ing.-Arch.*, **37** (1969), 388—392.
47. Шилен (Schiehlen W.), *Z. Angew. Math. Mech*, **46** (1966), T132—133.
48 Павлов В. А., Авиационные гироскопические приборы, Оборонгиз, М., 1954
49. Жуковский Н Е, Избранные сочинения, т. 2, Гостехиздат, М., 1948.
50. Румянцев В. В, *Изв АН СССР, Механика* (1963), № 6, 119—140.
51. Стюартсон (Stewartson K), *J. Fluid Mech.*, **5** (1959), 577—592. [Русский перевод· сб *Механика*, № 6 (64), (1960), 3—19.]
52. Карьер и Майлс (Carrier G. F, Miles J. W.), *J. Appl. Mech.*, **27** (1960), 237—240 [Русский перевод. сб *Механика*, № 6 (70) (1961), 21—19.]
53. Аминов М. Ш., *Труды Казан. авиац. ин-та*, № 48, 1959.
54. Куттерер (Kutterer R. E), Ballistik, 3 Aufl., Braunschweig, 1959.
55. Попов (Popoff K), Die Hauptprobleme der äußeren Ballistik, Leipzig, 1954.
56. Гесс (Hess F.), *Scientific American* (1968), 124—136.
57. Герглоц (Herglotz G), Vorlesung über Analytische Mechanik, Göttingen, 1941.
58. Белецкий В. В., *Прикл. матем. и мех*, **21** (1957), 749—758.
59. Пожарицкий Г. К. *Прикл. матем и мех.*, **23** (1959), 792—793.
60. Шулер (Schuler M), *Phys. Z*, **24** (1923), 344—350.
61. Гофер (Hofer E), *Ing.-Arch.*, **34** (1965), 264—274.
62. Магнус (Magnus K.), *Ing.-Arch.*, **34** (1965), 129—138.
63. Златоустов В. А., Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Торжевский А. П., Proc. 11th Int. Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964, Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1966, 436—439.
64. Шилен (Schiehlen W.), Diss., Universität Stuttgart, 1966
65. Гиргольцер (Hierholzer W.), *Astr Nachr.* 6395/96, **267** (1938), 176—203.
66. Магнус (Magnus K.), *Z. Angew. Math. Mech.*, **20** (1940), 165—174.

67. Бицено и Граммель (Biezeno C. B., Grammel R.), Technische Dynamik, Bd. II, Kap. X, 2 Aufl, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1953. [Русский перевод первого издания: Бицено К., Граммель Р., Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, М., 1952.]
68. Тондл (Tondl A.), Some Problems of Rotor Dynamics, Prague — London, 1965. [Русский перевод: Тондл А., Динамика роторов турбогенераторов, изд-во «Энергия», 1971.]
69 Кренделл и Брозенс (Grandall S. H., Brosens P. J.), *J. Appl. Mech.*, **28** (1961), 567—570.
70. Оппельт (Oppelt W.), Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge, Weinheim, 1964.
71. Бутенин Н. В., *Приборостроение* (1960), № 3, 34—43.
72. Граммель и Циглер (Grammel R., Ziegler H.), *Ing.-Arch*, **24** (1956), 351—372.
73. Бутенин Н. В. и Лунц Я. Л., *Приборостроение* (1963), № 5, 75—83.
74. Метелицын И. И., *Изв. АН СССР, ОТН* (1959), 3—9
75. Магнус (Magnus K.), Advances in Aeronautical Sciences, vol. I, Oxford — London, Pergamon Press, 1959, 507—523
76. Климов Д М., *Изв АН СССР, Механика* (1963), № 5, 11—16
77. Шмид (Schmid W.), *Z. Angew Math Mech*, **51** (1971), T125
78 Фернандец и Макомбер (Fernandez M., Macomber G R.), Inertial Guidance Engineering, Englewood-Cliffs, Prentice-Hall, 1962.
79. Зеебах (Seebach K.), Jahrb. 1943 der deutschen Luftfahrtforschung, III A 012, 1—15.
80. Марре (Marre E.), *VDI-Z.*, **93** (1951), 836—842.
81. Шмид (Schmid W.), *Ing.-Arch*, **35** (1966), 230—237.
82. Прайс (Price H. L.), *Aircraft Engineering*, **20** (1948), 11—17, 38—45.
83. Фишель (Fischel E.), *Luftfahrttechnik-Raumfahrttechnik*, **10** (1964), 101—106.
84. Магнус (Magnus K.), *Luftfahrtforschung*, **19** (1942), 23—43.
85. Шулер (Schuler M), *VDI-Z.*, **104** (1962), 469—476, 593—599.
86. Мурре (Mourre L), Du Compas Gyroscopique, Paris, 1953.
87. Блюмин Г. Д. и Чичинадзе М В., *Изв АН СССР, Механика* (1964), № 3, 71—78
88 Шулер (Schuler M.), *Z. Angew Math. Mech*, **2** (1922), 223—250
89. Гейнрих (Heinrich G.), *Österr. Ing.-Arch.*, **4** (1950), 215—221
90. Бауэрсфельд (Bauersfeld W.), *Ing.-Arch*, **27** (1960), 365—371.
91. Ишлинский А Ю., *Прикл. матем. и мех.*, **20** (1956), 487—499
92. Христоф (Christoph P.), *Ing.-Arch.*, **26** (1958), 233—241. [Русский перевод: сб. *Механика*, № 3 (55) (1959), 147—158]
93. Магнус (Magnus K.), VDI-Forschungsheft 451, Kap 3.3, Düsseldorf, 1955.
94. Ганкамм (Hahnkamm E.), *Ing.-Arch.*, **5** (1934), 169—178.
95 Новожилов И. В., *Докл АН СССР, ОТН* (1962), № 4. 112—114
96. Ишлинский А Ю, *Докл. АН СССР*, **163** (1965), 1334—1337.
97 Шинделин (Schindelin J. W), *Ing.-Arch*, **39** (1970), 37—52
98 Кэннон (Cannon R H), Joint Automatic Control Conference, Boulder, 1961, Pap. No. 61-JAC-8.
99. Роберсон (Roberson R. E), Colloque International, Paris, 1968, 319—348.
100 Летова Т. А, *Прикл. матем и мех.*, **29** (1965), № 6, 1116—1121.
101. Der PID-Kreisel und seine Anwendung in Flugreglern, Bericht der Firma Bodenseewerk Perkin-Elmer & Co, 1962.
102 Зорг (Sorg H.), Der Wendekreisel mit unsymmetrischem Läufer, Diss., TH Stuttgart, 1965.
103 Гудмен и Робинсон (Goodman L. E., Robinson A. R), *J. Appl Mech.*, **25** (1958). 210—213 [Русский перевод: сб. *Механика*, № 5 (57) (1959), 133—142.]
104. Швейцер (Schweitzer G.), DVLR-Forschugsbericht Nr. 67-30, Oberpfaffenhofen, April 1967, 121.

105 Дрейпер, Ригли, Говорка (Draper C. S., Wrigley W , Hovorka J.), Inertial Guidance, Oxford—London, Pergamon, 1960.
106. Броксмейер (Broxmeyer Ch.), Inertial Navigation Systems, New York, McGraw-Hill, 1964.
107. Normblatt LN 9300, Bezeichnungen in der Flugmechanik, Köln, Beuth-Vertrieb, Nov. 1959.
108. Гюбнер (Hübner W.), Das Zeitverhalten von einachsigen Kreiselplattformen, Diss., TH München, 1970.
109. Кэннон (Cannon R H.), *J. Aerospace Sci.*, **28** (1961), 885—895.
110. Мюллер (Müller P.), Schnelligkeitsoptimales Ausrichten von Trägheitsplattformen, Diss., TH München, 1970.

Именной указатель

Предметный указатель

Оглавление

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

К. МАГНУС

ГИРОСКОП. ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ

Редактор Г. М. Ильичева Художник А. Г. Антонова
Художественный редактор В. И. Шаповалов Технический редактор Г. Б. Алюлина
Корректор Т. С. Лаврова

Сдано в набор 29/XI 1973 г. Подписано к печати 27/V 1974 г. Бум. тип. № 1 60×90[1]/16=
16,5 бум. л. 33 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 29,99 Изд. № 1/6899. Цена 2 р. 94 к. Зак. 901.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

